Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(4), 136-141
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.164098

Hans汉斯

调和Bergman空间上几个特殊Toeplitz算子的零积问题

赵子仪，卢雨彤

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2026年3月14日；录用日期：2026年4月11日；发布日期：2026年4月23日

摘　要

本文对调和Bergman空间上几个特殊Toeplitz算子零积问题进行讨论，给出几个Toeplitz算子乘积为0的充分必要条件描述。

关键词

调和Bergman空间，Toeplitz算子，零积

The Zero Product Problem of Several Special Toeplitz Operators on the Harmonic Bergman Space

Ziyi Zhao, Yutong Lu

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: March 14, 2026; accepted: April 11, 2026; published: April 23, 2026

Abstract

This paper discusses the zero-product problem for several special Toeplitz operators on the harmonic Bergman space, and presents necessary and sufficient conditions for the product of several Toeplitz operators to be zero.

Keywords

Harmonic Bergman Space, Toeplitz Operator, Zero Product

文章引用: 赵子仪, 卢雨彤. 调和 Bergman 空间上几个特殊 Toeplitz 算子的零积问题[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 136-141. DOI: 10.12677/pm.2026.164098

1. 引言

调和 Bergman 空间 b^2 是 $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 中所有复值调和函数构成的 Hilbert 空间。不难验证如下关系式：$b^2=L_a^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)+\overline{L_a^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)}$，其中 $L_a^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 表示 Bergman 空间。众所周知，调和 Bergman 空间 b^2 是 $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 的闭子空间，因而是一个 Hilbert 空间。用 Q 表示从 $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 到 b^2 的正交投影。对每个 $z\in\mathbb{D}$，存在 b^2 中唯一的函数 R_z (称为调和 Bergman 核)，对所有 $u\in b^2$，满足如下再生性质：

$$u(z)=\langle u,R_z\rangle.$$

记号 $\langle,\rangle$ 表示 $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 上的内积。由 $b^2=L_a^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)+\overline{L_a^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)}$ 可知，调和 Bergman 核函数 R_z 与熟知的 Bergman 核 K_z 之间满足简单关系：$R_z=K_z+\overline{K_z}-1$。因此，R_z 的表达式为

$$R_z(w)=\frac{1}{(1-w\overline{z})^2}+\frac{1}{(1-\overline{w}z)^2}-1,\quad z,w\in\mathbb{D}.$$

由以上两式可得对于函数 $\varphi\in L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$，投影算子 Q 的如下积分表示：

$$Q\varphi(z)=\int_{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{(1-w\overline{z})^2}+\frac{1}{(1-\overline{w}z)^2}-1\right)\varphi(w)\mathrm{d}A(w),\ z\in\mathbb{D}.$$

对于 $u\in L^\infty(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$，以 u 为符号的 Toeplitz 算子 T_u 定义为：

$$T_uf=Q(uf),$$

其中 $f\in b^2$。

算子的零积问题是算子理论中的一个非常重要的问题，而 Toeplitz 算子的零积问题是这一问题的具体化，对于推动这一问题的研究十分具有意义，因此吸引众多学者的研究。本篇论文基于文献[1]的定理展开以 $\overline{z}f$ 和多项式为符号的 Toeplitz 算子零积问题和交换性问题的研究，其中 f 为开单位圆盘上的有界解析函数。有关调和 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子零积问题的更多信息和结果，请参阅[2]-[5]。

2. Toeplitz 算子的零积

引理 1 在 $L_a^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 中，设 n,m 为非负整数，

$$P(z^n\overline{z}^m)=\begin{cases}\dfrac{n-m+1}{n+1}z^{n-m}, & n\ge m;\\ 0, & n<m.\end{cases}$$

直接计算可得结论。

引理 2 [1] 设 $f\in L_a^2(\mathbb{D},\mathrm{d}A)$ 并且假设 $f(0)=0$。那么对于所有的 $z\in\mathbb{D}$ 下面陈述成立：

(a) $P(\overline{w}f)(z)=\dfrac{1}{z}f(z)-\dfrac{1}{z^2}\int_0^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$。

(b) $P(w\overline{f})(z)=\overline{P(\overline{w}f)(0)}=\dfrac{1}{2}\overline{f'(0)}$。

下述定理证明为主要结果。

定理 3 若 $f\in H^{\infty}(\mathbb{D}),m,n\in\mathbb{N}$。如果在 b^2 中，$T_{\overline{z}f}T_{\overline{z}^m z^n}=0$，那么 f 恒为 0。

证明：因为 $T_{\overline{z}f}T_{\overline{z}^m z^n}=0$，那么 $T_{\overline{z}f}T_{\overline{z}^m z^n}\left(z^p\right)=0,p\geq 0$。特别，当 p 是充分大的正整数时，根据引理 1 有

$$
\begin{aligned}
0=T_{\overline{z}f}T_{\overline{z}^m z^n}\left(z^p\right)&=T_{\overline{z}f}Q\left(\overline{z}^m z^{n+p}\right)\\
&=T_{\overline{z}f}\left[P\left(\overline{z}^m z^{n+p}\right)+\overline{P\left(z^m\overline{z}^{n+p}\right)}-P\left(\overline{z}^m z^{n+p}\right)(0)\right]\\
&=T_{\overline{z}f}\left(\frac{n+p-m+1}{n+p+1}z^{n+p-m}+0-0\right).
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
T_{\overline{z}f}\left(z^{n+p-m}\right)&=Q\left(\overline{z}fz^{n+p-m}\right)\\
&=P\left(\overline{z}fz^{n+p-m}\right)+\overline{P\left(z\overline{f}\overline{z}^{n+p-m}\right)}-P\left(\overline{z}fz^{n+p-m}\right)(0)\\
&=P\left(\overline{z}fz^{n+p-m}\right)+0-0.
\end{aligned}
$$

由于 p 是充分大的正整数，所以$\left[f(z)z^{n+p-m}\right](0)=0$，根据引理 2 得

$$
P\left(\overline{z}fz^{n+p-m}\right)=\frac{1}{z}f(z)z^{n+p-m}-\frac{1}{z^2}\int_0^z f(\zeta)\zeta^{n+p-m}\mathrm{d}\zeta=0,
$$

化简得

$$
f(z)z^{n+p-m+1}=\int_0^z f(\zeta)\zeta^{n+p-m}\mathrm{d}\zeta,
$$

等式两边进行求导得

$$
(n+p-m+1)f(z)z^{n+p-m}+f'(z)z^{n+p-m+1}=f(z)z^{n+p-m},
$$

那么

$$
(n+p-m)f(z)+zf'(z)=0,
$$

即

$$
f(z)=-\frac{zf'(z)}{n+p-m},
$$

令 $p\to\infty$ 时，得到 $f(z)=0$。

定理 4 令 $f\in H^{\infty}(\mathbb{D}),n\in\mathbb{N}$。在 b^2 中，如果 $T_{\overline{z}z^n}T_{\overline{z}f}T_{\overline{z}z^n}=0$，那么 f 恒为 0。

证明：由 $T_{\overline{z}z^n}T_{\overline{z}f}T_{\overline{z}z^n}=0$，所以 $T_{\overline{z}z^n}T_{\overline{z}f}T_{\overline{z}z^n}\left(z^p\right)=0$。当 p 是充分大的正整数时，由引理 1 得

$$
\begin{aligned}
0=T_{\overline{z}z^n}T_{\overline{z}f}T_{\overline{z}z^n}\left(z^p\right)&=T_{\overline{z}z^n}T_{\overline{z}f}Q\left(\overline{z}z^{n+p}\right)\\
&=T_{\overline{z}z^n}T_{\overline{z}f}\left[P\left(\overline{z}z^{n+p}\right)+\overline{P\left(z\overline{z}^{n+p}\right)}-P\left(\overline{z}z^{n+p}\right)(0)\right]\\
&=T_{\overline{z}z^n}T_{\overline{z}f}\left(\frac{n+p}{n+p+1}z^{n+p-1}+0-0\right)\\
&=\frac{n+p}{n+p+1}T_{\overline{z}z^n}P\left(\overline{z}fz^{n+p-1}\right).
\end{aligned}
$$

当 p 是充分大的正整数时，又根据引理 2 得

$$T_{\bar{z}z^n}\left[f(z)z^{n+p-2}-\frac{1}{z^2}\int_0^z f(\zeta)\zeta^{n+p-1}\mathrm{d}\zeta\right]=0,$$

则有

$$\begin{aligned}0&=Q\left[\bar{z}z^n\left(f(z)z^{n+p-2}-\frac{1}{z^2}\int_0^z f(\zeta)\zeta^{n+p-1}\mathrm{d}\zeta\right)\right]\\&=P\left[\bar{z}\left(f(z)z^{2n+p-2}-z^{n-2}\int_0^z f(\zeta)\zeta^{n+p-1}\mathrm{d}\zeta\right)\right]\\&\quad+\overline{P\left[z\left(\overline{f(z)}\bar{z}^{2n+p-2}-\bar{z}^{n-2}\overline{\int_0^z f(\zeta)\zeta^{n+p-1}\mathrm{d}\zeta}\right)\right]}\\&\quad-P\left[\bar{z}\left(f(z)z^{2n+p-2}-z^{n-2}\int_0^z f(\zeta)\zeta^{n+p-1}\mathrm{d}\zeta\right)\right](0)\\&=P\left[\bar{z}\left(f(z)z^{2n+p-2}-z^{n-2}\int_0^z f(\zeta)\zeta^{n+p-1}\mathrm{d}\zeta\right)\right]+0-0.\end{aligned}$$

令 $F(z)=z^{n-1}f(z)z^{n+p-1}-z^{n-2}\int_0^z f(\zeta)\zeta^{n+p-1}\mathrm{d}\zeta$，由 p 是充分大的正整数得，$F(z)$ 解析，根据引理 2 得

$$P(\bar{z}F(z))=\frac{1}{z}F(z)-\frac{1}{z^2}\int_0^z F(\eta)\mathrm{d}\eta=0,$$

即

$$\begin{aligned}&\frac{1}{z}\left(z^{2n+p-2}f(z)-z^{n-2}\int_0^z f(\zeta)\zeta^{n+p-1}\mathrm{d}\zeta\right)\\&=\frac{1}{z^2}\int_0^z\left[\eta^{2n+p-2}f(\eta)-\eta^{n-2}\int_0^\eta f(\zeta)\zeta^{n+p-1}\mathrm{d}\zeta\right]\mathrm{d}\eta,\end{aligned}$$

将上式两边同时乘以 z^2，并进行化简得

$$\begin{aligned}&z^{2n+p-1}f(z)-z^{n-1}\int_0^z f(\zeta)\zeta^{n+p-1}\mathrm{d}\zeta\\&=\int_0^z\left[\eta^{2n+p-2}f(\eta)-\eta^{n-2}\int_0^\eta f(\zeta)\zeta^{n+p-1}\mathrm{d}\zeta\right]\mathrm{d}\eta,\end{aligned}$$

将上式进行求导得

$$\begin{aligned}&(2n+p-1)z^{2n+p-2}f(z)+z^{2n+p-1}f'(z)-(n-1)z^{n-2}\int_0^z f(\zeta)\zeta^{n+p-1}\mathrm{d}\zeta-z^{2n+p-2}f(z)\\&=z^{2n+p-2}f(z)-z^{n-2}\int_0^z f(\zeta)\zeta^{n+p-1}\mathrm{d}\zeta,\end{aligned}$$

当 $n\le1$ 时，等式两边乘以 z^{2-n}；若 $n\ge2$ 时，提取公因式等式 z^{n-2}，移项并由解析函数唯一性定理约掉 z^{n-2}，再移项有

$$(2n+p-3)z^{n+p}f(z)+z^{n+p+1}f'(z)=(n-2)\int_0^z f(\zeta)\zeta^{n+p-1}\mathrm{d}\zeta,$$

再次求导得

$$\begin{aligned}&(2n+p-3)(n+p)z^{n+p-1}f(z)+(2n+p-3)z^{n+p}f'(z)+(n+p+1)z^{n+p}f'(z)+z^2f''(z)\\&=(n-2)f(z)z^{n+p-1},\end{aligned}$$

化简求得

$$f(z)=\frac{(3n+2p-2)zf'(z)+z^2f''(z)}{-p^2-3(n-1)p-2n^2+4n-2},$$

当令 $p\to\infty$ 时，得到 $f(z)=0$。

定理 5 设 $f,g\in H^{\infty}(\mathbb{D}),n,t\in\mathbb{N}$。在 b^2 上，有

(1) 当 $n=t$，$T_{\overline{z}f}T_{\overline{z}z^n}=T_{\overline{z}g}T_{\overline{z}z^t}$ 当且仅当 $f(z)=g(z)$。

(2) 当 $n\neq t$，$T_{\overline{z}f}T_{\overline{z}z^n}=T_{\overline{z}g}T_{\overline{z}z^t}$ 当且仅当 $f(z)=g(z)\equiv 0$。

证明：充分性显然，下证必要性。设 p 是一个充分大的正整数，由引理 1 可得

$$\begin{aligned}T_{\overline{z}z^n}\left(z^p\right)&=Q\left(\overline{z}z^{n+p}\right)=P\left(\overline{z}z^{n+p}\right)+\overline{P\left(z\overline{z}^{n+p}\right)}-P\left(\overline{z}z^{n+p}\right)(0)\\&=\frac{n+p}{n+p+1}z^{n+p-1}+0-0.\end{aligned}$$

又由引理 1 和引理 2 可得

$$\begin{aligned}T_{\overline{z}f}\left(\frac{n+p}{n+p+1}z^{n+p-1}\right)&=\frac{n+p}{n+p+1}Q\left(\overline{z}fz^{n+p-1}\right)\\&=\frac{n+p}{n+p+1}\left[P\left(\overline{z}fz^{n+p-1}\right)+\overline{P\left(z\overline{f}\overline{z}^{n+p-1}\right)}-P\left(\overline{z}fz^{n+p-1}\right)(0)\right]\\&=\frac{n+p}{n+p+1}\left(z^{n+p-2}f(z)-\frac{1}{z^2}\int_0^z\zeta^{n+p-1}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right).\end{aligned}\tag{1}$$

同理可得

$$T_{\overline{z}g}T_{\overline{z}z^t}\left(z^p\right)=\frac{t+p}{t+p+1}\left(z^{t+p-2}g(z)-\frac{1}{z^2}\int_0^z\zeta^{t+p-1}g(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right).\tag{2}$$

由 $T_{\overline{z}f}T_{\overline{z}z^n}=T_{\overline{z}g}T_{\overline{z}z^t}$ 及(1)，(2)可得

$$\frac{n+p}{n+p+1}\left(z^{n+p-2}f(z)-\frac{1}{z^2}\int_0^z\zeta^{n+p-1}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right)=\frac{t+p}{t+p+1}\left(z^{t+p-2}g(z)-\frac{1}{z^2}\int_0^z\zeta^{t+p-1}g(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right),$$

上式两边同时乘以 z^2 可得

$$\frac{n+p}{n+p+1}\left(z^{n+p}f(z)-\int_0^z\zeta^{n+p-1}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right)=\frac{t+p}{t+p+1}\left(z^{t+p}g(z)-\int_0^z\zeta^{t+p-1}g(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right),$$

上式两边同时求导并合并同类项得

$$\frac{n+p}{n+p+1}\left((n+p-1)z^{n+p-1}f(z)+z^{n+p}f'(z)\right)=\frac{t+p}{t+p+1}\left((t+p-1)z^{t+p-1}g(z)+z^{t+p}g'(z)\right),$$

上式移项并提取公因式 z^p，由解析函数唯一性定理，得

$$\begin{aligned}&\left[\frac{(n+p)(n+p-1)}{(n+p+1)}z^{n-1}f(z)-\frac{(t+p)(t+p-1)}{(t+p+1)}z^{t-1}g(z)\right]\\&+\left[\frac{n+p}{n+p+1}z^nf'(z)-\frac{t+p}{t+p+1}z^tg'(z)\right]=0,\end{aligned}\tag{3}$$

上式两边同时乘以 $\frac{1}{p}$ 可得

$$\begin{aligned}&\left[\frac{(n+p)(n+p-1)}{(n+p+1)p}z^{n-1}f(z)-\frac{(t+p)(t+p-1)}{(t+p+1)p}z^{t-1}g(z)\right]\\&+\left[\frac{n+p}{(n+p+1)p}z^nf'(z)-\frac{t+p}{(t+p+1)p}z^tg'(z)\right]=0,\end{aligned}$$

让上式中的 $p \to +\infty$ 可得 $z^{n-1}f(z) - z^{t-1}g(z) = 0$，即 $z^n f(z) = z^t g(z)$。

(i) 若 $n = t$。可得 $f(z) = g(z)$。

(ii) 若 $n \neq t$。对 $z^n f(z) = z^t g(z)$ 求导可得

$$nz^{n-1}f(z) + z^n f'(z) = tz^{t-1}g(z) + z^t g'(z),$$

对上式移项可得

$$z^t g'(z) = nz^{n-1}f(z) + z^n f'(z) - tz^{t-1}g(z),$$

将上式及 $z^n f(z) = z^t g(z)$ 带入(3)式中可得

$$\left[\frac{(n+p)(n+p-1)}{n+p+1} z^{n-1}f(z) - \frac{(t+p)(t+p-1)}{t+p+1} z^{n-1}f(z)\right] + \left[\frac{n+p}{n+p+1} z^n f'(z) - \frac{t+p}{t+p+1}\left(nz^{n-1}f(z) + z^n f'(z) - tz^{n-1}f(z)\right)\right] = 0,$$

合并同类项可得

$$\frac{(n-t)(n+p-1)}{(n+p+1)(t+p+1)} z^{n-1}f(z) + \frac{n-t}{(n+p+1)(t+p+1)} z^n f'(z) = 0.$$

由于 $n \neq t$，对上式两边同时乘以 $\frac{p}{n-t}z$ 可得

$$\frac{(n+p-1)p}{(n+p+1)(t+p+1)} z^n f(z) + \frac{p}{(n+p+1)(t+p+1)} z^{n+1} f'(z) = 0.$$

让 $p \to +\infty$ 可得

$$z^n f(z) = 0.$$

从而 $f(z) \equiv 0$。由 $z^n f(z) = z^t g(z)$ 可得 $g(z) \equiv 0$。

3. 结论

本文首先给出在调和 Bergman 空间上 $T_{\bar{z}f}T_{\bar{z}^m z^n} = 0$ 时 f 的形式。其次探讨符号函数分别为 $\bar{z}z^n, \bar{z}f$ 与 $\bar{z}z^n$ 三个 Toeplitz 算子的零积问题，给出在调和 Bergman 空间上 $T_{\bar{z}z^n}T_{\bar{z}f}T_{\bar{z}z^n} = 0$ 时 f 的形式。最后刻画了当 $f, g \in H^\infty(\mathbb{D})$，$T_{\bar{z}f}T_{\bar{z}z^n} = T_{\bar{z}g}T_{\bar{z}z^t}$ 时 f 和 g 的形式。

参考文献

[1] Choe, B.R. and Lee, Y.J. (1999) Commuting Toeplitz Operators on the Harmonic Bergman Space. *Michigan Mathematical Journal*, **46**, 163-174. https://doi.org/10.1307/mmj/1030132367

[2] Choe, B.R. and Lee, Y.J. (2004) Commutants of Analytic Toeplitz Operators on the Harmonic Bergman Space. *Integral Equations and Operator Theory*, **50**, 559-564. https://doi.org/10.1007/s00020-004-1338-0

[3] Ding, X. (2008) A Question of Toeplitz Operators on the Harmonic Bergman Space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **344**, 367-372. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.02.063

[4] Dong, X. and Zhou, Z. (2009) Products of Toeplitz Operators on the Harmonic Bergman Space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **138**, 1765-1773. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-09-10204-6

[5] Dong, X. and Zhou, Z. (2012) Commuting Quasihomogeneous Toeplitz Operators on the Harmonic Bergman Space. *Complex Analysis and Operator Theory*, **7**, 1267-1285. https://doi.org/10.1007/s11785-012-0223-0