

二维经典风险模型的最优分红问题

宋平伟, 赵佳伟

河北工业大学理学院, 天津

收稿日期: 2026年3月18日; 录用日期: 2026年4月11日; 发布日期: 2026年4月23日

摘要

最优分红问题是保险风险理论与公司金融问题的经典问题。由于经典风险模型的索赔额分布是任意的, 为求解二维经典风险模型的值函数带来了困难。本文研究了二维经典风险模型的经典分红问题, 借助逐段决定马尔可夫过程框架下盈余过程的特殊结构, 通过引入优化问题: “最大化带有终端报酬的直到第一个索赔到达时刻的累计折现分红的期望”。定义了值迭代函数, 证明二维经典风险模型的最优值函数可以由递增的零初值迭代函数逼近, 研究了值迭代函数的最优策略, 通过引入辅助优化问题, 完整求解了二维经典风险模型的最优分红问题。

关键词

二维经典风险模型, 最优分红问题, 策略迭代算法, 值迭代函数

The Optimal Dividend Problem in a Two-Dimensional Classical Risk Model

Pingwei Song, Jiawei Zhao

School of Sciences, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: March 18, 2026; accepted: April 11, 2026; published: April 23, 2026

Abstract

The optimal dividend problem is a classic issue in insurance risk theory and corporate finance. Compared with diffusion models, the claim size distribution in the classical risk model is arbitrary, which brings difficulties to solving the value function of the two-dimensional classical risk model. This paper studies the classical dividend problem of the two-dimensional classical risk model. By leveraging the special structure of the surplus process under the PDMP framework and introducing a sub-optimization problem of the original optimal dividend problem: “maximizing the expected cumulative discounted dividends until the first claim arrival time with terminal rewards”, the

expression of the iterative value function is established. It is proved that the optimal value function of the two-dimensional classical risk model can be approximated by an increasing zero initial value iterative value function. The optimal strategy of the iterative value function is studied, and the optimal dividend problem of the two-dimensional classical risk model is completely solved by introducing an auxiliary optimization problem.

Keywords

Two-Dimensional Classical Risk Model, Optimal Dividend Problem, Policy Iteration Algorithm, Value Iterative Function

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

经典风险理论最早可以追溯到 De Finetti [1], 首次在离散时间风险模型中提出最优分红问题, 保险公司如何最大化破产前累计期望折现分红, 证明了障碍策略(barrier strategy)是最优的。Gerber [2]研究了 De Finetti 的最优分红问题, 证明了最优分红策略为所谓的“波段策略”。在逐段决定马尔可夫过程框架下, 保险风险中的最优分红问题在 2005 年前后有了实质性进展。借助严格的随机控制理论, Azcue 和 Muler [3]更系统的研究了经典风险模型的最优分红问题, 同时还考虑了再保险策略作为另外一个控制量。从那时起, 许多研究学者开始在更加实际的模型下研究最优分红问题。如注资、借贷、投资等更贴合实际的模型。然而, 近年来, 学者对同时考虑几个相互关联的保险投资组合的动态的风险理论越来越感兴趣。二维经典风险模型是保险精算中用来描述和分析保险公司经营多种业务时, 其破产风险的核心数学框架。它不再将保险公司视为一个单一的整体, 而是细致地刻画其两类主要业务的盈余变化过程, 从而更真实地反映现实经营中的复杂风险。Chan 等人[4]清晰地定义了两种在二维框架下具有代表性的破产概念(联合破产与边缘破产)。王泉和张奕[5]研究构建的是一个离散时间的二维风险模型。Cheng 和 Wang [6]研究一个更为复杂的二维风险模型的破产概率问题。该模型不仅考虑索赔的随机性, 还考虑了保费收入的不确定性以及环境微扰对盈余过程的影响。Gu 等人[7]研究两家合作企业(或同一保险公司的两个业务部门)在面临联合运营风险时的最优分红策略问题。探索如何通过企业间的合作与风险分担, 最大化股东权益的现值。Azcue 和 Muler [8]研究一个多维(以二维为例)风险模型中的最优分红问题, 其核心创新在于引入了不可逆切换机制。公司可以在不同经营模式(如不同投资策略、不同业务组合或不同风险水平)之间进行切换, 但这种切换是不可逆的——只能从高风险高回报模式切换到保守模式。目标是找到最优的分红和切换策略, 以最大化股东的期望折现分红。

策略迭代算法是马氏决策理论中广泛用于逼近值函数与最优策略的相对成熟的算法。Hernandez 和 Lasserre [9]分别对一般马氏决策理论中的策略迭代算法给出了严格的数值分析。Thonhauser 和 Albrecher [10]首次将这种思想应用于带交易费用的经典风险模型的最优分红模型, 并给出了相应的策略迭代算法。Albrecher 等人[11]在考虑两个保险公司合作时, 给出了“障碍”策略迭代算法。

本文中, 采用了 Azcue 等人[12]使用的随机控制方法。考虑在两保险公司的最优分红问题。证明了最优值函数可以由一系列递增的值迭代函数逼近。最优值迭代函数可以刻画为一类 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)方程的最小粘度解。进一步地, 证明了在某些子情形下, 最优策略位于所谓的“波段策略”的子类

内, 从而将二元优化问题归结为一元优化问题。引入辅助优化问题, 得到值函数的显示解。最后给出了数值例子。论文的组织方式如下: 第 2 章介绍模型并提出最优分红值函数; 第 3 章证明值迭代函数; 第 4 章讨论最优策略; 第 5 章给出了辅助函数; 第 6 章数值分析。

2. 二维经典风险模型与假设

假设带过滤的概率空间 $\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P\}$, 在该空间上定义了引入的所有随机过程和变量。考虑两家保险公司(公司一和公司二)的盈余过程, 索赔由两公司共同承担。设 X_t 为保险公司一的盈余过程, Y_t 为保险公司二的盈余过程。考虑以下二维经典风险模型:

$$\begin{cases} X_t = x + p_1 t - b_1 \sum_{i=1}^{N_t} U_i, \\ Y_t = y + p_2 t - b_2 \sum_{i=1}^{N_t} U_i. \end{cases}$$

其中 x 和 y 表示公司一和公司二初始准备金, p_i 表示公司 i ($i=1,2$) 的保费收入率。 $\{U_i, i \in N\}$ 是一列独立同分布的随机变量, U_i 表示第 i 次索赔的大小, 其具有共同分布函数 F , 常数 b_1 和 b_2 是两个公司支付的索赔比例。满足 $b_1 + b_2 = 1$, $b_1 > 0$ 和 $b_2 > 0$, $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ 表示索赔强度为 $\lambda > 0$ 的泊松计数过程。假设 N_t 和 U_i 相互独立的。

在上述模型的基础上, 考虑两公司分别对股东分红。给定分红过程 $L = (L_t^1, L_t^2)_{t \geq 0}$, 则盈余过程为

$$\begin{cases} X_t^L = x + p_1 t - b_1 \sum_{i=1}^{N_t} U_i - L_t^1, \\ Y_t^L = y + p_2 t - b_2 \sum_{i=1}^{N_t} U_i - L_t^2. \end{cases}$$

其中, L_t^i 为公司 i 截至时间 t 的累计分红量。

若分红策略 $L = (L_t^1, L_t^2)$ 是可行策略, 应满足如下条件:

- $L = (L_t^1, L_t^2)$ 是非降的;
- $L = (L_t^1, L_t^2)$ 是左连右极的;
- $L = (L_t^1, L_t^2)$ 是关于自然流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0} = \mathcal{F}$ 是可料的;
- $L_t^1 \leq X_t^L$ 和 $L_t^2 \leq Y_t^L$ 。

分红策略是可行策略表明两公司的累计分红不得超过两公司的盈余。

在可行策略 L 下, 破产时刻为:

$$\tau := \inf \{t \geq 0 : X_t^L < 0 \text{ 或 } Y_t^L < 0\}.$$

本章的目标是最大化预期累计贴现分红的期望:

$$V_L(x, y) := \mathbb{E}_{x,y} \left(\int_0^\tau e^{-\delta s} d(L_s^1 + L_s^2) \right).$$

其中 $\delta > 0$ 表示固定的贴现率。

最优值函数定义为:

$$V(x, y) := \sup_{L \in \Pi_{x,y}} V_L(x, y).$$

3. 策略迭代算法

本节通过构造值迭代函数 $V^n(x, y)$ 的表达式, 证明值函数 $V(x, y)$ 可以由值迭代函数 $V^n(x, y)$ 逐渐逼近。

值迭代函数

当 $n \geq 1$ 时, 值迭代函数 $V^n(x, y)$ 定义如下形式:

$$V^n(x, y) := \sup_{L \in \Pi_{x,y}} V_L^n(x, y). \tag{3.1}$$

其中

$$V_L^n(x, y) = \mathbb{E}_{x,y} \left(\int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} d(L_s^1 + L_s^2) + e^{-\delta \tau_1} V^{n-1}(X_{\tau_1}^L, Y_{\tau_1}^L) 1_{\{\tau_1 < \tau\}} \right). \tag{3.2}$$

令 $V^0 \equiv 0$ 。

定理 3.1 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $V^1 \leq V^2 \leq \dots \leq V^n \leq \dots \leq V$ 且 $V^n \nearrow V$ 。

证明。由 $V^0(x, y) \equiv 0$ 可得, $V^0 \leq V^1$ 。

假设 $V^{n-2} \leq V^{n-1} \leq V$, 根据(3.3)

$$\begin{aligned} V^{n-1} &= \sup_{L \in \Pi_{x,y}} \mathbb{E}_{x,y} \left(\int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} d(L_s^1 + L_s^2) + e^{-\delta \tau_1} V^{n-2}(X_{\tau_1}^L, Y_{\tau_1}^L) 1_{\{\tau_1 < \tau\}} \right) \\ &\leq \sup_{L \in \Pi_{x,y}} \mathbb{E}_{x,y} \left(\int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} d(L_s^1 + L_s^2) + e^{-\delta \tau_1} V^{n-1}(X_{\tau_1}^L, Y_{\tau_1}^L) 1_{\{\tau_1 < \tau\}} \right) = V^n(x, y) \\ &\leq \sup_{L \in \Pi_{x,y}} \mathbb{E}_{x,y} \left(\int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} d(L_s^1 + L_s^2) + e^{-\delta \tau_1} V(X_{\tau_1}^L, Y_{\tau_1}^L) 1_{\{\tau_1 < \tau\}} \right) = V(x, y) \end{aligned}$$

因此, $V^1 \leq V^2 \leq \dots \leq V^n \leq \dots \leq V$ 。

此外, V 是非减的且满足

$$V(x, y) \leq x + y + \frac{p_1 + p_2}{\delta}.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $T > 0$, 使得当 $t > T$

$$e^{-\delta t} V((x + p_1 t), y + p_2 t) < \frac{1}{3} \varepsilon. \tag{3.3}$$

定义 $N = V(x + p_1 T, y + p_2 T) > 0$, 取 $n_0 > 0$, 使得

$$P\{\tau_{n_0} \geq T\} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{3N} \tag{3.4}$$

选取某一个可行策略 $L^\varepsilon \in \Pi_{x,y}$, 使得

$$V(x, y) - V_{L^\varepsilon}(x, y) < \frac{1}{3} \varepsilon. \tag{3.5}$$

定义可行策略 L^{n_0} 为 $L_t^{n_0} = L_t^\varepsilon 1_{\{t \wedge \tau_{n_0} \geq T\}}$ 。从(3.1)和(3.4)得

$$\begin{aligned} V_{L^\varepsilon}(x, y) - V_{L^{n_0}}(x, y) &= \mathbb{E}_{x,y} \left(\int_{\tau_{n_0} \wedge \tau}^{\tau} e^{-\delta s} d(L_s^{1,\varepsilon} + L_s^{2,\varepsilon}) \right) \leq \mathbb{E}_{x,y} \left(e^{-\delta(\tau_{n_0} \wedge \tau)} V(X_{\tau_{n_0} \wedge \tau}^{L^\varepsilon}, Y_{\tau_{n_0} \wedge \tau}^{L^\varepsilon}) \right) \\ &\leq \mathbb{E}_{x,y} \left(1_{\{\tau_{n_0} \wedge \tau \geq T\}} e^{-\delta(\tau_{n_0} \wedge \tau)} V(x + p_1(\tau_{n_0} \wedge \tau), y + p_2(\tau_{n_0} \wedge \tau)) \right) \\ &\quad + \mathbb{E}_{x,y} \left(1_{\{\tau_{n_0} \wedge \tau < T\}} V(x + p_1(\tau_{n_0} \wedge \tau), y + p_2(\tau_{n_0} \wedge \tau)) \right) \\ &\leq \mathbb{E}_{x,y} \left(1_{\{\tau_{n_0} \wedge \tau \geq T\}} e^{-\delta(\tau_{n_0} \wedge \tau)} V(x + p_1(\tau_{n_0} \wedge \tau), y + p_2(\tau_{n_0} \wedge \tau)) \right) + NP\{\tau_{n_0} < T\} \\ &\leq \frac{2}{3} \varepsilon \end{aligned}$$

根据式(3.5)得到

$$V(x, y) \leq V_{L^\varepsilon}(x, y) + \frac{1}{3}\varepsilon \leq V_{L^{n_0}}(x, y) + \varepsilon. \quad (3.6)$$

此外

$$\begin{aligned} V_{L^{n_0}}(x, y) &= \mathbb{E}_{x, y} \left(\int_0^{\tau_{n_0-1}} e^{-\delta s} d(L_s^{1, n_0} + L_s^{2, n_0}) + \mathbb{E}_{x, y} \left(\int_{\tau_{n_0-1}}^{\tau_{n_0}} e^{-\delta s} d(L_s^{1, n_0} + L_s^{2, n_0}) \mid \mathcal{F}_{\tau_{n_0-1}} \right) \right) \\ &\leq \mathbb{E}_{x, y} \left(\int_0^{\tau_{n_0-1}} e^{-\delta s} d(L_s^{1, n_0} + L_s^{2, n_0}) + e^{-\delta \tau_{n_0-1}} V^1 \left(X_{\tau_{n_0-1}}^{L^{n_0}}, Y_{\tau_{n_0-1}}^{L^{n_0}} \right) \right). \end{aligned}$$

假设

$$V_{L^{n_0}}(x, y) = \mathbb{E}_{x, y} \left(\int_0^{\tau_{n_0-k}} e^{-\delta s} d(L_s^{1, n_0} + L_s^{2, n_0}) + e^{-\delta \tau_{n_0-k}} V^k \left(X_{\tau_{n_0-k}}^{L^{n_0}}, Y_{\tau_{n_0-k}}^{L^{n_0}} \right) \right).$$

则

$$\begin{aligned} V_{L^{n_0}}(x, y) &= \mathbb{E}_{x, y} \left(\int_{\tau_{n_0-(k+1)}}^{\tau_{n_0-k}} e^{-\delta s} d(L_s^{1, n_0} + L_s^{2, n_0}) + e^{-\delta \tau_{n_0-k}} V^k \left(X_{\tau_{n_0-k}}^{L^{n_0}}, Y_{\tau_{n_0-k}}^{L^{n_0}} \right) \mid \left(X_{\tau_{n_0-1}}^{L^{n_0}}, Y_{\tau_{n_0-1}}^{L^{n_0}} \right) \right) \\ &= e^{-\delta \tau_{n_0-(k+1)}} \mathbb{E}_{x, y} \left(\int_0^{\tau_{n_0-k}-\tau_{n_0-(k+1)}} e^{-\delta(\tau_{n_0-(k+1)}+s)} d(L_{\tau_{n_0-(k+1)}+s}^{1, n_0} + L_{\tau_{n_0-(k+1)}+s}^{2, n_0}) \mid \left(X_{\tau_{n_0-1}}^{L^{n_0}}, Y_{\tau_{n_0-1}}^{L^{n_0}} \right) \right) \\ &\quad + e^{-\delta \tau_{n_0-(k+1)}} \mathbb{E}_{x, y} \left(e^{-\delta \tau_{n_0-k}} V^k \left(X_{\tau_{n_0-k}}^{L^{n_0}}, Y_{\tau_{n_0-k}}^{L^{n_0}} \right) \mid \left(X_{\tau_{n_0-1}}^{L^{n_0}}, Y_{\tau_{n_0-1}}^{L^{n_0}} \right) \right) \\ &\leq e^{-\delta \tau_{n_0-(k+1)}} V^{k+1} \left(X_{\tau_{n_0-(k+1)}}^{L^{n_0}}, Y_{\tau_{n_0-(k+1)}}^{L^{n_0}} \right). \end{aligned}$$

因此, 当 $k = 0, 1, \dots, n_0 - 2$ 时,

$$V_{L^{n_0}}(x, y) \leq \mathbb{E}_{x, y} \left(\int_0^{\tau_{n_0-(k+1)}} e^{-\delta s} d(L_s^{1, n_0} + L_s^{2, n_0}) + e^{-\delta \tau_{n_0-(k+1)}} V^{k+1} \left(X_{\tau_{n_0-(k+1)}}^{L^{n_0}}, Y_{\tau_{n_0-(k+1)}}^{L^{n_0}} \right) \right)$$

进而

$$V_{L^{n_0}}(x, y) \leq \mathbb{E}_{x, y} \left(\int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} d(L_s^{1, n_0} + L_s^{2, n_0}) + e^{-\delta \tau_1} V^{n_0-1} \left(X_{\tau_1}^{L^{n_0}}, Y_{\tau_1}^{L^{n_0}} \right) \right) \leq V^{n_0}(x, y).$$

当 $n > n_0$

$$V(x, y) \leq V_{L^{n_0}}(x, y) + \varepsilon \leq V^n(x, y) + \varepsilon.$$

即 $V^n \nearrow V$ □

4. HJB 方程

由参考文献[11]可知 值迭代函数 $V^n(x, y)$ 函数的 HJB

$$\max \left\{ 1 - V_x^n(x, y), 1 - V_y^n(x, y), \mathcal{L}V^n(x, y) \right\} = 0 \quad (4.1)$$

5. 最优策略

最优策略是随机控制问题的核心目标 - 即能够使迭代值函数达到最大值的可行策略。首先将第一象限划分为区域 D^1, D^2, \mathcal{M} , 分别考虑区域 D^1, D^2, \mathcal{M} 上的最优策略, 区域 D^1, D^2, \mathcal{M} 定义如下形式:

$$D^1 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \frac{b_2}{b_1} x > y \right\},$$

$$D^2 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \frac{b_2}{b_1} x < y \right\},$$

$$\mathcal{M} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \frac{b_2}{b_1} x = y \right\}.$$

5.1. D^1 上的最优策略

给定初始盈余 $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, 所有可行策略集为 $\Pi_{x,y}$, 定义可行策略集 $\hat{\Pi}_{x,y} \subset \Pi_{x,y}$, 满足: 若盈余 $(x, y) \in D^2 \cup \mathcal{M}$, 则盈余过程保持在 $D^2 \cup \mathcal{M}$ 中直到破产; 若盈余 $(x, y) \in D^1$, 公司一立刻分掉 $x - \frac{b_1}{b_2} y$ 之后盈余过程保持在 $D^2 \cup \mathcal{M}$. 由可行策略的定义, 得到

$$\hat{\Pi}_{x,y} = \left\{ (\bar{L}_t, \bar{L}_t) \in \Pi_{x,y} : \bar{L}_t \geq x - \frac{b_1}{b_2} y + \left(p_1 - \frac{b_1}{b_2} p_2 \right) t + \frac{b_1}{b_2} \bar{L}_t, t \geq 0 \right\}.$$

定理 5.1

$$V^n(x, y) = \sup_{\bar{L} \in \hat{\Pi}_{x,y}} V_{\bar{L}}^n(x, y)$$

证明. 在 $0 < t < \tau_1$ 上, 给定任意可行策略 $L^1 = (L_t^{1,1}, L_t^{2,1}) \in \Pi_{x,y}$, 定义

$$\bar{L} = \left(\max \left\{ x - \frac{b_1}{b_2} y + \left(p_1 - \frac{b_1}{b_2} p_2 \right) t + \frac{b_1}{b_2} L_t^{2,1}, L_t^{1,1} \right\}, L_t^{2,1} \right).$$

由于 $L_t^{1,1}$ 和 $L_t^{2,1}$ 是可料且非减的, 并且满足

$$\bar{L}_t^{1,1} \geq x - \frac{b_1}{b_2} y + \left(p_1 - \frac{b_1}{b_2} p_2 \right) t + \frac{b_1}{b_2} L_t^{2,1},$$

因此, $\bar{L} \in \hat{\Pi}_{x,y}$.

在 $0 < t < \tau_1$ 上, 两公司在可行策略 L^1 下的盈余如下形式:

$$\begin{cases} X_t^{L^1} = x + p_1 t - L_t^{1,1} \geq 0 \\ Y_t^{L^1} = y + p_2 t - L_t^{2,1} \geq 0. \end{cases}$$

在 $0 < t < \tau_1$ 上, 可行策略 $\bar{L} = (\bar{L}_t^{1,1}, \bar{L}_t^{2,1}) \in \Pi_{x,y}$, 满足 $Y_t^{\bar{L}} = Y_t^{L^1} \geq 0$.

$$X_t^{\bar{L}} = \begin{cases} X_t^{L^1}, x - \frac{b_1}{b_2} y + \left(p_1 - \frac{b_1}{b_2} p_2 \right) t + \frac{b_1}{b_2} L_t^{2,1} - \frac{b_1}{b_2} Y_t^{L^1} \leq L_t^{1,1} \\ \frac{b_1}{b_2} Y_t^{L^1}, x - \frac{b_1}{b_2} y + \left(p_1 - \frac{b_1}{b_2} p_2 \right) t + \frac{b_1}{b_2} L_t^{2,1} - \frac{b_1}{b_2} Y_t^{L^1} > L_t^{1,1} \end{cases} \geq 0.$$

截至第一次索赔 τ_1 时刻, 可行策略 L^1 对应的总分红 $L_{\tau_1}^{1,1} + L_{\tau_1}^{2,1}$ 小于或等于可行策略 \bar{L} 对应的总分红 $\bar{L}_{\tau_1}^{1,1} + \bar{L}_{\tau_1}^{2,1}$. 因此, 当 $0 < t < \tau_1$ 时, 满足 $L_t^{1,1} + L_t^{2,1} \geq \bar{L}_t^{1,1} + \bar{L}_t^{2,1}$.

在 $\tau_i < t < \tau_{i+1}$ 上, 给定任意可行策略 $L^{i+1} = (L_t^{1,i+1}, L_t^{2,i+1}) \in \Pi_{x,y}$, 定义

$$\bar{L}_t^{i+1} = \max \left\{ X_{\tau_i}^{L^i} - \frac{b_1}{b_2} Y_{\tau_i}^{L^i} + \left(p_1 - \frac{b_1}{b_2} p_2 \right) (t - \tau_i) + \frac{b_1}{b_2} L_t^{2,i}, L_t^{1,i} \right\}.$$

则 $\bar{L}^{i+1} = (\bar{L}_t^{1,i+1}, \bar{L}_t^{2,i+1})$. 由于 $\bar{L}_t^{1,i+1}$ 和 $\bar{L}_t^{2,i+1}$ 是可料且非减的, 并且满足

$$\bar{L}_t^{i+1} \geq X_{\tau_i}^{L^i} - \frac{b_1}{b_2} Y_{\tau_i}^{L^i} + \left(p_1 - \frac{b_1}{b_2} p_2 \right) (t - \tau_i) + \frac{b_1}{b_2} L_t^{2,i},$$

因此 $\bar{L}^{i+1} \in \hat{\Pi}_{x,y}$ 。

在 $\tau_i < t < \tau_{i+1}$ 上, 两公司在可行策略 L^{i+1} 下的盈余如下形式:

$$\begin{cases} X_t^{L^{i+1}} = X_{\tau_i}^{L^i} + p_1(t - \tau_i) - L_t^{1,i+1} \geq 0 \\ Y_t^{L^{i+1}} = Y_{\tau_i}^{L^i} + p_2(t - \tau_i) - L_t^{2,i+1} \geq 0. \end{cases}$$

在 $\tau_i < t < \tau_{i+1}$ 上, 可行策略 $\bar{L}^{i+1} = (\bar{L}_t^{1,i+1}, \bar{L}_t^{2,i+1}) \in \hat{\Pi}_{x,y}$, 满足 $Y_t^{\bar{L}^{i+1}} = Y_t^{L^{i+1}} \geq 0$ 。若

$$X_{\tau_i}^{L^i} - \frac{b_1}{b_2} Y_{\tau_i}^{L^i} + \left(p_1 - \frac{b_1}{b_2} p_2 \right) (t - \tau_i) + \frac{b_1}{b_2} L_t^{2,i+1} \leq L_t^{1,i+1}$$

则 $X_t^{\bar{L}^{i+1}} = X_t^{L^{i+1}} \geq 0$ 。

若

$$X_{\tau_i}^{L^i} - \frac{b_1}{b_2} Y_{\tau_i}^{L^i} + \left(p_1 - \frac{b_1}{b_2} p_2 \right) (t - \tau_i) + \frac{b_1}{b_2} L_t^{2,i+1} > L_t^{1,i+1}$$

则 $X_t^{\bar{L}^{i+1}} = \frac{b_1}{b_2} Y_t^{L^{i+1}} \geq 0$ 。

在时间 $\tau_i < t < \tau_{i+1}$ 时, 可行策略 L^{i+1} 对应的总分红 $L_t^{1,i+1} + L_t^{2,i+1}$ 小于或等于可行策略 \bar{L}^{i+1} 对应的总分红 $\bar{L}_t^{1,i+1} + \bar{L}_t^{2,i+1}$ 。由 $X_t^{L^{i+1}} > 0$ 和 $Y_t^{L^{i+1}} > 0$, 得到 $X_t^{\bar{L}^{i+1}} > 0$ 和 $Y_t^{\bar{L}^{i+1}} > 0$, 说明在策略 L^{i+1} 下两公司存活, 则在策略 \bar{L}^{i+1} 下两公司一定存活。

$$\begin{aligned} V_L^n(x, y) &= \mathbb{E}_{x,y} \left(\int_0^{\tau_1} e^{-\delta t} d(L_t^{1,1} + L_t^{2,1}) + e^{-\delta \tau_1} V^{n-1}(X_{\tau_1}^L, Y_{\tau_1}^L) \right) \\ &= \mathbb{E}_{x,y} \left(\int_0^{\tau_1} e^{-\delta t} d(L_t^{1,1} + L_t^{2,1}) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\delta t} d(L_t^{1,1} + L_t^{2,1}) + e^{-\delta \tau_2} V^{n-2}(X_{\tau_2}^L, Y_{\tau_2}^L) \right) \\ &= \mathbb{E}_{x,y} \left(\int_0^{\tau_1} e^{-\delta t} d(L_t^{1,1} + L_t^{2,1}) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\delta t} d(L_t^{1,1} + L_t^{2,1}) + \dots + \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} e^{-\delta t} d(L_t^{1,n} + L_t^{2,n}) \right) \\ &\leq \mathbb{E}_{x,y} \left(\int_0^{\tau_1} e^{-\delta t} d(\bar{L}_t^{1,1} + \bar{L}_t^{2,1}) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\delta t} d(\bar{L}_t^{1,2} + \bar{L}_t^{2,2}) + \dots + \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} e^{-\delta t} d(\bar{L}_t^{1,n} + \bar{L}_t^{2,n}) \right) \\ &= \mathbb{E}_{x,y} \left(\int_0^{\tau_1} e^{-\delta t} d(\bar{L}_t^{1,1} + \bar{L}_t^{2,1}) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\delta t} d(\bar{L}_t^{1,2} + \bar{L}_t^{2,2}) + e^{-\delta \tau_2} V^{n-2}(X_{\tau_2}^{\bar{L}}, Y_{\tau_2}^{\bar{L}}) \right) \\ &= \mathbb{E}_{x,y} \left(\int_0^{\tau_1} e^{-\delta t} d(\bar{L}_t^{1,1} + \bar{L}_t^{2,1}) + e^{-\delta \tau_1} V^{n-1}(X_{\tau_1}^{\bar{L}}, Y_{\tau_1}^{\bar{L}}) \right) \\ &= V_{\bar{L}}^n(x, y) \end{aligned}$$

因此, 存在可行策略 $\bar{L} \in \hat{\Pi}_{x,y}$, 使得 $V^n(x, y) = \sup_{\bar{L} \in \hat{\Pi}_{x,y}} V_{\bar{L}}^n(x, y)$ 。□

推论 5.1 若 $(x, y) \in D^1$, 则 $V^n(x, y) = x - \frac{b_1}{b_2} y + V^n\left(\frac{b_1}{b_2} y, y\right)$ 。

证明。若可行策略 $L = (L_t^1, L_t^2) \in \hat{\Pi}_{x,y}$ 当且仅当可行策略

$$\bar{L} = \left(L_t^1 - x - \frac{b_1}{b_2} y, L_t^2 \right) \in \hat{\Pi}_{\frac{b_1}{b_2} y, y}.$$

由 $V_L^n(x, y) = x - \frac{b_1}{b_2} y + V_{\bar{L}}^n\left(\frac{b_1}{b_2} y, y\right)$ 以及定理 5.1 证得。□

从推论 5.1 可以推导出, 如果 $(x, y) \in D^1$, 则最优迭代值函数是可行策略的极限, 其中满足公司一立即支付 $\left(x - \left(\frac{b_1}{b_2}\right)y\right)$ 作为分红, 因此当前盈余立即转移到区域 \mathcal{M} , 然后盈余过程始终保持在区域 $D^2 \cup \mathcal{M}$ 。直到其中一个公司的盈余变为赤字。根据对称性, D^2 也有类似的结果, 满足公司二立即支付 $\left(y - \left(\frac{b_2}{b_1}\right)x\right)$ 作为分红, 因此当前盈余立即转移到区域 \mathcal{M} 。

5.2. 集合 \mathcal{M} 的最优策略

定义一类可行策略集 $\tilde{\Pi}_{x,y}$ 满足: 若初始盈余 $(x, y) \in D^1 \cup \mathcal{M}$, 则公司一立刻分掉 $x - \left(\frac{b_1}{b_2}\right)y$; 若初始盈余 $(x, y) \in D^2$, 则公司二立刻分掉 $y - \left(\frac{b_2}{b_1}\right)x$ 。使得之后两公司的盈余过程始终保持在 \mathcal{M} 中直到破产。由 $\tilde{\Pi}_{x,y}$ 的定义可知, $\tilde{\Pi}_{x,y} \subset \hat{\Pi}_{x,y} \subset \Pi_{x,y}$, 定义初始盈余 $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, 两公司的盈余过程始终保持在集合 \mathcal{M} 直到破产的迭代值函数为:

$$\tilde{V}^n(x, y) := \sup_{L \in \tilde{\Pi}_{x,y}} V_L^n(x, y)$$

定义 $\bar{V}^n(y)$ 为初始盈余为 $\left(\frac{b_1}{b_2}y, y\right) \in \mathcal{M}$ 的最优策略的值函数, 两公司的盈余过程保持在 \mathcal{M} 上直到其中一个公司破产。

$$\bar{V}^n(y) := \tilde{V}^n\left(\frac{b_1}{b_2}y, y\right) \tag{5.1}$$

根据(5.1)可得,

$$\tilde{V}^n(x, y) = \left(x - \frac{b_1}{b_2}y + \bar{V}^n(y)\right) 1_{\{D^1 \cup \mathcal{M}\}} + \left(y - \frac{b_2}{b_1}x + \bar{V}^n\left(\frac{b_2}{b_1}x\right)\right) 1_{\{D^2\}}$$

若可行策略 $L = (L_t^1, L_t^2) \in \tilde{\Pi}_{\frac{b_1}{b_2}y, y}$, 则 L_t^1 和 L_t^2 的关系满足

$$L_t^1 = \left(p_1 - \frac{b_1}{b_2}p_2\right)t + \frac{b_1}{b_2}L_t^2. \tag{5.2}$$

给定任何可行策略 $L_t^2 \in \Pi_y$, 定义

$$\bar{V}_L^n(y) = \mathbb{E}_y \left[\int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} \left(p_1 - \frac{b_1}{b_2}p_2\right) ds + \int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} \left(1 + \frac{b_1}{b_2}\right) dL_s^2 + e^{-\delta \tau_1} V^{n-1}(Y_{\tau_1}^L) \right]$$

其中 Π_y 是一维复合泊松过程的可行策略族, 初始盈余为 y , 保费率为 p_2 , N_t 表示索赔强度为 λ 的泊松计数过程, 第 i 索赔大小为 $b_2 U_i$ 。

从而,

$$\tilde{V}^n\left(\frac{b_1}{b_2}y, y\right) = \bar{V}^n(y).$$

$\bar{V}^n(y)$ 的 HJB 方程为:

$$\max \left\{ 1 + \frac{b_1}{b_2} - (\bar{V}^n)'(y), \mathcal{L}\bar{V}^n(y) \right\} = 0$$

其中

$$\mathcal{L}\bar{V}^n(y) = p_2(\bar{V}^n)'(y) - (\lambda + \delta)\bar{V}^n(y) + \lambda \int_0^y \bar{V}^{n-1}(y - b_2\alpha) dF(\alpha) + p_1 - \frac{b_1}{b_2}p_2.$$

迭代值函数 $\bar{V}^n(y)$ 的最优分红策略是波段策略。

定理 5.2 迭代值函数 $\bar{V}^n(y)$ 的最优分红策略是波段策略与集合 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 有关。

$$\mathcal{A} := \left\{ y \geq 0 : \bar{\mathcal{L}}(\bar{V}^n)'(y) = 0, (\bar{V}^n)'(y) = 1 + \frac{b_1}{b_2} \right\},$$

$$\mathcal{B} := \left\{ y \geq 0 : \bar{\mathcal{L}}(\bar{V}^n)'(y) < 0, (\bar{V}^n)'(y) = 1 + \frac{b_1}{b_2} \right\},$$

$$\mathcal{C} := \mathbb{R}_+ - \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$$

其中

$$\bar{\mathcal{L}}(\bar{V}^n)'(y) = (p_1 + p_2) - (\lambda + \delta)\bar{V}^n(y) + \lambda \int_0^y \bar{V}^{n-1}(y - b_2\alpha) dF(\alpha)$$

因此, 初始盈余 $\left(\frac{b_1}{b_2}y, y\right) \in \mathcal{M}$, 迭代值函数 $\bar{V}^n(y)$ 的最优分红方式如下:

若盈余 $\left(\frac{b_1}{b_2}y, y\right) \in \mathcal{A}_M$, 则两个公司将所有保费进行分红;

若盈余 $\left(\frac{b_1}{b_2}y, y\right) \in \mathcal{B}_M$, 则公司二支付 a 作为分红, 公司一支付 $\frac{b_1}{b_2}a$ 作为分红, 随后盈余过程返回到

\mathcal{A}_M :

若盈余 $\left(\frac{b_1}{b_2}y, y\right) \in \mathcal{C}_M$, 则公司一以分红率 $p_1 - \frac{b_1}{b_2}p_2$ 分红, 公司二不分红。

5.3. 当 $p_2/p_1 = b_2/b_1$ 时, \tilde{V}^n 是最优值迭代函数

定理 5.3 对于任何的 $y \geq 0$, $V^n\left(\frac{b_1}{b_2}y, y\right) = \bar{V}^n(y)$ 。

证明。对于任何可行策略 $L = (L_t^1, L_t^2) \in \Pi_{\frac{b_1}{b_2}y, y}$ 定义策略 $\bar{L} \in \Pi_{\frac{b_1}{b_2}y, y}$, 满足

$$\bar{L} = (\bar{L}_t^1, \bar{L}_t^2) = (b_1(L_t^1 + L_t^2), b_2(L_t^1 + L_t^2)),$$

因此, $L_t^1 + L_t^2 = \bar{L}_t^1 + \bar{L}_t^2$ 。

根据(3.1)当 $n=1$ 时,

$$V^1\left(\frac{b_1}{b_2}y, y\right) = \sup_{L \in \Pi_{\frac{b_1}{b_2}y, y}} \left(\int_0^{\tau_1} d(L_t^1 + L_t^2) \right) = \sup_{\bar{L} \in \Pi_{\frac{b_1}{b_2}y, y}} \left(\int_0^{\tau_1} d(\bar{L}_t^1 + \bar{L}_t^2) \right) = \bar{V}^1\left(\frac{b_1}{b_2}y, y\right)$$

当 $n=2$ 且 $0 < t < \tau_1$ 时, 对可行策略 $L = (L_t^1, L_t^2) \in \Pi_{\frac{b_1}{b_2}y, y}$, 满足

$$\begin{cases} X_t^L = x + p_1t - L_t^1 \geq 0 \\ Y_t^L = y + p_2t - L_t^2 \geq 0. \end{cases}$$

对可行策略 $\bar{L} = (\bar{L}_1^1, \bar{L}_1^2) \in \Pi_{\frac{b_1}{b_2}, y, y}$, 满足 $\frac{x + p_1 t}{(x + p_1 t) + (y + p_2 t)} = \frac{b_1}{b_1 + b_2}$ 。

$$\begin{aligned} X_t^{\bar{L}} &= x + p_1 t - b_1(L_t^1 + L_t^2) = (x + p_1 t) \left(1 - \frac{L_t^1 + L_t^2}{(x + p_1 t) + (y + p_2 t)} \right) \\ &= (x + p_1 t) \left(\frac{(x + p_1 t - L_t^1) + (y + p_2 t - L_t^2)}{(x + p_1 t) + (y + p_2 t)} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

可以得到

$$\begin{cases} X_t^{\bar{L}} = x + p_1 t - b_1(L_t^1 + L_t^2) \geq 0 \\ Y_t^{\bar{L}} = y + p_2 t - b_2(L_t^1 + L_t^2) \geq 0. \end{cases}$$

因此, 由可行策略的定义, 策略 $\bar{L} = (\bar{L}_1^1, \bar{L}_1^2) \in \Pi_{\frac{b_1}{b_2}, y, y}$ 是可行的。在可行策略 L 下, 若公司一 $X_t^L > 0$ 和公司二 $Y_t^L > 0$, 公司一和公司二均未破产。则在可行策略 \bar{L} 下公司一 $X_t^{\bar{L}} > 0$ 和公司二 $Y_t^{\bar{L}} > 0$ 均未破产, 进而第一次索赔时刻, 可行策略 L 下破产的概率大于可行策略 \bar{L} 下的破产概率。由(3.1), 可行策略 L 的值迭代函数与可行策略 \bar{L} 的值迭代函数

$$\begin{aligned} V^2 \left(\frac{b_1}{b_2} y, y \right) &= \sup_{\bar{L} \in \Pi_{\frac{b_1}{b_2}, y, y}} \mathbb{E}_{\frac{b_1}{b_2}, y, y} \left(\int_0^{\tau_1} d(L_t^1 + L_t^2) + e^{-\delta \tau_1} V^1(x, y) \right) \\ &\leq \sup_{\bar{L} \in \Pi_{\frac{b_1}{b_2}, y, y}} \mathbb{E}_{\frac{b_1}{b_2}, y, y} \left(\int_0^{\tau_1} d(\bar{L}_t^1 + \bar{L}_t^2) + e^{-\delta \tau_1} \bar{V}^1(y) \right) \\ &= \bar{V}^2 \left(\frac{b_1}{b_2} y, y \right). \end{aligned}$$

当 $n = 3$ 时, $\tau_1 < t < \tau_2$, 假设此时两个公司经历第一次索赔, 此时可行策略 \bar{L} 盈余过程满足:

$$\begin{cases} X_t^{\bar{L}} = X_{\tau_1}^{\bar{L}} + p_1(t - \tau_1) - L_t^1 \geq 0 \\ Y_t^{\bar{L}} = Y_{\tau_1}^{\bar{L}} + p_2(t - \tau_1) - L_t^2 \geq 0. \end{cases}$$

对可行策略 $\bar{L} = (\bar{L}_1^1, \bar{L}_1^2) \in \Pi_{\frac{b_1}{b_2}, y, y}$, 在 $\tau_1 < t < \tau_2$, 两公司只经历分红情况并且两公司的分红总和相等。

则应满足 $X_t^{\bar{L}} + Y_t^{\bar{L}} = X_{\tau_1}^{\bar{L}} + Y_{\tau_1}^{\bar{L}} \geq 0$, 由于 $X_{\tau_1}^{\bar{L}} = \frac{b_1}{b_2} Y_{\tau_1}^{\bar{L}}$, 则

$$\begin{cases} X_t^{\bar{L}} = X_{\tau_1}^{\bar{L}} + p_1(t - \tau_1) - b_1(L_t^1 + L_t^2) \geq 0 \\ Y_t^{\bar{L}} = Y_{\tau_1}^{\bar{L}} + p_2(t - \tau_1) - b_1(L_t^1 + L_t^2) \geq 0. \end{cases}$$

进而, 策略 $\bar{L} = (\bar{L}_1^1, \bar{L}_1^2) \in \Pi_{\frac{b_1}{b_2}, y, y}$ 是可行的。

因此, 由可行策略的定义, 策略 $\bar{L} = (\bar{L}_1^1, \bar{L}_1^2) \in \Pi_{\frac{b_1}{b_2}, y, y}$ 是可行的。在可行策略 L 下, 若公司一 $X_t^L > 0$ 和公司二 $Y_t^L > 0$, 公司一和公司二均未破产。则在可行策略 \bar{L} 下公司一 $X_t^{\bar{L}} > 0$ 和公司二 $Y_t^{\bar{L}} > 0$ 均未破产, 进而第一次索赔时刻, 可行策略 L 下破产的概率大于可行策略 \bar{L} 下的破产概率。因此,

$$\begin{aligned} V^3\left(\frac{b_1}{b_2}y, y\right) &= \sup_{L \in \Pi_{\frac{b_1}{b_2}y, y}} \mathbb{E}_{\frac{b_1}{b_2}y, y} \left(\int_0^{\tau_1} d(L_t^1 + L_t^2) + e^{-\delta\tau_1} V^2(X_1^L(t), X_1^L(t)) \right) \\ &\leq \sup_{L \in \Pi_{\frac{b_1}{b_2}y, y}} \mathbb{E}_{\frac{b_1}{b_2}y, y} \left(\int_0^{\tau_1} d(\bar{L}_t^1 + \bar{L}_t^2) + e^{-\delta\tau_1} V^2(X_1^L(t), X_1^L(t)) \right) \\ &= \bar{V}^3\left(\frac{b_1}{b_2}y, y\right). \end{aligned}$$

当 $n > 3$ 时, 过程重复 $n = 3$, 因此得到

$$V_L^n\left(\frac{b_1}{b_2}y, y\right) \leq V_{\bar{L}}^n\left(\frac{b_1}{b_2}y, y\right).$$

即

$$V^n\left(\frac{b_1}{b_2}y, y\right) = \bar{V}^n\left(\frac{b_1}{b_2}y, y\right) = \bar{V}^n(y). \quad \square$$

推论 5.2 迭代值函数 $V^n(x, y) = \bar{V}^n(x, y)$ 。

证明。由定理 5.3 证得。 □

5.4. 当 $p_2/p_1 < b_2/b_1$ 时, \tilde{V}^n 非最优值迭代函数

定理 5.4 任取 $(x, y) \in \mathcal{C}_M$ 是非空的, 值迭代函数 \tilde{V}^n 非 HJB 方程(4.1)的粘性解。

证明。若初始盈余 $(x, y) \in \mathcal{C}_M$, 满足

$$(\bar{V}^n)'(y) > 1 + \frac{b_1}{b_2},$$

$$\mathcal{L}\bar{V}^n(y) = p_2(\bar{V}^n)'(y) - (\lambda + \delta)\bar{V}^n(y) + \lambda g\bar{V}^{n-1}(y) + \left(p_1 - \frac{b_1}{b_2}p_2\right) = 0.$$

若对任何 $\bar{y} > y$, 则

$$\tilde{V}^n(x, \bar{y}) = \bar{y} - y + \bar{V}^n(y) = \bar{y} - \frac{b_2}{b_1}x + \bar{V}^n(y)$$

因此 $\tilde{V}^n(x, \bar{y})$ 可微, 且满足

$$\tilde{V}_x^n(x, \bar{y}) = -\frac{b_2}{b_1} + \frac{b_2}{b_1}(\bar{V}^n)'(y) > 1, \quad \tilde{V}_y^n(x, \bar{y}) = 1.$$

已知 $b_1p_2 < b_2p_1$ 且 $\frac{\bar{y}}{b_2} > \frac{y}{b_2} = \frac{x}{b_1}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tilde{V}^n)(x, \bar{y}) &= p_1\left(-\frac{b_2}{b_1} + \frac{b_2}{b_1}(\bar{V}^n)'(y)\right) + p_2 - (\lambda + \delta)(\bar{y} - y + \bar{V}^n(y)) + \lambda g\bar{V}^{n-1}(y) \\ &= \mathcal{L}(\bar{V}^n)(y) + \left(\frac{p_1b_2}{b_1} - p_2\right)\left((\bar{V}^n)'(y) - 1 - \frac{b_2}{b_1}\right) - (\bar{y} - y)(\lambda + \delta) + \lambda(\bar{y} - y)G\left(\frac{y}{b_2}\right). \end{aligned}$$

当 $\bar{y} \rightarrow y$ 时, 得到 $\mathcal{L}(\tilde{V}^n)(x, \bar{y}) > 0$ 矛盾, \tilde{V}^n 在 (x, \bar{y}) 非 HJB 方程(4.1)的粘性解。

6. 辅助优化问题

下面根据参考文献[13]的方法, 给出了辅助优化问题的完整解答。

对任意的 $y \in \mathbb{R}_+$, 存在非负的、非减的连续函数 $\bar{W}_0(y)$, 满足 $\bar{W}_0(y) \leq \bar{V}^n(y)$, 考虑如下辅助优化函数 $\bar{W}(y)$

$$\bar{W}(y) = \sup_{L \in \Pi_y} \bar{W}_L(y)$$

其中

$$\bar{W}_L(y) = \mathbb{E}_y \left(\int_0^{\tau_1} e^{-\delta s} \left(1 + \frac{b_1}{b_2} \right) dL_s^2 + e^{-\delta \tau_1} \bar{W}_0(Y_{\tau_1}^L) \right).$$

辅助优化函数 W 的 HJB 方程:

$$\max \left\{ 1 + \frac{b_1}{b_2} - \bar{W}'(y), (p_2 + iy)\bar{W}'(y) - (\lambda + \delta)\bar{W}(y) + \lambda \mathcal{G}\bar{W}_0(y) \right\} = 0.$$

其中

$$\mathcal{G}\bar{W}_0(y) = \int_0^y \bar{W}_0(y - b_2 \alpha) dF(\alpha).$$

对任意的 $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, 不妨设 $x > \frac{b_1}{b_2}y$, $W(x, y)$ 与 $\bar{W}(y)$ 满足

$$W(x, y) = x - \frac{b_1}{b_2}y + \bar{W}(y).$$

6.1 辅助函数及性质

对于 $y \in \mathbb{R}_+$, 令

$$\bar{G}(y) = \frac{p_2}{b_2(\lambda + \delta)} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \mathcal{G}\bar{W}_0(y),$$

设 $\bar{W}_a(y)$ 为方程 $\bar{W}_a(a) = \bar{G}(a)$ 与 $p_2 \bar{W}'(y) - (\lambda + \delta)\bar{W}(y) + \lambda \mathcal{G}\bar{W}_0(y) = 0$ 的解, 得到

$$\bar{W}_a(y) = e^{-\frac{\lambda + \delta}{p_2}(a-y)} \bar{G}(a) + \frac{\lambda}{p_2} \int_y^a e^{-\frac{\lambda + \delta}{p_2}(v-y)} \mathcal{G}\bar{W}_0(v) dv.$$

令

$$\bar{U}_a(y) = \bar{G}(a) + y - \left(1 + \frac{b_1}{b_2} \right) a.$$

6.2. 值函数和最优策略

令 $\bar{G}_{\max}(y)$ 为 $\bar{G}(y) - \left(1 + \frac{b_1}{b_2} \right) y$ 的最大值, 即

$$\bar{G}_{\max}(y) = \max_{0 \leq u \leq y} \left(\bar{G}(u) - \left(1 + \frac{b_1}{b_2} \right) u \right),$$

假设 $\mathcal{A}_{\max} \in \mathcal{M}$ 有限个点, 即

$$\mathcal{A}_{\max} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}, 0 \leq a_i \leq a_{i+1}.$$

当 $i=1, 2, \dots, n$ 时, 令

$$a_1^* = \min \arg \max \{ \bar{W}_a(0) : a \in \bar{\mathcal{A}}_{\max} \}$$

$$a_i^* = \min \arg \max \{ \bar{W}_a(0) : a \in \bar{\mathcal{A}}_{\max}, a_{i-1}^* < a \}.$$

当 $i=1, 2, \dots, n-1$ 时, 令

$$b^* = \max \{ b : W_{a_{i+1}^*}(b) = U_{a_i^*}(b), a_i^* \leq b < a_{i+1}^* \}$$

定理 6.1 设集合 \mathcal{A}_{w_0} 是有限的。设 $\mathcal{A}_{w_0}^*$ 和 $\mathcal{B}_{w_0}^*$ 分别由 a_1^*, a_{i+1}^* 和 b^* 定义。则值函数 $\bar{W}(y)$ 如下,

$$\bar{W}(y) = \begin{cases} \bar{W}_{a_i^*}(y) & \text{当 } 0 \leq y \leq a_i^*; \\ \bar{U}_{a_i^*}(y) & \text{当 } a_i^* \leq y \leq b_i^* \text{ 且 } i=1, 2, \dots, d^*; \\ \bar{W}_{a_{i+1}^*}(y) & \text{当 } b_i^* \leq y \leq a_{i+1}^* \text{ 且 } i=1, 2, \dots, d^*-1; \\ \bar{U}_{a_{d^*}^*}(y) & \text{当 } a_{d^*}^* \leq y. \end{cases}$$

最优分红策略 L^* 是波段策略, 满足 $\bar{W}_{L^*} = \bar{W}$ 有波段划分为:

$$\mathbb{A}_{w_0}^* = \{a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*\},$$

$$\mathbb{B}_{w_0}^* = \left(\bigcup_{i=1}^{d^*-1} [a_i^*, b_i^*] \right) \cup [a_{d^*}^*, \infty)$$

$$\mathbb{C}_{w_0}^* = [0, a_1^*] \cup \left(\bigcup_{i=1}^{d^*-1} [b_i^*, a_{i+1}^*] \right).$$

7. 数值分析

定义 7.1: $\bar{S}_n = \{s_1^n, s_2^n, \dots, s_{d^n}^n\}$, S_n 收敛 S 当且仅当 $\limsup_{n \rightarrow \infty} |s_i^n - s_i| = 0$ 。

命题 7.1: 假设当 $n \geq 1$ 时 $\mathcal{A}_n^*, \mathcal{B}_n^*$ 有定义, 如果存在子列 $\{\mathcal{A}_{n_k}^*\}, \{\mathcal{B}_{n_k}^*\}$ 使得 $\mathcal{A}_{n_k}^*, \mathcal{B}_{n_k}^*$ 分布收敛到 $\mathcal{A}_n^*, \mathcal{B}_n^*$, 值函数 V 与具有波段划分 $\mathcal{A}_n^*, \mathcal{B}_n^*$ 的波段策略对应的值函数相对应。

7.1. 策略迭代步骤

步骤 0: 令 $n=0$ 且 $\bar{V}^0(y) = 0$ 。

步骤 1: 策略优化

(1) 记所有 $\bar{G}'(y^+) = 1 + \frac{b_1}{b_2}$ 解的集合为 $\bar{\xi}_n$;

(2) 令 $a_0^n = 0$, 记 $\bar{\mathcal{A}}_n$ 是 a_i^n 的所有集合,

$$a_i^n := \min \{ a > a_{i-1}^n : a \in \bar{\xi}_n \text{ 和 } \lambda \mathcal{G}\bar{V}(a) - (\lambda + \delta)a > \lambda \mathcal{G}V^{n-1}(a_{i-1}^n) - (\lambda + \delta)a_{i-1}^n \};$$

(3) 根据下面式子递归得到 a_i^n

$$a_1^n = \min \arg \max \{ \bar{W}_a^n(0) : a \in \bar{\mathcal{A}}_n \}$$

$$a_i^n = \min \arg \max \{ \bar{W}_a^n(0) : a \in \bar{\mathcal{A}}_n \text{ 和 } a > a_{i-1}^n \}$$

(4) b_i^n 为方程 $\bar{W}_{a_{i+1}^n}^n(y) = \bar{U}_{a_i^n}^n(y)$ 的解。

$$\bar{W}_a^n(y) = e^{-\frac{\lambda+\delta}{p_2}(a-y)} \bar{G}(a) + \frac{\lambda}{p_2} \int_y^a e^{-\frac{\lambda+\delta}{p_2}(v-y)} \mathcal{G}V^{n-1}(v) dv.$$

$$\bar{U}_a(y) = \bar{G}(a) + \left(1 + \frac{b_1}{b_2}\right)(y-a).$$

步骤 2: 策略迭代 n 次, 计算迭代值函数 $\bar{V}^n(y)$ 。

步骤 3: 对任意 $\varepsilon > 0$, 若 $\sup_i |a_i^* - a_{i-1}^*| < \varepsilon$, 停止迭代, 否则按照步骤 2 重复操作。

7.2. 数值例子

例 1 (伽马函数) 设伽马分布的索赔额分布为 $\Gamma(\alpha, \beta)$, 概率密度函数为 $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ 。运用 Matlab, 令 $p_1 = 8$, $p_2 = 20$, $\lambda = 10$, $\delta = 0.1$ 。得到图 1。

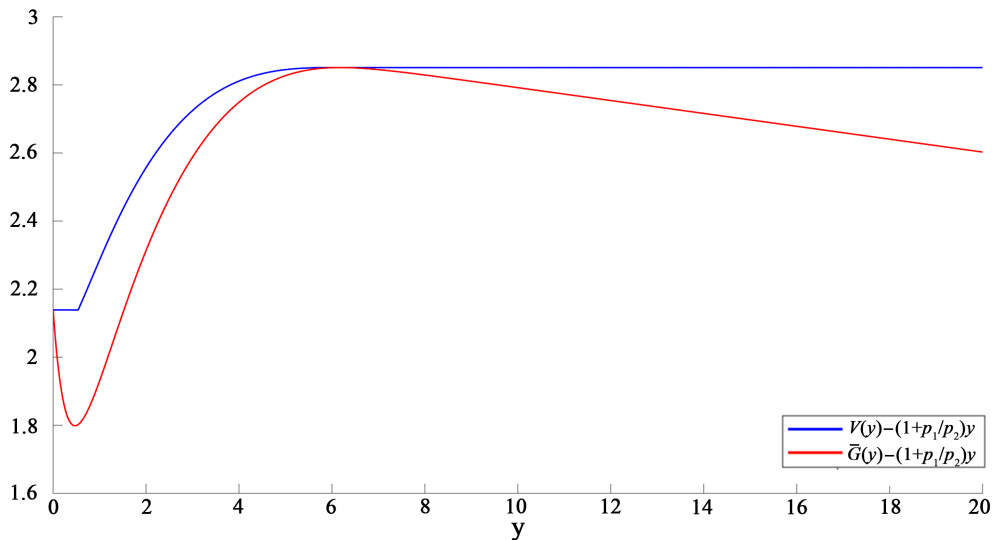


Figure 1. Claims follow a gamma distribution
图 1. 索赔服从伽马分布

由此得到最优波段划分 $A^* = \{0, 6.1844\}$, $B^* = \{0, 0.5375\} \cup (6.1844, \infty)$, $C^* = \{0.5375, 6.1844\}$ 。

参考文献

- [1] De Finetti, B. (1957) Su un' impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio. *Transactions of the XVth International Congress of Actuaries*, 433-443.
- [2] Gerber, H.U. (1969) Entscheidungskriterien für den zusammengesetzten Poisson-Prozess. Ph.D. Thesis, ETH Zurich.
- [3] Azcue, P. and Muler, N. (2005) Optimal Reinsurance and Dividend Distribution Policies in the Cramér-Lundberg Model. *Mathematical Finance*, **15**, 261-308. <https://doi.org/10.1111/j.0960-1627.2005.00220.x>
- [4] Chan, W., Yang, H. and Zhang, L. (2003) Some Results on Ruin Probabilities in a Two-Dimensional Risk Model. *Insurance: Mathematics and Economics*, **32**, 345-358. [https://doi.org/10.1016/s0167-6687\(03\)00115-x](https://doi.org/10.1016/s0167-6687(03)00115-x)
- [5] 王泉, 张奕. 考虑常利率的二维离散风险模型的破产概率[J]. 浙江大学学报, 2008, 35(5): 501-506.
- [6] Cheng, J. and Wang, D. (2016) Ruin Probabilities for a Two-Dimensional Perturbed Risk Model with Stochastic Premiums. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **32**, 1053-1066. <https://doi.org/10.1007/s10255-016-0626-1>
- [7] Gu, J., Steffensen, M. and Zheng, H. (2018) Optimal Dividend Strategies of Two Collaborating Businesses in the

-
- Diffusion Approximation Model. *Mathematics of Operations Research*, **43**, 377-398. <https://doi.org/10.1287/moor.2017.0860>
- [8] Azcue, P. and Muler, N. (2021) A Multidimensional Problem of Optimal Dividends with Irreversible Switching: A Convergent Numerical Scheme. *Applied Mathematics & Optimization*, **83**, 1613-1649. <https://doi.org/10.1007/s00245-019-09602-0>
- [9] Hernández-Lerma, O. and Lasserre, J.B. (1997) Policy Iteration for Average Cost Markov Control Processes on Borel Spaces. *Acta Applicandae Mathematica*, **47**, 125-154. <https://doi.org/10.1023/a:1005781013253>
- [10] Thonhauser, S. and Albrecher, H. (2011) Optimal Dividend Strategies for a Compound Poisson Process under Transaction Costs and Power Utility. *Stochastic Models*, **27**, 120-140. <https://doi.org/10.1080/15326349.2011.542734>
- [11] Albrecher, H., Azcue, P. and Muler, N. (2017) Optimal Dividend Strategies for Two Collaborating Insurance Companies. *Advances in Applied Probability*, **49**, 515-548. <https://doi.org/10.1017/apr.2017.11>
- [12] Azcue, P., Muler, N. and Palmowski, Z. (2019) Optimal Dividend Payments for a Two-Dimensional Insurance Risk Process. *European Actuarial Journal*, **9**, 241-272. <https://doi.org/10.1007/s13385-018-0182-6>
- [13] Liu, G., Liu, X. and Liu, Z. (2022) The Policy Iteration Algorithm for a Compound Poisson Process Applied to Optimal Dividend Strategies under a Cramér-Lundberg Risk Model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **413**, Article 114368. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114368>