

关于 L -代数的Wedge-Sum

郭士玉, 吴雅丽*

河北地质大学数理教学部, 河北 石家庄

收稿日期: 2026年3月13日; 录用日期: 2026年4月11日; 发布日期: 2026年4月23日

摘要

本文主要探讨 L -代数 X_i 的wedge-sum $\vee X_i$ 与各 X_i 之间的关系。证明了wedge-sum $\vee X_i$ 的理想完全由 X_i 的理想决定, 而wedge-sum上的同余关系则由满足特定条件的 L -代数上的同余所决定。给出了几类特殊的wedge-sum L -代数, 其性质完全由 X_i 的性质决定, 并指出自相似 L -代数不满足这一特性。此外, 还讨论了wedge-sum $\vee X_i$ 上的一致拓扑与 X_i 上的一致拓扑之间的关系。

关键词

L -代数, Wedge-Sum, 理想, 格序效应代数, 一致拓扑

On the Wedge-Sum of L -Algebras

Shiyu Guo, Yali Wu*

School of Mathematics and Physics, Hebei GEO University, Shijiazhuang Hebei

Received: March 13, 2026; accepted: April 11, 2026; published: April 23, 2026

Abstract

This paper mainly investigates the relationship between the wedge-sum $\vee X_i$ of L -algebras X_i and each X_i . We prove that the ideals of the wedge-sum $\vee X_i$ are completely determined by the ideals of X_i , while the congruence relations on the wedge-sum are determined by the congruences on L -algebras satisfying certain conditions. We present several special classes of wedge-sum L -algebras whose properties are fully determined by properties of X_i , and indicate that self-similar L -algebras do not possess this property. Furthermore, we discuss the relationship between the uniform topology on the wedge-sum $\vee X_i$ and the uniform topology on each X_i .

*通讯作者。

Keywords

***L*-Algebras, Wedge-Sum, Ideals, Lattice-Order Effect Algebras, Uniform Topology**

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

L-代数作为一类重要的代数结构, 是众多代数逻辑的基础。*L*-代数的概念起源于对量子 Yang-Baxter 方程集论解[1]的研究, 即如果左乘法是双射的, 则每个满足 $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z) = (y \rightarrow x) \rightarrow (y \rightarrow z)$ 的二元运算的集合 X 对应于量子 Yang-Baxter 方程的解。2008 年 Rump 引入了由上述方程定义的 *L*-代数[2], 对 *L*-代数中的理想与同余也进行了研究, 他指出, 任意一个 *L*-代数上的理想与满足特定条件的同余是一一对应的, 证明了 Hilbert 代数、Locales、(left)Hoops、(伪)MV-代数和格序群的负锥都是 *L*-代数, 还对 *L*-代数的自相似、自相似闭包以及结构群等进行了研究。自 *L*-代数被提出, *L*-代数已被众多学者进行研究。2018 年吴雅丽, 王静和杨义川[3]给出了格序效应代数和 *LE-L*-代数(一种特殊的 *L*-代数)之间的等价刻画。2020 年吴雅丽和杨义川[4]证明了每一个正交模格都是一个 *L*-代数, 并且给出了正交模格与 *OM-L*-代数(一种特殊的 *L*-代数)之间的等价刻画。2022 年郑冉[5]讨论了格 L 上的拓扑与 *L*-代数的关系, 并讨论了由格 L 上的拓扑所建立的 *L*-代数中的素元。

Rump [6]研究了对称量子集与 *L*-代数之间的关系, 证明了量子集等价于半模完备原子正交模格, 并在文中首次定义了 *L*-代数的 wedge-sum 这一概念: 一族 *L*-代数 $(X_i)_{i \in \Lambda}$ 的无交并, 证明了 *L*-代数的 wedge-sum 仍是 *L*-代数, 即给出了 *L*-代数的一个新的构造; 每个 *L*-代数都是其极大连通 *L*-子代数 X_i 的 wedge-sum $X = \vee X_i$, 即将 *L*-代数分解为一些小的 *L*-代数, 通过对每个小的 *L*-代数实现对整个 *L*-代数的研究。2023 年 Ruan [7]考虑了 *L*-代数的笛卡尔积的消去问题, 证明了素元为 0 的 *L*-代数和满足特殊条件的 *L*-代数是可消的, 还证明了可消的 *L*-代数的 wedge-sum 是可消的, 并且每个 *L*-代数都可以嵌入到可消的 *L*-代数中。

本文组织如下: 第二节研究了 $\vee X_i$ 与 X_i 关于子代数、理想、同余以及商代数间的关系; 第三节讨论了几类特殊的 *L*-代数 wedge-sum $\vee X_i$ 与 X_i 之间的关系, 如 *KL*-代数、*CKL*-代数、Hilbert 代数、*MV*-代数、正交模格、格序效应代数以及自相似 *L*-代数; 第四节证明了 *L*-代数上的一致拓扑的连续性及 *L*-代数 wedge-sum $\vee X_i$ 上的拓扑与 X_i 上的拓扑之间的关系。

2. *L*-代数 Wedge-Sum 的子代数、理想及商代数

定义 2.1 [2] 一个 *L*-代数 $(X, \rightarrow, 1)$ 是一个 $(2, 0)$ 型代数并且对 $\forall x, y, z \in X$ 满足以下条件:

$$x \rightarrow x = x \rightarrow 1 = 1, 1 \rightarrow x = x, \quad (1)$$

$$(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z) = (y \rightarrow x) \rightarrow (y \rightarrow z), \quad (2)$$

$$x \rightarrow y = y \rightarrow x = 1 \Rightarrow x = y. \quad (3)$$

对 $\forall x, y, z \in X$, 条件(1)表明 1 是一个逻辑单位。需注意, 逻辑单位始终是唯一的。文献[2]中定义了如下偏序关系:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \rightarrow y = 1. \quad (4)$$

我们把 X 中除了 1 以外的元素记作 $S^1(X)$, 即 $S^1(X) := X \setminus \{1\}$. 若 X 存在最小元, 则称其为有界的, 最小元恒记为 0 . 对 $x \in X$, 我们定义 $x' := x \rightarrow 0$. 于是有 $0' = 1$ 且 $1' = 0$.

设 X 是一个 L -代数. 根据文献[2]的命题 2, 对 $\forall x, y, z \in X$, 若 $x \leq y$, 则 $z \rightarrow x \leq z \rightarrow y$. 若 L -代数 X 满足下述条件, 则称其为 KL -代数:

$$x \leq y \rightarrow x. \quad (5)$$

设 X 是一个 L -代数. 若对 $\forall x, y \in Y$ 有 $x \rightarrow y \in Y$, 则称 X 的子集 Y 是 L -子代数. 若对 $\forall x \in X$ 和 $y \in Y$, 均有 $x \rightarrow y \in Y$ 成立, 则称 Y 是不变 L -子代数.

定义 2.2 [2] 设 $(X, \rightarrow, 1)$ 是一个 L -代数. 若对 $\forall x, y \in X$, 子集 $I \subset X$ 满足以下条件, 则称其为理想:

$$1 \in I, \quad (6)$$

$$x, x \rightarrow y \in I \Rightarrow y \in I, \quad (7)$$

$$x \in I \Rightarrow (x \rightarrow y) \rightarrow y \in I, \quad (8)$$

$$x \in I \Rightarrow y \rightarrow x \in I, y \rightarrow (x \rightarrow y) \in I. \quad (9)$$

推论 2.1 设 X 是一个 L -代数, 且 $I \subset X$ 是 X 的一个理想, 则对 $\forall x, y, z \in X$, 蕴含关系 $x, (x \rightarrow y) \rightarrow z \in I \Rightarrow y \rightarrow z \in I$ 成立.

证明 由(2)和(9)可得 $(y \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (y \rightarrow z) = ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow z) \in I$. 因此, 结合(7)和(9), 有 $y \rightarrow z \in I$.

对于 L -代数 $(X, \rightarrow, 1)$, 二元关系 \sim 被称为同余关系, 若它是一个等价关系, 且对 $\forall x, y, z \in X$ 满足以下条件:

$$x \sim y \Leftrightarrow (z \rightarrow x) \sim (z \rightarrow y) \text{ 且 } (x \rightarrow z) \sim (y \rightarrow z). \quad (10)$$

引理 2.2 [2] 设 $(X, \rightarrow, 1)$ 是一个 L -代数, 则对 X 的任意理想 I , 我们通过下式定义 X 上的同余关系:

$$x \sim_I y \Leftrightarrow x \rightarrow y, y \rightarrow x \in I, \quad (11)$$

其中 $x, y \in X$ 为任意元.

反之, 对任意同余关系 \sim , 我们可以定义理想 $I = \{x \in X \mid x \sim 1\}$.

定义 2.3 [6] 对于一族 L -代数 $(X_i)_{i \in \Lambda}$ (其中 Λ 为指标集), 满足 $\forall i \neq j, X_i \cap X_j = \{1\}$. 定义 $(\vee X_i)_{i \in \Lambda}$ 如下, 其中 $(\vee X_i)_{i \in \Lambda} = (\cup X_i)_{i \in \Lambda}$, 对 $\forall x, y \in \vee X_i$,

$$x \rightarrow y := \begin{cases} x \rightarrow y, & x, y \in S^1(X_i) \\ y, & x \in S^1(X_i), y \in S^1(X_j), i \neq j \end{cases}$$

易证 $(\vee X_i)_{i \in \Lambda}$ 是 L -代数, 我们把它称为 X_i 的 wedge-sum, 记作 $\vee X_i$.

下面我们给出一个 wedge-sum L -代数的具体例子.

例 2.1 设集合 $X_1 = \{x_1, y_1, 1\}$, $X_2 = \{x_2, y_2, 1\}$, 其二元运算 $\rightarrow_1, \rightarrow_2$ 分别见表 1, 表 2, 且 X_1, X_2 的 Hasse 图分别见图 1, 图 2, 可直接验证 $(X_1, \rightarrow_1), (X_2, \rightarrow_2)$ 是 L -代数.

Table 1. Binary operation of X_1

表 1. X_1 的二元运算

\rightarrow_1	x_1	y_1	1
x_1	1	1	1
y_1	x_1	1	1
1	x_1	y_1	1

Table 2. Binary operation of X_2

表 2. X_2 的二元运算

\rightarrow_2	x_2	y_2	1
x_2	1	y_2	1
y_2	1	1	1
1	x_2	y_2	1

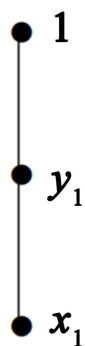


Figure 1. Hasse of X_1

图 1. X_1 的哈斯图

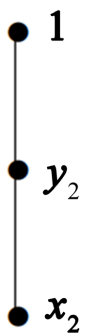


Figure 2. Hasse of X_2

图 2. X_2 的哈斯图

则 X_1 与 X_2 的 wedge-sum 的具体运算见表 3。

Table 3. Binary operation of wedge-sum of X_1 and X_2 **表 3.** X_1 与 X_2 wedge-sum 的二元运算

\rightarrow	x_1	y_1	x_2	y_2	1
x_1	1	1	x_2	y_2	1
y_1	x_1	1	x_2	y_2	1
x_2	x_1	y_1	1	y_2	1
y_2	x_1	y_1	1	1	1
1	x_1	y_1	x_2	y_2	1

注 2.1 由文献[6]的命题 3 可知, 每个 L -代数 X 均可表示为其极大连通 L -子代数 X_i 的 wedge-sum $X = \vee X_i$ 。

接下来我们主要研究 L -代数 X_i 的 wedge-sum 的子代数、不变子代数、理想、同余以及商代数与 X_i 之间的关系。

命题 2.3 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum。若 Y 是 X 的 L -子代数, 则 $Y \cap X_i$ 为 X_i 的 L -子代数。

证明 对 $\forall x, y \in Y \cap X_i$, 即 $x, y \in Y$ 且 $x, y \in X_i$, 有 $x \rightarrow y \in Y$ 且 $x \rightarrow y \in X_i$, 因此, $x \rightarrow y \in Y \cap X_i$ 。

命题 2.4 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum。若 Y_i 是 X_i 的 L -子代数, 则 $\vee Y_i$ 是 X 的 L -子代数。

证明 对 $\forall x, y \in \vee Y_i$, 若 $x, y \in Y_i$, 则 $x \rightarrow y \in Y_i \subset \vee Y_i$ 。若 $x \in Y_i, y \in Y_j$, 则 $x \rightarrow y = y \in \vee Y_i$ 。

推论 2.5 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum。若 Y_i 是 X_i 的 L -子代数, 则 $Y = \vee Y_i$ 是 X 的 L -子代数, 并且 X 的任意 L -子代数都是这种形式。

证明 由命题 2.4 可知, Y 是 X 的 L -子代数。设 Y 是 X 的任意 L -子代数, 则由命题 2.3 可知, $Y_i = Y \cap X_i$ 是 X_i 的 L -子代数, 且 $Y = \vee Y_i$ 。

命题 2.6 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum。若 Y 是 X 的不变 L -子代数, 则 $Y \cap X_i$ 是 X_i 的不变 L -子代数。

证明 对 $\forall x \in X_i \subset X$ 且 $y \in Y \cap X_i$, 即 $y \in Y$ 且 $y \in X_i$, 有 $x \rightarrow y \in Y$ 且 $x \rightarrow y \in X_i$, 因此 $x \rightarrow y \in Y \cap X_i$ 。

命题 2.7 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum。若 Y_i 是 X_i 的不变 L -子代数, 则 $\vee Y_i$ 是 X 的不变 L -子代数。

证明 对 $\forall x \in X$ 且 $y \in \vee Y_i$, 若 $x \in X_i, y \in Y_i$, 则 $x \rightarrow y \in Y_i \subset \vee Y_i$; 若 $x \in X_i, y \in Y_j$, 则 $x \rightarrow y = y \in Y_j \subset \vee Y_i$ 。

推论 2.8 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum。若 Y_i 是 X_i 的不变 L -子代数, 则 $Y = \vee Y_i$ 是 X 的不变 L -子代数, 并且 X 的任意不变 L -子代数都是这种形式。

证明 由命题 2.7 可知, Y 是 X 的不变 L -子代数。设 Y 是 X 的任意不变 L -子代数, 则由命题 2.6 可知, $Y_i = Y \cap X_i$ 是 X_i 的不变 L -子代数, 且 $Y = \vee Y_i$ 。

命题 2.9 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum。若 I 为 X 的一个理想, 则 $I_i = I \cap X_i$ 为 X_i 的一个理想。

证明 对 $\forall x, y \in X_i, 1 \in I_i$ 是显然的。若 $x, x \rightarrow y \in I_i$, 即 $x, x \rightarrow y \in I$, 则 $y \in I$, 因此 $y \in I_i$ 。若 $x \in I_i$, 即 $x \in I$, 则 $(x \rightarrow y) \rightarrow y, y \rightarrow x, y \rightarrow (x \rightarrow y) \in I$ 。由于 $x, y \in X_i$, 有 $(x \rightarrow y) \rightarrow y, y \rightarrow x, y \rightarrow (x \rightarrow y) \in X_i$ 。因此, $(x \rightarrow y) \rightarrow y, y \rightarrow x, y \rightarrow (x \rightarrow y) \in I_i$ 。

命题 2.10 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum。若对 $\forall i$, I_i 是 X_i 的一个理想, 则 $\vee I_i$ 是 X 的一个理想。特别地, $\forall i$, I_i 是 X 的一个理想。

证明 对 $\forall x, y \in X$, $1 \in \vee I_i$ 是显然的。设 $x, x \rightarrow y \in \vee I_i$ 。若 $x, x \rightarrow y \in I_i$, 则 $y \in I_i \subset \vee I_i$ 。若 $x \in I_i$, $x \rightarrow y \in I_j$, 则 $y \in I_j \subset \vee I_i$ 。设 $x \in \vee I_i$ 。存在 i 使得 $x \in I_i$ 。若 $y \in X_i$, 则 $(x \rightarrow y) \rightarrow y, y \rightarrow x, y \rightarrow (x \rightarrow y) \in I_i \subset \vee I_i$ 。若 $y \notin X_i$, 则 $(x \rightarrow y) \rightarrow y = y \rightarrow y = 1 \in \vee I_i, y \rightarrow x = x \in I_i \subset \vee I_i, y \rightarrow (x \rightarrow y) = y \rightarrow y = 1 \in \vee I_i$ 。设 $\forall j, i \neq j, I_j = \{1\}$, 则 $\vee I_i = I_i$ 是 X 的理想。

推论 2.11 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum。若对 $\forall i$, I_i 是 X_i 的一个理想, 则 $I = \vee I_i$ 是 X 的理想, 并且 X 的任意理想都是这种形式。

证明 由命题 2.10 可知, I 是 X 的理想。设 I 是 X 的任意理想, 则由命题 2.9 可知, $I_i = I \cap X_i$ 是 X_i 的理想, 且 $I = \vee I_i$ 。

命题 2.12 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum。若 $\theta \subset X \times X$ 是 X 的一个同余, 则 $\theta_i = \theta \cap (X_i \times X_i)$ 是 X_i 的一个同余。

证明 对 $\forall x, y, z \in X_i$, 有 $(x, x) \in X_i \times X_i$ 。由于 θ 是 X 的同余且 $x \in X$, 有 $(x, x) \in \theta$ 。因此, $(x, x) \in \theta_i$ 。若 $(x, y) \in \theta_i \subset \theta$, 则 $(y, x) \in \theta$ 。从而, $(y, x) \in \theta_i$ 。类似地, 若 $(x, y) \in \theta_i, (y, z) \in \theta_i$, 可得 $(x, z) \in \theta_i$ 。故 θ_i 是 X_i 的一个等价关系。若 $(x, y) \in \theta_i \subset \theta$, 则 $(z \rightarrow x, z \rightarrow y), (x \rightarrow z, y \rightarrow z) \in \theta$ 。因此, $(z \rightarrow x, z \rightarrow y), (x \rightarrow z, y \rightarrow z) \in \theta_i$ 。故 θ_i 是 X_i 的一个同余。

命题 2.13 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum。若 θ_i 是 X_i 的一个同余, 且 θ_i 中至少有一个 $[1]_{\theta_i} \neq \{1\}$, 则 $\theta = \cup \theta_i$ 是 X 的一个同余。

证明 首先证 θ 是 X 上的等价关系。事实上, 对 $\forall x \in X$, 则 $\exists i$, 使得 $x \in X_i$, 则 $(x, x) \in \theta_i \subset \theta$, 即 θ 是自反的。设对 $\forall x, y \in X, (x, y) \in \theta$, 则 $\exists \theta_i$, 使得 $(x, y) \in \theta_i$, 则 $(y, x) \in \theta_i \subset \theta$ 。这证明了 θ 是对称的。设 $\forall x, y, z \in X, (x, y) \in \theta$ 且 $(y, z) \in \theta$, 则 $\exists i, j$, 使得 $(x, y) \in \theta_i, (y, z) \in \theta_j$ 。如果 $i = j$, 则 $(x, z) \in \theta_i \subset \theta$ 。如果 $i \neq j$, 则 $(x, y) \in \theta_i \subset X_i \times X_i$, 即 $x, y \in X_i, (y, z) \in \theta_j \subset X_j \times X_j$, 即 $y, z \in X_j$, 因此 $y \in X_i \cap X_j = \{1\}$ 。我们可知 $y = 1$, 则 $x \in [1]_{\theta_i}, z \in [1]_{\theta_j}$ 。由 θ_i 中至少有一个 θ_i 使得 $[1]_{\theta_i} \neq \{1\}$, 则 $x \neq 1, z = 1$ 或 $x = 1, z \neq 1$ 。当 $x \neq 1, z = 1$ 时, $(x, z) = (x, 1) \in \theta_i \subset \theta$ 。当 $x = 1, z \neq 1$ 时, $(x, z) = (1, z) \in \theta_j \subset \theta$ 。由此可知 θ 满足传递性, 则 θ 是 X 上的一个等价关系。设 $(x, y) \in \theta, \forall z \in X$, 则 $\exists i, j$, 使得 $(x, y) \in \theta_i, z \in X_j$ 。当 $i = j$ 时, $(x \rightarrow z, y \rightarrow z), (z \rightarrow x, z \rightarrow y) \in \theta_i \subset \theta$ 。当 $i \neq j$ 时, $(x \rightarrow z, y \rightarrow z) = (z, z) \in \theta, (z \rightarrow x, z \rightarrow y) = (x, y) \in \theta$ 。综上, θ 是 X 上的一个同余。

例 2.2 设集合 $X_1 = \{1, a, b, c\}$, 运算由表 4 给出。可直接验证 (X_1, \rightarrow) 是一个 L -代数, 且 X_1 的哈斯图由图 3 给出。

Table 4. Binary operation of X_1

表 4. X_1 的二元运算

\rightarrow	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	1	1	b	c
b	1	1	1	c
c	1	1	1	1

Figure 3. Hasse of X_1 图 3. X_1 的哈斯图

设 A 是由生成元 p 和 q 满足关系 $pq = p$ 生成的么半群, 则 $A = \{q^m p^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ 。在 A 上存在唯一的自相似 L -代数结构, 其运算定义如下:

$$q^i p^j \rightarrow q^m p^n := \begin{cases} q^m p^{n-j}, & j < n \\ q^{m-i}, & j = n \text{ 且 } i \leq m \\ 1, & j = n \text{ 且 } i > m \\ 1, & j > n \end{cases}.$$

此外, A 是一个 KL -代数。集合 $X_2 = \{1, q, q^2, p\}$ 是 A 的 L -子代数, 且满足序关系 $p < q^2 < q < 1$ 。 X_2 上的运算见表 5。

Table 5. Binary operation of X_2 表 5. X_2 的二元运算

\rightarrow	1	q	q^2	p
1	1	q	q^2	p
q	1	1	q	p
q^2	1	1	1	p
p	1	1	1	1

设 $I_1 = \{1, a, b\}$, $I_2 = \{1, q, q^2\}$, 易证 I_1 是 X_1 的理想, I_2 是 X_2 的理想。则 $X_1/I_1 = \{I_1, [c]\}$, $X_2/I_2 = \{I_2, [p]\}$ 。其中 I_1, I_2 分别为 $X_1/I_1, X_2/I_2$ 的逻辑单位, 但 $I_1 \neq I_2$ 。因此, $\vee(X_i/I_i)$ 不存在。

一般而言, 由于逻辑单位在不同的商代数中可能不同, 因此商代数的 **wedge-sum** 未必存在, 参考例 2.2, 但是我们由命题 2.10 可知, I_i 也是 X 的一个理想, 故商代数 X/I_i 存在, 因此我们有以下命题。

命题 2.14 设 X 是 L -代数 X_i 的 **wedge-sum**, 且 I 是 X 的理想, 设 $I_i = I \cap X_i$, 则映射 $f: X/I_i \rightarrow X/I, [x] \mapsto \bar{x}$ 是满同态, 其中 $[x] \in X/I_i, \bar{x} \in X/I$ 。

证明 对 $\forall [x], [y] \in X/I_i$, 若 $[x] = [y]$, 则 $x \sim_{I_i} y \Leftrightarrow x \rightarrow y, y \rightarrow x \in I_i = I \cap X_i$, 进而 $x \sim_I y$, 因此 $\bar{x} = \bar{y}$ 。这说明了 f 是一个映射。对 $\forall \bar{x} \in X/I$, 存在 $[x] \in X/I_i$ 使得 $f([x]) = \bar{x}$, 则映射 f 为满射。若 $[x], [y] \in X/I_i$, 则 $f([x] \rightarrow [y]) = f([x \rightarrow y]) = \overline{x \rightarrow y} = \bar{x} \rightarrow \bar{y} = f([x]) \rightarrow f([y])$ 。因此, 映射 f 为满同态。

下面我们将要讨论一些 X_i 中的特殊元, 比如素元、稠密元、正则元, 以及与 X_i 的 wedge-sum 之间的关系。

定义 2.4 [8] 设 X 是一个 L -代数。若对所有 $x \in X$, 有 $x \leq p$ 或 $x \rightarrow p \leq p$ 成立, 则称元素 $p \in X \setminus \{1\}$ 是素元。

注 2.2 若 X 是 KL -代数, 则 $x \rightarrow p \leq p$ 蕴含 $x \rightarrow p = p$ 。 X 中所有素元 $p \in X$ 构成的集合记为 $P(X)$ 。

命题 2.15 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum, 则 $\sqcup P(X_i) = P(X)$ 。

证明 对 $\forall p_i \in P(X_i)$, $x \in X$ 。假设 $x \not\leq p_i$ 。若 $x \in X_i$, 则 $x \rightarrow p_i \leq p_i$ 。若 $x \notin X_i$, 则 $x \rightarrow p_i = p_i$, 因此 $p_i \in P(X)$, 这表明 $P(X_i) \subset P(X)$, 进而 $\sqcup P(X_i) \subset P(X)$ 。反之, 对 $\forall p \in P(X) \subset X$, 存在 i 使得 $p \in X_i$ 。对 $x \in X_i \subset X$, 若 $x \not\leq p$, 则 $x \rightarrow p \leq p$, 因此 $p \in P(X_i)$, 从而 $P(X) \subset P(X_i) \subset \sqcup P(X_i)$ 。

定义 2.5 [8] 设 X 是一个 L -代数。若存在 $y \leq x$ 使得 $x \rightarrow y = y$ 成立, 则称元素 $x \in X$ 是稠密元。若对所有稠密元 $y \in X$, 有 $y \rightarrow x = x$ 成立, 则称 x 是正则元。

我们将 X 中所有稠密元构成的集合记为 $D(X)$, 所有正则元构成的集合记为 $R(X)$ 。注意 $D(X) \cap R(X) = \{1\}$ 。

命题 2.16 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum, 则 $\sqcup D(X_i) = D(X)$ 。

证明 对 $\forall x \in \sqcup D(X_i)$, 不失一般性, 设 $x \in D(X_i)$, 则存在 $y \in X_i \subset X$ 且 $y \leq x$ 使得 $x \rightarrow y = y$, 因此 $x \in D(X)$ 。反之, 对 $\forall x \in D(X)$, 设 $x \in X_i$, 则存在 $y \in D(X)$ 且 $y \leq x$ 使得 $y \in X_i$ 且 $x \rightarrow y = y$, 从而 $x \in D(X_i) \subset \sqcup D(X_i)$ 。

命题 2.17 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum, 则 $\sqcup R(X_i) = R(X)$ 。

证明 对 $\forall x \in \sqcup R(X_i)$, 不失一般性, 设 $x \in R(X_i)$ 。于是对 $y \in D(X)$, 若 $y \in X_i$, 则 $y \rightarrow x = x$ 。若 $y \notin X_i$, 则 $y \rightarrow x = x$ 。因此, $x \in R(X)$ 。反之, 对 $\forall x \in R(X)$, 可设 $x \in X_i$, 则对 $y \in D(X_i) \subset D(X)$, 有 $y \rightarrow x = x$, 从而 $x \in R(X_i)$ 。

3. 几类 L -代数的 Wedge-Sum

本节我们主要给出几类特殊的 L -代数的 wedge-sum, 探讨 X_i 与其 wedge-sum 之间的关系, 包括 KL -代数、 CKL -代数、Hilbert 代数、 MV -代数、正交模格、格序效应代数、自相似 L -代数。下面先给出一些相关概念。

定义 3.1 [8] 若 L -代数 X 对 $\forall x, y, z \in X$ 满足:

$$x \rightarrow (y \rightarrow z) = y \rightarrow (x \rightarrow z), \quad (12)$$

则称其为 CKL -代数。

定义 3.2 [9] 若 L -代数 X 是有界的, 且对 $\forall x, y \in X$ 满足

$$(x \rightarrow y)'' = x \rightarrow y'' = x'' \rightarrow y'', \quad (13)$$

$$x \leq y \Rightarrow y \leq (y \rightarrow x) \rightarrow x, \quad (14)$$

则称 X 是蕴涵的。

定义 3.3 [9] 若 L -代数 X 对 $\forall x, y \in X$ 满足以下条件, 则称其为可交换的:

$$y \leq x \rightarrow y, \quad (15)$$

$$(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x. \quad (16)$$

定义 3.4 [9] Hilbert 代数是一个有二元运算 \rightarrow 和常元 1 的集合 X , 且满足以下等式:

$$x \rightarrow x = 1, \quad (17)$$

$$1 \rightarrow x = x, \quad (18)$$

$$x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z), \quad (19)$$

$$(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow x) = (y \rightarrow x) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y). \quad (20)$$

引理 3.1 [9] 每个 Hilbert 代数都是 L -代数。 L -代数 X 是 Hilbert 代数当且仅当它是自分配的, 即 $\forall x, y, z \in X$ 式(19)成立。

定义 3.5 [4] 一个 MV -代数 $(A, \odot, ', 1)$ 是一个 $(2, 1, 0)$ 型代数, 其中 $(A, \odot, 1)$ 是可交换的么半群, 并且 $\forall x, y \in A$, 满足以下等式:

$$x'' = x, \quad (21)$$

$$x \odot 1' = 1', \quad (22)$$

$$x \odot (x \odot y)' = y \odot (y \odot x)'. \quad (23)$$

引理 3.2 [9] 在定义蕴含运算为 $x \rightarrow y := (x \odot y)'$ 的前提下, 每个 MV -代数都是蕴含 L -代数。一个有界 L -代数是 MV -代数当且仅当它是可交换的。

定义 3.6 [4] 一个正交模格 (OML) 是一个正交格 $(L, \leq', 0, 1)$, 其中 $(L, \leq, 0, 1)$ 满足正交模律, 并且 $\forall x, y \in L$, 满足

$$x \leq y \Rightarrow y = x \vee (x' \wedge y). \quad (24)$$

引理 3.3 [9] 在定义蕴含运算为 $x \rightarrow y := (x \wedge y) \vee x'$ 的前提下, 每个正交模格都是蕴含 L -代数。一个有界 L -代数是正交模格当且仅当它满足

$$x' \leq y \Rightarrow y \rightarrow x = x. \quad (25)$$

定义 3.7 [3] 效应代数是一个代数系统 $(E, \oplus, 0, 1)$, 由集合 E 与两个特殊元 $0, 1 \in E$ (分别称为零元和单位元) 以及一个部分定义的二元运算 \oplus 构成, 且对 $\forall p, q, r \in E$ 满足以下条件:

(E1) (交换律) 若 $p \oplus q$ 有定义, 则 $q \oplus p$ 有定义且 $p \oplus q = q \oplus p$ 。

(E2) (结合律) 若 $p \oplus q$ 有定义且 $(p \oplus q) \oplus r$ 有定义, 则 $q \oplus r$ 和 $p \oplus (q \oplus r)$ 有定义且 $p \oplus (q \oplus r) = (p \oplus q) \oplus r$ 。

(E3) (正交补律) 对 $\forall p \in E$, 存在唯一的 $q \in E$ 使得 $p \oplus q$ 有定义且 $p \oplus q = 1$ 。该唯一元 q 记为 p' , 称为 p 的正交补。

(E4) (0-1 律) 若 $p \oplus 1$ 有定义, 则 $p = 0$ 。

设 $(E, \oplus, 0, 1)$ 为一个效应代数。在 E 上定义二元关系:

$p \leq q$ 当且仅当存在 $r \in E$ 使得 $p \oplus r = q$,

该关系称为 E 上的一个偏序, 使得 0 和 1 分别为 E 的最小元与最大元。若偏序集 (E, \leq) 是一个格, 则称 E 为格序效应代数。

引理 3.4 [9] 每个格序效应代数都是蕴涵 L -代数。有界 L -代数是格序效应代数当且仅当 $\forall x \leq y$ 满足

$$x \leq y \rightarrow x, \quad y = (y \rightarrow x) \rightarrow x. \quad (26)$$

格序效应代数的交运算与并运算记为

$$x \wedge y = ((x \rightarrow y) \rightarrow x)', \quad x \vee y = (x' \rightarrow y') \rightarrow x.$$

命题 3.5 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum, 则 X_i 是 Hilbert 代数当且仅当 X 是 Hilbert 代数。

证明 充分性是显然的。反之, 由引理 3.1 可知, 只需验证自分配条件即可。对 $x, y, z \in X$, 若 $x, y, z \in X_i$, 则 $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$ 显然成立。若 $x, y \in X_i, z \in X_j$, 则

$$x \rightarrow (y \rightarrow z) = z = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z),$$

若 $x, z \in X_i, y \in X_j$, 则

$$x \rightarrow (y \rightarrow z) = x \rightarrow z = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z),$$

若 $y, z \in X_i, x \in X_j$, 则

$$x \rightarrow (y \rightarrow z) = y \rightarrow z = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z),$$

若 $x \in X_i, y \in X_j, z \in X_k$, 则

$$x \rightarrow (y \rightarrow z) = z = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z).$$

同理可证以下结论成立。

命题 3.6 对于一族 L -代数 $(X_i)_{i \in \Lambda}$, X_i 是 KL -代数当且仅当 $\vee X_i$ 是 KL -代数。

命题 3.7 对于一族 L -代数 $(X_i)_{i \in \Lambda}$, X_i 是 CKL -代数当且仅当 $\vee X_i$ 是 CKL -代数。

命题 3.8 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum, 则 X_i 是蕴涵的当且仅当 X 是蕴涵的。

命题 3.9 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum, 则 X_i 是可交换的当且仅当 X 是可交换的。

推论 3.10 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum, 则 X_i 是 MV -代数当且仅当 X 是 MV -代数。

证明 由引理 3.2 与命题 3.9 直接可得。

推论 3.11 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum, 则 X_i 是正交模格当且仅当 X 是正交模格。

证明 充分性显然成立。反之, 由引理 3.3 可知, $\forall x, y \in X$, 若 $x, y \in X_i$, 则 $x' \leq y \Rightarrow y \rightarrow x = x$ 。若 $x \in X_i, y \in X_j$, 则 $y \rightarrow x = x$ 恒成立, 得证。

推论 3.12 设 X 是 L -代数 X_i 的 wedge-sum, 则 X_i 是格序效应代数当且仅当 X 是格序效应代数。

证明 充分性显然成立。反之, 由引理 3.4, $\forall x, y \in X$, 若 $x, y \in X_i$, 成立。若 $x \in X_i, y \in X_j$, 则 $x \leq x = y \rightarrow x$, 且 $\forall x \leq y$, 有 $y = 1 = (y \rightarrow x) \rightarrow x$, 得证。

上面几类 wedge-sum L -代数 X , X 的性质完全由 X_i 决定, 但并不是所有的 wedge-sum L -代数都满足这一特性, 比如下文即将论述的自相似 L -代数(self-similar L -代数), 下面我们先介绍自相似性 L -代数的概念。

我们称 L -代数 $(X, \rightarrow, 1)$ 是自相似的[2], 若对 $\forall x \in X$, 左乘映射 $\varepsilon_x: y \mapsto x \rightarrow y$ 诱导一个双射 $\downarrow x \rightarrow X$ 。 ε_x 的逆映射诱导出一个乘法运算 $xy := \varepsilon_y^{-1}(x)$, 该乘法满足结合律。这使得我们可以将自相似 L -代数等式化地描述为一个带有运算 \rightarrow 的么半群, 且该么半群满足以下条件:

$$a \rightarrow ba = b, \tag{27}$$

$$ab \rightarrow c = a \rightarrow (b \rightarrow c), \tag{28}$$

$$(a \rightarrow b)a = (b \rightarrow a)b. \tag{29}$$

公理(27)表明, 作为么半群, 自相似 L -代数是右可消去的。设 X 为一个自相似 L -代数。对 $\forall a, b \in X$, 我们定义

$$a \wedge b := (a \rightarrow b)a. \tag{30}$$

则式(30)定义的运算为下确界, 且对 $\forall a, b, c \in X$, 有

$$a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c). \tag{31}$$

设 X 为一个自相似 L -代数, 则 X 满足

$$a \rightarrow bc = ((c \rightarrow a) \rightarrow b)(a \rightarrow c). \quad (32)$$

定理 3.13 对于自相似 L -代数 X 和 Y , X 与 Y 的 wedge-sum 不是自相似 L -代数。

证明 对 $\forall a \in X \vee Y$, 设左乘映射 $b \mapsto a \rightarrow b$ 诱导一个映射 $\downarrow a \rightarrow X \vee Y$, 则 $a \in X$ 或 $a \in Y$ 。若 $a \in X$ 且 $b \leq a$, 则 $b \in X$, 因此 $a \rightarrow b \in X$ 。从而, 对 $\forall c \in Y$, 不存在 $b \leq a$ 使得 $a \rightarrow b = c$ 。这表明该映射不是满射。

下面我们用一个具体的实例验证定理 3.13。

例 3.1 设 X, Y 是两个格序群, $X \cap Y = \{0\}$, $X_- := \{x \in X \mid x \leq 0\}$, $Y_- := \{y \in Y \mid y \leq 0\}$, 由文献[2]中格序群的负锥是自相似 L -代数, 可得 X_-, Y_- 都是自相似 L -代数。 $\forall x \in X_- \vee Y_-$, 显然映射 $\downarrow x \rightarrow X_- \vee Y_-$ 不是双射。不妨设 $x \in X_-$ 且 $x \neq 0$, 则 $\forall y \in Y_- \subset X_- \vee Y_-$, 由于 X_- 与 Y_- 中元素不可比, 故不存在 $z \in \downarrow x \subset X_-$, 使得 $z \mapsto y$, 因此该映射不是满射。

定理 3.14 设 X 为自相似 L -代数, 则其极大连通 L -子代数只有其本身。

证明 由定理 3.13 可知, 两个及以上自相似 L -代数的 wedge-sum 不是自相似 L -代数。假设任意 L -子代数 X_i 都不是自相似 L -代数, 则存在 $x_i \in X_i$ 使得映射 $\downarrow x_i \rightarrow X_i$ 不是满射, 从而存在 $m_i \in X_i$, 且不存在 $y_i \leq x_i$ 满足 $m_i = x_i \rightarrow y_i$ 。但 X 是自相似 L -代数, 对 $\forall x_i \in X_i \subset X$, 映射 $\downarrow x_i \rightarrow X$ 应为双射, 即对 $m_i \in X_i \subset X$, 存在 $y_i \leq x_i$ 使得 $m_i = x_i \rightarrow y_i$, 矛盾。假设仅有一个 L -子代数 X_i 是自相似 L -代数, 则对 $\forall x_j \in X_j$, 映射 $\downarrow x_j \rightarrow X$ 为满射。于是对 $\forall x_j \in X_j \subset X$, 存在 $y_i \in X_i$ 使得 $x_j = x_i \rightarrow y_i \in X_i$, 因此 $x_j \in X_i \cap X_j = \{1\}$, 即 $x_j = 1$ 。因此 $X_j = \{1\}$ 。这说明了 X 的极大连通 L -子代数只有其本身。

4. L -代数 Wedge-Sum 上的拓扑

文献[10]利用效应代数上的每一个弱理想均可诱导出效应代数上的一个一致拓扑。受此启发, 并结合引理 3.4 所揭示的 L -代数与格序效应代数之间的联系, 本节将采用类似的方法在 L -代数上构造一致拓扑。为此, 我们先回顾一致拓扑的相关概念与基本性质。

设 X 是一个集合, $U, V \subset X \times X$, 定义

$$U \circ V = \{(x, z) \mid \text{存在 } y \in X, \text{使得 } (x, y) \in U \text{ 且 } (y, z) \in V\};$$

$$U^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in U\}.$$

对每个 $y \in X$, 记

$$U(y) = \{x \mid (y, x) \in U\},$$

并记

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

定义 4.1 [11] 集合 X 上的一致空间是 $X \times X$ 的子集构成的非空族 \mathcal{U} , 满足下述条件:

- (U1) 对 $\forall U \in \mathcal{U}$, 有 $\Delta \subset U$ 。
- (U2) 若 $U \in \mathcal{U}$, 则 $U^{-1} \in \mathcal{U}$ 。
- (U3) 若 $U \in \mathcal{U}$, 则存在 $V \in \mathcal{U}$ 使得 $V \circ V \subset U$ 。
- (U4) 若 $U, V \in \mathcal{U}$, 则 $U \cap V \in \mathcal{U}$ 。
- (U5) 若 $U \in \mathcal{U}$ 且 $U \subset V \subset X \times X$, 则 $V \in \mathcal{U}$ 。

一致空间 \mathcal{U} 的一个子集族 \mathcal{B} 是 \mathcal{U} 的基, 当且仅当对 $\forall U \in \mathcal{U}$, 存在 $V \in \mathcal{B}$, 使得 $V \subset U$ 。若 \mathcal{B} 是 \mathcal{U}

的基, 则 \mathcal{B} 完全决定 \mathcal{U} : 对于 $X \times X$ 的子集 U , $U \in \mathcal{U}$ 当且仅当存在 $V \in \mathcal{B}$, 使得 $V \subset U$ 。

引理 4.1 [11] $X \times X$ 的子集构成的非空族 \mathcal{B} 是 X 上某个一致空间的基, 当且仅当满足:

- (a) 对 $\forall U \in \mathcal{B}$, 有 $\Delta \subset U$;
- (b) 若 $U \in \mathcal{B}$, 则存在 $V \in \mathcal{B}$, 使得 $V \subset U^{-1}$;
- (c) 若 $U \in \mathcal{B}$, 则存在 $V \in \mathcal{B}$, 使得 $V \circ V \subset U$;
- (d) 对 $\forall U, V \in \mathcal{B}$, 存在 $W \in \mathcal{B}$, 使得 $W \subset U \cap V$ 。

给定一个集合 X 上的一个一致空间 \mathcal{U} , 我们可以定义 X 上的一个拓扑 τ , 使得对于每个点 $x \in X$, 它的邻域系由以下方式给出:

$$\{U[x] \mid U \in \mathcal{U}\}$$

其中:

$$U[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in U\}$$

这个拓扑称为由一致空间 \mathcal{U} 诱导的拓扑。

引理 4.2 [11] 若 \mathcal{B} 是一致空间 \mathcal{U} 的基, 则对 $\forall x \in X$, 集族 $\{U[x] \mid U \in \mathcal{B}\}$ 是 x 的邻域系的基。

引理 4.3 [11] 设 X 是拓扑空间。任给 $x \in X$, $\mathcal{N}(x)$ 记为 x 的邻域系。则

- (N1) $\forall x \in X$, $X \in \mathcal{N}(x)$ 。
- (N2) $\forall U \in \mathcal{N}(x)$, $x \in U$ 。
- (N3) 如果 $U \in \mathcal{N}(x)$, $U \subset V$, 则 $V \in \mathcal{N}(x)$ 。
- (N4) 如果 $U, V \in \mathcal{N}(x)$, 则 $U \cap V \in \mathcal{N}(x)$ 。
- (N5) 任给 $U \in \mathcal{N}(x)$, 存在 $V \in \mathcal{N}(x)$ 使得 $V \subset U$ 并且对任意 $y \in V$, $U \in \mathcal{N}(y)$ 。

引理 4.4 [11] 设 X 是一个集合, 任给 $x \in X$, $\mathcal{N}(x)$ 是 X 的子集族。若 $\{\mathcal{N}(x) \mid x \in X\}$ 满足引理 4.3 中的条件(N1)~(N5), 则存在 X 上唯一拓扑 τ 使得任给 $x \in X$, $\mathcal{N}(x)$ 是 x 在 (X, τ) 中的邻域系。

下面我们讨论 L -代数上的一致拓扑。

设 $(X, \rightarrow, 0, 1)$ 是一个 L -代数, \mathcal{I} 为 X 的满足有限交性质的任意理想族且 $\mathcal{I} \neq \{X\}$ 。下文若无特别说明, \mathcal{I} 均满足上述条件。对每个理想 $I \in \mathcal{I}$, 记

$$U_I = \{(x, y) \mid (x, y) \in X \times X \text{ 且 } x \rightarrow y, y \rightarrow x \in I\}.$$

命题 4.5 设 I 和 J 是 L -代数 $(X, \rightarrow, 0, 1)$ 的理想, 则

- (1) $\Delta = U_1$, 其中 $\{1\}$ 表示 L -代数 $(X, \rightarrow, 0, 1)$ 的理想 $\{1\}$ 。
- (2) 若 $I \subset J$, 则 $U_I \subset U_J$; 显然, 对 $\forall I$ 有 $\Delta \subset U_I$ 。
- (3) $U_I = U_I^{-1}$ 。
- (4) $U_I \cap U_J = U_{I \cap J}$ 。
- (5) $U_I \cup U_J \subset U_I \circ U_J$ 。
- (6) $U_I \circ U_I = U_I$ 。

证明 (1) $(x, y) \in U_1 \Leftrightarrow x \rightarrow y = 1$ 且 $y \rightarrow x = 1 \Leftrightarrow (x, y) \in \Delta$ 。

(2)和(3)可由定义直接推出。

(4) $(x, y) \in U_I \cap U_J \Leftrightarrow (x, y) \in U_I$ 且 $(x, y) \in U_J \Leftrightarrow x \rightarrow y, y \rightarrow x \in I$ 且 $x \rightarrow y, y \rightarrow x \in J \Leftrightarrow x \rightarrow y, y \rightarrow x \in I \cap J \Leftrightarrow (x, y) \in U_{I \cap J}$ 。

(5) 若 $(x, y) \in U_I$, 由(2)得 $(y, y) \in \Delta \subset U_J$, 因此 $(x, y) \in U_I \circ U_J$, 则 $U_I \subset U_I \circ U_J$ 。同理可得

$U_j \subset U_i \circ U_j$, 故 $U_i \cup U_j \subset U_i \circ U_j$ 。

(6) 由(5)可得 $U_i = U_i \cup U_i \subset U_i \circ U_i$ 。反之, 若 $(x, z) \in U_i \circ U_i$, 则存在 $y \in X$ 使得 $(x, y) \in U_i$ 且 $(y, z) \in U_i$, 故 $x \rightarrow y, y \rightarrow x \in I$ 且 $y \rightarrow z, z \rightarrow y \in I$ 。进而有 $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z) = (y \rightarrow x) \rightarrow (y \rightarrow z) \in I$, 根据理想的定义可得 $x \rightarrow z \in I$ 。同理可证 $z \rightarrow x \in I$ 。因此 $(x, z) \in U_i$, 则 $U_i \circ U_i \subset U_i$ 。故 $U_i \circ U_i = U_i$ 。

注 4.1 设 $y \in X$ 且 $U \in \mathcal{B}$, 考虑集合 $U(y) = \{x \in X \mid (y, x) \in U\}$ 。显然, 若 $U \subset V$, 则 $U(y) \subset V(y)$ 。事实上, 若 $x \in U(y)$, 则 $(y, x) \in U$, 又由 $U \subset V$ 得 $(y, x) \in V$, 故 $x \in V(y)$ 。

命题 4.6 设 \mathcal{I} 是 L -代数 $(X, \rightarrow, 0, 1)$ 的一个满足有限交性质的理想族, 且 $\mathcal{K}_0 = \{U_i \mid I \in \mathcal{I}\}$, 则

$$\mathcal{K} = \{V \subset X \times X \mid \exists U_i \in \mathcal{K}_0, U_i \subset V\}$$

是 L -代数 $(X, \rightarrow, 0, 1)$ 上的一个一致空间, 且

$$\mathcal{B} = \{U_i[x] \mid I \in \mathcal{I}, x \in X\}$$

是由一致空间 \mathcal{K} 诱导的 X 上的一致拓扑 τ 的关于 x 的一组邻域基。

证明 先证 \mathcal{K} 是一致空间。对 $\forall U, V \in \mathcal{K}$, 存在 $U_i, U_j \in \mathcal{K}_0$ 使得 $U_i \subset U, U_j \subset V$ 。由命题 4.5 知 $\Delta \subset U_i$, 故 $\Delta \subset U$, 即(U1)成立。由 $U_i^{-1} \subset U^{-1}$ 及 $U_i = U_i^{-1}$ 得 $U_i \subset U^{-1}$, 故 $U^{-1} \in \mathcal{K}$, 即(U2)成立。显然 $U_i \in \mathcal{K}$, 故 $U_i \circ U_i = U_i \subset U$, 即(U3)成立。由 $U_{i \cap j} = U_i \cap U_j \subset U \cap V$ 可直接得(U4)成立。(U5)显然成立。

下证 \mathcal{B} 是拓扑 τ 的一组邻域基。由引理 4.2 知, 只需证明 $\mathcal{T} = \{U_i \mid I \in \mathcal{I}\}$ 是 \mathcal{K} 的一组基。 $\forall U_i \in \mathcal{T}$, 显然 $\Delta \subset U_i$ 。设 $U_i \in \mathcal{T}$, 存在 $U_j \in \mathcal{T}$ 使得 $U_j \subset U_i^{-1}$, $U_i \circ U_j \subset U_i$ 。 $\forall U_i, U_j \in \mathcal{T}$, 其中 $I, J \in \mathcal{I}$, 存在 $U_{I \cap J} \in \mathcal{T}$, 使得 $U_{I \cap J} \subset U_i \cap U_j$ 。

下面我们讨论一致拓扑 τ 上的一些性质。

性质 1 对 $\forall I \in \mathcal{I}$, 有 $a \in I$ 当且仅当 $U_i[a] = I$ 。

证明 设 $a \in I$ 且 $x \in U_i[a]$, 则 $x \rightarrow a, a \rightarrow x \in I$ 。因为 I 是理想, 故 $x \in I$ 。若 $x \in I$, 则 $x \rightarrow a, a \rightarrow x \in I$, 从而 $x \in U_i[a]$ 。因此 $U_i[a] = I$ 。反之, 由 $(a, a) \in \Delta \subset U_i$ 得 $a \in U_i[a]$, 故 $a \in I$ 。

性质 2 对 $\forall a \in X$, $I \in \mathcal{I}$, $U_i[a]$ 是 X 的一致拓扑 τ 上的既开又闭子集。

证明 先证 $(U_i[a])^c$ 是开集。若 $x \in (U_i[a])^c$, 则 $x \notin U_i[a]$ 。设 $y \in U_i[x]$, 则必有 $y \in (U_i[a])^c$, 否则若 $y \in U_i[a]$, 则 $(a, y) \in U_i$ 。由 $(x, y) \in U_i$ 及 $x \rightarrow y \in I$, 利用同余关系可得 $(a, x) \in U_i$, 矛盾。因此对 $\forall x \in (U_i[a])^c$, 有 $U_i[x] \subset (U_i[a])^c$, 从而

$$\bigcup_{x \in (U_i[a])^c} U_i[x] = (U_i[a])^c,$$

故 $(U_i[a])^c$ 是开集, 进而 $U_i[a]$ 是闭集。另一方面, 由定义知 $U_i[a]$ 显然是开集, 因此 $U_i[a]$ 是 X 的既开又闭子集。

接下来我们讨论一致拓扑 τ 上的连续性。

若偏序集 (Λ, \preceq) 满足: 对 $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$, 存在 $\gamma \in \Lambda$ 使得 $\alpha \preceq \gamma$ 且 $\beta \preceq \gamma$, 则称其为定向集。设 (Λ, \preceq) 为定向集, X 为 L -代数, X 中的网记为 $(a_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, 其中 $\forall \alpha \in \Lambda, a_\alpha \in X$ 。设 (X, τ) 是一个拓扑空间, $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是 X 的一个网, $a \in X$, 如果对 $\forall a$ 的邻域 $U(x)$, 存在 ε_0 , 使得 $\forall \alpha \in \Lambda, \alpha \geq \varepsilon_0$, 有 $a_\alpha \in U(x)$, 则称该网 τ 收敛于点 a , 记为 $a_\alpha \xrightarrow{\tau} a$ 。

定理 4.7 设 $(X, \rightarrow, 0, 1)$ 是 L -代数。若 X 中的网 $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 按拓扑 τ 收敛于点 a , 则网 $\{b \rightarrow a_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 按拓扑 τ 收敛于 $b \rightarrow a$ 。

证明 只需讨论 $b \rightarrow a$ 的邻域 $U_i[b \rightarrow a]$ 即可。设 I 是 X 的一个理想, $U_i[b \rightarrow a]$ 是 $b \rightarrow a$ 的一个邻域, 则 $U_i[a]$ 是 a 的一个邻域。由网 $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 按拓扑 τ 收敛于 a 知, 存在 $\alpha_0 \in \Lambda$, 使得对 $\forall \alpha \geq \alpha_0$, 有 $a_\alpha \in U_i[a]$,

即 $a \rightarrow a_\alpha, a_\alpha \rightarrow a \in I$ 。于是 $(b \rightarrow a_\alpha) \rightarrow (b \rightarrow a) = (a_\alpha \rightarrow b) \rightarrow (a_\alpha \rightarrow a) \in I$ 。同理可得 $(b \rightarrow a) \rightarrow (b \rightarrow a_\alpha) \in I$ 。因此网 $\{b \rightarrow a_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 按拓扑 τ 收敛于 $b \rightarrow a$ 。

定理 4.8 设 $(X, \rightarrow, 0, 1)$ 是一个 L -代数。若 X 中的网 $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 按拓扑 τ 收敛于点 a , 则网 $\{a_\alpha \rightarrow b\}_{\alpha \in \Lambda}$ 按拓扑 τ 收敛于 $a \rightarrow b$ 。

证明 只需讨论 $a \rightarrow b$ 的邻域 $U_I[a \rightarrow b]$ 即可。设 I 是 X 的一个理想, $U_I[a \rightarrow b]$ 是 $a \rightarrow b$ 的一个邻域, 则 $U_I[a]$ 是 a 的一个邻域。由网 $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 按拓扑 τ 收敛于 a 知, 存在 $\alpha_0 \in \Lambda$, 使得对 $\forall \alpha \geq \alpha_0$, 有 $a_\alpha \in U_I[a]$, 即 $a_\alpha \rightarrow a, a \rightarrow a_\alpha \in I$ 。于是 $((a_\alpha \rightarrow a) \rightarrow (a_\alpha \rightarrow b)) \rightarrow (a \rightarrow b) = ((a \rightarrow a_\alpha) \rightarrow (a \rightarrow b)) \rightarrow (a \rightarrow b) \in I$ 。由推论 2.1 可得 $(a_\alpha \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b) \in I$ 。同理可证 $(a \rightarrow b) \rightarrow (a_\alpha \rightarrow b) \in I$ 。这证明了网 $\{a_\alpha \rightarrow b\}_{\alpha \in \Lambda}$ 按拓扑 τ 收敛于 $a \rightarrow b$ 。

推论 4.9 当 $\mathcal{I} = \{I\}$ 时, 其中 I 为 L -代数的一个理想, 则 \mathcal{I} 满足有限交性质。由文献[12]可知 L -代数的理想与格序效应代数中的 Riesz 理想等价, 由此我们从另一角度给出了文献[10]中定理 4.5 及定理 4.7 的证明, 即格序效应代数中的 \wedge 和 \vee 运算关于由格序效应代数中的 Riesz 理想诱导的一致拓扑是连续的。

下面我们讨论 wedge-sum $\vee X_i$ 上的一致拓扑与 X_i 上的一致拓扑之间的关系。

定理 4.10 设 I 为 wedge-sum L -代数 $X = \vee X_i$ 的理想, $I_i = I \cap X_i$ 。设由 I 诱导的 X 上的一致拓扑记为 τ , I_i 诱导的 X_i 上的一致拓扑记为 τ_i , 则 $\tau = \vee \tau_i$ 。

证明 由引理 4.4, 只需证明 $\forall x \in X, U_I[x] = \cup U_{I_i}[x]$ 。由性质 1, 当 $x \in I$ 时, $U_I[x] = I$, 则 $U_I[x] = I = U_I[1] = \cup U_{I_i}[1]$ 。当 $x \notin I$ 时, 则对 $\forall i, x \notin I_i$, 设 $y \in U_I[x], x \in X_i$, 则 $y \in X_i$ 。事实上, 假设 $y \notin X_i$, 则 $x \rightarrow y = y, y \rightarrow x = x$ 。由 $y \in U_I[x]$ 可知, $x \rightarrow y, y \rightarrow x \in I$, 即 $x, y \in I$, 矛盾, 则 $x, y \in X_i$, 因此 $x \rightarrow y, y \rightarrow x \in X_i \cap I = I_i$ 。由此可知, $y \in U_{I_i}[x]$ 。因此, $U_I[x] \subset \cup U_{I_i}[x]$ 。显然 $U_{I_i}[x] \subset U_I[x]$, 因为 $I_i \subset I$, 则 $U_I[x] = U_{I_i}[x]$ 。由 $\forall i \neq j, U_{I_j}[x] = \{x\}$, 则 $U_I[x] = \cup U_{I_i}[x]$ 。

5. 结论

本文围绕着 wedge-sum L -代数 $\vee X_i$ 与各 X_i 之间的关系进行了深入探究。首先, 给出了 wedge-sum L -代数 $\vee X_i$ 的子代数与各 X_i 子代数之间的关系。证明了 wedge-sum L -代数 $\vee X_i$ 的理想被 X_i 的理想决定, 并且 wedge-sum $\vee X_i$ 上的同余由满足特定条件的 X_i 上的同余决定。其次, 给出了几类性质完全由 X_i 的性质所决定的特殊的 L -代数 wedge-sum $\vee X_i$, 有 Hilbert 代数、 MV -代数、正交模格、格序效应代数, 并证明了自相似 L -代数不满足这一特性。最后, 讨论了 L -代数上一致拓扑的连续以及 L -代数 wedge-sum $\vee X_i$ 上的一致拓扑与 X_i 上的一致拓扑之间的关系。

本文的研究丰富了 L -代数 wedge-sum 的相关理论, 接下来可以进一步研究 wedge-sum L -代数上一致拓扑的相关性质, 比如分离性、连通性、分离公理等, 还可以研究 wedge-sum L -代数上是否存在其它的拓扑。

基金项目

河北地质大学 2025 年度省属高等学校基本科研业务费研究项目: QN25019。

参考文献

- [1] Rump, W. (2005) A Decomposition Theorem for Square-Free Unitary Solutions of the Quantum Yang-Baxter Equation. *Advances in Mathematics*, **193**, 40-55. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2004.03.019>
- [2] Rump, W. (2008) L -Algebras, Self-Similarity, and L -Groups. *Journal of Algebra*, **320**, 2328-2348. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.05.033>
- [3] Wu, Y., Wang, J. and Yang, Y. (2019) Lattice-Ordered Effect Algebras and L -Algebras. *Fuzzy Sets and Systems*, **369**,

-
- 103-113. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2018.08.013>
- [4] Wu, Y. and Yang, Y. (2020) Orthomodular Lattices as L-Algebras. *Soft Computing*, **24**, 14391-14400. <https://doi.org/10.1007/s00500-020-05242-7>
- [5] 郑冉. L-代数的子结构及其相关性质研究[D]: [硕士学位论文]. 西安: 陕西师范大学, 2022.
- [6] Rump, W. (2020) Symmetric Quantum Sets and L-Algebras. *International Mathematics Research Notices*, **2022**, 1770-1810. <https://doi.org/10.1093/imrn/rnaa135>
- [7] Ruan, X. and Liu, X. (2023) On the Cancellation Problem for L-Algebras. *Journal of Algebra and Its Applications*, **23**, Article ID: 2550006. <https://doi.org/10.1142/s0219498825500069>
- [8] Rump, W. (2023) L-Algebras and Topology. *Journal of Algebra and Its Applications*, **22**, Article ID: 2350034. <https://doi.org/10.1142/s0219498823500342>
- [9] Rump, W. (2022) L-Algebras and Three Main Non-Classical Logics. *Annals of Pure and Applied Logic*, **173**, Article ID: 103121. <https://doi.org/10.1016/j.apal.2022.103121>
- [10] Luo, Q.J. and Wang, G.J. (2015) Weakly Algebraic Ideal Topology of Effect Algebras. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **31**, 787-796. <https://doi.org/10.1007/s10114-015-3594-0>
- [11] Kelley, J.L. (2017) *General Topology*. Courier Dover Publications.
- [12] 尹丽云, 钟晨, 吴雅丽. 关于L-代数中理想的一些注记[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2025, 48(2): 270-278.