

集优化问题的最优性条件

袁其鑫

重庆理工大学数学科学学院, 重庆

收稿日期: 2026年3月17日; 录用日期: 2026年4月17日; 发布日期: 2026年4月27日

摘要

集值优化问题是现代优化理论研究的重要分支, 在工程设计、金融决策等领域有着广泛的应用。针对单值模型难以刻画复杂问题的局限性, 本文以集优化方法为核心, 在实分离拓扑线性空间框架下, 基于集序关系 \ll_{int}^p 定义了集优化问题的解。通过引入连续仿射线性映射, 构造拉格朗日集值映射与对偶集值映射, 建立了对偶优化问题, 明确了可行对与解的概念。本文借助锥的拓扑性质与序关系的传递性, 推导出弱对偶定理及其推论, 揭示了原问题极小解与对偶问题极大解的内在关联。本文结果完善了集序关系框架下的对偶理论, 为带集值约束的优化问题求解提供了理论依据。

关键词

集优化, 集序关系, 对偶, 拉格朗日乘子

Optimality Conditions for Set Optimization Problems

Qixin Yuan

School of Mathematical Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: March 17, 2026; accepted: April 17, 2026; published: April 27, 2026

Abstract

Set-valued optimization is an important branch of modern optimization theory, with broad applications in fields such as engineering design and financial decision-making. In view of the limitations of single-valued models in describing complex problems, this paper adopts the set optimization approach as its core methodology. Within the framework of real separated topological linear spaces, and based on the set order relation \ll_{int}^p , we define solutions for the set optimization problem (SOP). By introducing continuous affine linear mappings, we construct the Lagrangian set-valued

map and the dual set-valued map, establish the corresponding dual optimization problem (DSOP), and clarify the concepts of feasible pairs and solutions. Leveraging the topological properties of cones and the transitivity of the set order relation, we derive the weak duality theorem and its corollary, revealing the intrinsic relationship between minimal solutions of the primal problem and maximal solutions of the dual problem. The results obtained in this paper refine the duality theory within the framework of set order relations and provide a theoretical foundation for solving optimization problems with set-valued constraints.

Keywords

Set Optimization, Set Order Relation, Duality, Lagrange Multiplier

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 绪论

随着数学规划理论的持续发展, 学者们逐步认识到, 在众多实际问题场景中, 单值映射优化模型难以精准刻画问题的内在复杂性。在此背景下, 集值优化理论应运而生, 并成为优化领域的重要研究方向。集值优化问题的研究主要依托向量优化方法与集优化方法两大路径展开。向量优化方法可将问题转化为经典的向量优化问题处理。然而, 该方法仅基于像集中的单点进行比较。为克服这一局限, Kuroiwa [1] [2]率先引入集合序关系的概念, 提出以集合为整体单元的比较准则。Young 在 1931 年的研究[3]中已初步探讨了集合间的序关系; Kuroiwa 于 1996 年在文献[1]中正式提出集序关系框架下的凸集值映射概念, 并于 1997 年在文献[2]中进一步引入并研究了集序关系意义下锥凸集值映射的概念与性质, 同时介绍了多种集序关系类型。在集值优化理论的发展过程中, 对偶理论始终占据核心地位。借助对偶理论, 可将一个极小化问题与对应的极大化问题紧密关联, 从而在求解极大化问题的过程中获得极小化问题的最优值。带集值约束的凸集值优化问题的拉格朗日对偶理论, 在最优性条件研究中尤为关键。通过引入对偶问题, 可建立原问题与对偶问题的解之间的关联。Hernández 与 Rodríguez-Marín [4]基于 Kuroiwa 的基础研究[5] [6], 构建了集值优化问题的对偶性结论与拉格朗日乘子法则, 推导得出拉格朗日映射鞍点存在的充要条件, 进一步完善了集值优化的理论体系。

近年来, 关于集合序关系的改进与推广成为研究热点。Zhou 等人[7]在线性空间中研究了基于 q -型集合序关系的 Lagrange 乘子法则与标量化问题。Han [8]则基于 Kuroiwa 在文献[2]中介绍的第四种序关系, 提出了一种更弱的序关系 \ll_{intC}^p , 定义了新的弱有效解概念, 并讨论了其标量化结果与连通性。然而, 在该序关系框架下, 含约束集值优化问题的对偶理论尚有待深入研究。

本文以此为切入点, 在 Han[8]所提出的序关系 \ll_{intC}^p 框架下, 研究含约束集值优化问题的对偶理论。首先, 在预备知识部分系统回顾相关定义与引理, 并给出 p -极小解与 p -极大解的等价刻画。其次, 引入集值拉格朗日映射并构造对偶问题, 在适当的凸性假设下证明弱对偶定理, 进而得到原问题最优解与对偶问题可行解之间的关系推论。本文的结构安排如下, 第 2 节介绍预备知识, 包括空间设定、序关系定义、解的概念及其性质; 第 3 节建立对偶理论, 证明弱对偶定理及其推论。

2. 预备知识

本文设 X 是线性空间, Y 和 Z 是两个实分离拓扑线性空间, Y^* 和 Z^* 分别表示 Y 和 Z 的拓扑对偶空

间。记 $\mathbb{R}_+ := \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ 。所有空间的零元均记为 0 。记 Y 的所有非空子集的集合为 $\mathcal{P}(Y)$ ，即 $\mathcal{P}(Y) := \{A \subseteq Y \mid A \neq \emptyset\}$ 。

若 $C \in \mathcal{P}(Y)$ 是点的，当且仅当

$$C \cap (-C) = \{0\}.$$

若 $C \in \mathcal{P}(Y)$ 是非平凡的，当且仅当

$$C \neq \{0\} \text{ 且 } C \neq Y.$$

若 $C \in \mathcal{P}(Y)$ 是锥，当且仅当对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ，任意 $c \in C$ ，满足

$$\lambda c \in C.$$

定义 1 [8] 设 $A, B \in \mathcal{P}(Y)$ ， $A \leq_c^h B$ 当且仅当 $\left(\bigcap_{a \in A} (a + C)\right) \cap B \neq \emptyset$ 。

定义 2 [8] 设 $A, B \in \mathcal{P}(Y)$ ， $A \ll_{\text{int}C}^p B$ 当且仅当 $\left(\bigcap_{a \in A} (a + \text{int}C) + \text{int}C\right) \cap B \neq \emptyset$ 。

定义 3 [8] 对于 $A, B \in \mathcal{P}(Y)$ ，我们有

$$A \ll_{\text{int}C}^p B \Leftrightarrow A \ll_c^p B,$$

其中

$$A \ll_c^p B \Leftrightarrow \left(\bigcap_{a \in A} (a + C) + \text{int}C\right) \cap B \neq \emptyset.$$

注 1 以下例子表明文献[8]中定义的集序关系 $\ll_{\text{int}C}^q$ 与本文定义的集序关系 $\ll_{\text{int}C}^p$ 互不蕴含，即 $A \ll_{\text{int}C}^p B$ 不能推出 $A \ll_{\text{int}C}^q B$ ， $A \ll_{\text{int}C}^q B$ 也不能够推出 $A \ll_{\text{int}C}^p B$ ，其中

$$A \ll_{\text{int}C}^q B \Leftrightarrow A \cap \left(\bigcap_{b \in B} (b - \text{int}C) - \text{int}C\right) \neq \emptyset.$$

例 1 设 $Y := \mathbb{R}^2$ ， $\text{int}C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$ ， $A := \{(1, -1), (3, 0)\}$ ， $B := \{(2, 0)\}$ 。显然，

$$A \cap \left(\bigcap_{b \in B} (b - \text{int}C) - \text{int}C\right) = \{(1, -1)\}$$

因此， $A \ll_{\text{int}C}^q B$ 。然而， $\left(\bigcap_{a \in A} (a + \text{int}C) + \text{int}C\right) \cap B = \emptyset$ 。也就是说， $A \not\ll_{\text{int}C}^p B$ 。

例 2 设 $Y := \mathbb{R}^2$ ， $\text{int}C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$ ， $A := \{(0, 0)\}$ ， $B := \{(2, 2), (-1, 3)\}$ 。易知

$$\left(\bigcap_{a \in A} (a + \text{int}C) + \text{int}C\right) \cap B = \{(2, 2)\}.$$

因此， $A \ll_{\text{int}C}^p B$ 。然而， $A \cap \left(\bigcap_{b \in B} (b - \text{int}C) - \text{int}C\right) = \emptyset$ ，即 $A \not\ll_{\text{int}C}^q B$ 。

注 3 $A \ll_{\text{int}C}^p B$ 蕴含着 $A \leq_c^h B$ ，但是， $A \leq_c^h B$ 不蕴含 $A \ll_{\text{int}C}^p B$ 。相关例子 Han 已在文献[6]中的例 2.2 给出。

本文从此开始，假设 $C \subseteq Y$ 和 $D \subseteq Z$ 为两个非平凡的尖闭凸锥，且满足 $\text{int}C \neq \emptyset$ 和 $\text{int}D \neq \emptyset$ 。C 的对偶锥定义为 $C^+ := \{\varphi \in Y^* : \langle y, \varphi \rangle \geq 0, \forall c \in C\}$ 。

设集值映射 $F: X \rightrightarrows Y$ 与 $G: X \rightrightarrows Z$ 分别从线性空间 X 映射到实分离拓扑线性空间 Y 和 Z 。我们考虑如下集优化问题：

$$\min F(x) \quad \text{subject to } x \in \Omega, \quad (\text{SOP})$$

其中 $\Omega = \{x \in X : G(x) \cap (-D) \neq \emptyset\}$ 。

定义 4 称 $x_0 \in \Omega$ 是问题(SOP)的 p -极小解, 记为 $x_0 \in \min(F, \ll_{\text{int}C}^p)$, 若对任意 $x \in \Omega$, 当 $F(x) \ll_{\text{int}C}^p F(x_0)$ 成立时, 必有 $F(x_0) \ll_{\text{int}C}^p F(x)$ 成立。

定义 5 称 $x_0 \in \Omega$ 是问题(SOP)的 p -极大解, 记为 $x_0 \in \max(F, \ll_{\text{int}C}^p)$, 若对任意 $x \in \Omega$, 当 $F(x_0) \ll_{\text{int}C}^p F(x)$ 成立时, 必有 $F(x) \ll_{\text{int}C}^p F(x_0)$ 成立。

引理 1 $x_0 \in \min(F, \ll_{\text{int}C}^p)$ 当且仅当不存在 $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$ 使得 $F(x) \ll_{\text{int}C}^p F(x_0)$ 。

证明: 现证明充分性。假设不存在 $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$ 使得 $F(x) \ll_{\text{int}C}^p F(x_0)$, 即, 任意 $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$, $F(x) \not\ll_{\text{int}C}^p F(x_0)$ 。因此, $x_0 \in \min(F, \ll_{\text{int}C}^p)$ 。

下证引理的必要性。假设存在 $x_1 \in \Omega \setminus \{x_0\}$ 使得

$$F(x_1) \ll_{\text{int}C}^p F(x_0), \quad (1)$$

即

$$\left(\bigcap_{y \in F(x_1)} (y + \text{int}C) + \text{int}C \right) \cap F(x_0) \neq \emptyset. \quad (2)$$

由(2)可知, 存在 $y_{01} \in F(x_0)$ 使得

$$y_{01} \in y + \text{int}C + \text{int}C \subseteq y + \text{int}C, \quad \forall y \in F(x_1). \quad (3)$$

因为 $x_0 \in \min(F, \ll_{\text{int}C}^p)$, 所以 $F(x_0) \ll_{\text{int}C}^p F(x_1)$, 即

$$\left(\bigcap_{y_0 \in F(x_0)} (y_0 + \text{int}C) + \text{int}C \right) \cap F(x_1) \neq \emptyset. \quad (4)$$

由(4)可得, 存在 $y_1 \in F(x_1)$ 使得

$$y_1 \in y_0 + \text{int}C + \text{int}C \subseteq y_0 + \text{int}C, \quad \forall y_0 \in F(x_0). \quad (5)$$

由(3)和(5), 可得

$$y_{01} \in y_1 + \text{int}C \subseteq y_0 + \text{int}C + \text{int}C \subseteq y_0 + \text{int}C, \quad \forall y_0 \in F(x_0). \quad (6)$$

让 $y_0 = y_{01}$, 结合(6), 可得 $0 \in \text{int}C$, 这是矛盾的。

3. 对偶理论

记 $\mathcal{L}(Z, Y)$ 为从空间 Z 到空间 Y 的全体连续线性映射构成的集合。令

$$\mathcal{L}_+(Z, Y) := \{T \in \mathcal{L}(Z, Y) : T(D) \subseteq C\},$$

其中 $T(D) := \bigcup T(d)$ 。

记 $\mathcal{A}_*(Z, Y) := \{T \in \mathcal{A}(Z, Y) : T(z) = \bar{T}(z) + m\}$, 其中 $\bar{T} \in \mathcal{L}_+(Z, Y)$, $m \in -C$ 。且 $\mathcal{A}(Z, Y)$ 表示从空间 Z 到空间 Y 的全体连续仿射线性映射构成的集合。让 $T \in \mathcal{A}_*(Z, Y)$, $m \in -C$, 定义集值映射 $T \circ G : X \rightrightarrows Y$ 为

$$(T \circ G)(x) = \bigcup_{z \in G(x)} \bar{T}(z) + m, \quad x \in X.$$

记 $L : X \times \mathcal{A}_*(Z, Y) \rightrightarrows Y$ 为拉格朗日集值映射且定义为

$$L(x, T) = F(x) + (T \circ G)(x),$$

其中 $(x, T) \in X \times \mathcal{A}_*(Z, Y)$ 。

对偶集值映射 $\Phi: \mathcal{A}_*(Z, Y) \rightrightarrows Y$ 定义为

$$\Phi(T) = \min \{L(x, T) : x \in X\}.$$

与原集优化问题(SOP)相应的对偶问题可表述为如下优化问题:

$$\max \{ \Phi(T) \mid T \in \mathcal{A}_*(Z, Y) \}. \quad (\text{DSOP})$$

定义 6 称 $T_0 \in \mathcal{A}_*(Z, Y)$ 为对偶问题(DSOP)的 p -极大解, 当且仅当存在 $x_0 \in X$ 使得 $L(x_0, T_0) \in \Phi(T_0)$ 且 $L(x_0, T_0) \in \max \{ \Phi(T) \mid T \in \mathcal{A}_*(Z, Y) \}$ 。

定义 7 称 $(x_0, T_0) \in X \times \mathcal{A}_*(Z, Y)$ 为对偶问题(DSOP)的可行对, 当且仅当 $T_0 \in \mathcal{A}_*(Z, Y)$ 且 $F(x_0) + (T_0 \circ G)(x_0) \in \Phi(T_0)$ 。

定义 8 [4] 若 $T \in \mathcal{A}_*(Z, Y)$, 则 $T(-D) \subseteq -C$ 。

定理 1 (弱对偶) 设 $x_0 \in \Omega$, $(T \circ G)(x_0) \subseteq -C$ 且 (x', T) 是问题(DSOP)的一个可行对, 若

$$F(x_0) \ll_{\text{int}C}^p F(x') + (T \circ G)(x').$$

则有 $F(x') + (T \circ G)(x') \ll_{\text{int}C}^p F(x_0)$ 。

证明: 假设 $F(x') + (T \circ G)(x') \ll_{\text{int}C}^p F(x_0)$ 。可以得到

$$\left(\bigcap_{z' \in F(x') + (T \circ G)(x')} (z' + \text{int}C) + \text{int}C \right) \cap F(x_0) = \emptyset, \quad (7)$$

(7)意味着对于任意 $y_0 \in F(x_0)$, 有

$$y_0 \notin \left(\bigcap_{z' \in F(x') + (T \circ G)(x')} (z' + \text{int}C) + \text{int}C \right). \quad (8)$$

因为 (x', T) 是问题(DSOP)的一个可行对, 由引理 1 可知,

$$F(x') + (T \circ G)(x') \ll_{\text{int}C}^p F(x_0) + (T \circ G)(x_0),$$

即

$$\left(\bigcap_{z' \in F(x') + (T \circ G)(x')} (z' + \text{int}C) + \text{int}C \right) \cap (F(x_0) + (T \circ G)(x_0)) \neq \emptyset. \quad (9)$$

由(9)可知, 存在 $z_{01} \in F(x_0) + (T \circ G)(x_0)$ 使得

$$z_{01} \in \left(\bigcap_{z' \in F(x') + (T \circ G)(x')} (z' + \text{int}C) + \text{int}C \right). \quad (10)$$

由于 $z_{01} \in F(x_0) + (T \circ G)(x_0)$, 故存在 $y_{01} \in F(x_0)$ 和 $b_{01} \in (T \circ G)(x_0)$ 使得 $y_{01} + b_{01} = z_{01}$ 。因为 $b_{01} \in (T \circ G)(x_0) \subseteq -C$, 则由(10)可知

$$\begin{aligned} y_{01} &\in \left(\bigcap_{z' \in F(x') + (T \circ G)(x')} (z' + \text{int}C) + \text{int}C \right) - b_{01} \\ &\subseteq \left(\bigcap_{z' \in F(x') + (T \circ G)(x')} (z' + \text{int}C) + \text{int}C \right). \end{aligned} \quad (11)$$

让(8)中 $y_0 = y_{01}$ 可得到(8)和(11)矛盾。

推论 1 设 $(x_1, T_1) \in X \times \mathcal{A}_*(Z, Y)$, $x_0 \in \Omega$, $T \in \mathcal{A}_*(Z, Y)$ 且当 $x \in \Omega$ 时有 $(T \circ G)(x) \subseteq -C$ 。若 (x_1, T_1) 是问题(DSOP)的一个可行对且

$$F(x_0) \ll_{\text{int}C}^p F(x_1) + (T_1 \circ G)(x_1). \quad (12)$$

那么 $x_0 \in \min(F, \ll_{\text{int}C}^p)$ 且 T_1 是问题(DSOP)的一个 p -极大解。

证明: 假设存在 $x' \in \Omega$ 使得

$$F(x') \ll_{\text{int}C}^p F(x_0).$$

那么由(12)和传递性可知,

$$F(x') \ll_{\text{int}C}^p F(x_1) + (T_1 \circ G)(x_1).$$

因为是问题(DSOP)的一个可行对, 由定理 1 可知

$$F(x_1) + (T_1 \circ G)(x_1) \ll_{\text{int}C}^p F(x').$$

再次利用(12)可得,

$$F(x_0) \ll_{\text{int}C}^p F(x').$$

因此, 假设存在可行对 (x_2, T_2) 使得

$$F(x_1) + (T_1 \circ G)(x_1) \ll_{\text{int}C}^p F(x_2) + (T_2 \circ G)(x_2).$$

由(12)可知,

$$F(x_0) \ll_{\text{int}C}^p F(x_2) + (T_2 \circ G)(x_2).$$

再次利用定理 1, 可有

$$F(x_2) + (T_2 \circ G)(x_2) \ll_{\text{int}C}^p F(x_0), \quad (13)$$

由(12)和(13), 可得

$$F(x_2) + (T_2 \circ G)(x_2) \ll_{\text{int}C}^p F(x_1) + (T_1 \circ G)(x_1).$$

因此, T_1 是问题(DSOP)的一个 p -极大解。

基金项目

该工作由国家自然科学基金项目资助(项目编号: 12171061)。重庆市研究生创新项目: CYS25776。

参考文献

- [1] Kuroiwa, D. (1996) Convexity for Set-Valued Maps. *Applied Mathematics Letters*, **9**, 97-101. [https://doi.org/10.1016/0893-9659\(96\)00020-1](https://doi.org/10.1016/0893-9659(96)00020-1)
- [2] Kuroiwa, D., Tanaka, T. and Xuan Duc Ha, T. (1997) On Cone Convexity of Set-Valued Maps. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **30**, 1487-1496. [https://doi.org/10.1016/s0362-546x\(97\)00213-7](https://doi.org/10.1016/s0362-546x(97)00213-7)
- [3] Young, R.C. (1931) The Algebra of Many-Valued Quantities. *Mathematische Annalen*, **104**, 260-290. <https://doi.org/10.1007/bf01457934>
- [4] Hernández, E. and Rodríguez-Marín, L. (2007) Lagrangian Duality in Set-Valued Optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **134**, 119-134. <https://doi.org/10.1007/s10957-007-9237-6>
- [5] Kuroiwa, D. (2001) On Set-Valued Optimization. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **47**, 1395-1400. [https://doi.org/10.1016/s0362-546x\(01\)00274-7](https://doi.org/10.1016/s0362-546x(01)00274-7)

- [6] Kuroiwa, D. (2003) Existence Theorems of Set Optimization with Set-Valued Maps. *Journal of Information and Optimization Sciences*, **24**, 73-84. <https://doi.org/10.1080/02522667.2003.10699556>
- [7] Zhou, Z.A., Huang, M. and Zhao, K. (2023) Lagrange Multiplier Rule and Scalarization of the Set Optimization Problem in Linear Spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **24**, 151-162.
- [8] Han, Y. (2020) Connectedness of Weak Minimal Solution Set for Set Optimization Problems. *Operations Research Letters*, **48**, 820-826. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2020.10.002>