

线性空间中集优化问题的稳定性

平 净

重庆理工大学数学科学学院, 重庆

收稿日期: 2026年3月19日; 录用日期: 2026年4月11日; 发布日期: 2026年4月23日

摘 要

本文研究线性空间中的集优化问题, 其中解的概念由下集序关系定义。在不依赖拓扑结构的前提下, 从代数意义的收敛性、紧致性与开集性出发, 借助这些概念以及Painlevé-Kuratowski收敛性, 获得了近似弱极小解的稳定性结果。

关键词

集优化问题, 稳定性, 线性空间

Stability of Set Optimization Problems in Linear Spaces

Jing Ping

School of Mathematical Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: March 19, 2026; accepted: April 11, 2026; published: April 23, 2026

Abstract

This paper investigates set optimization problems in linear spaces, where the concept of solutions is defined via the set less order relation. Without relying on a topological structure, by using algebraic notions of convergence, compactness, and openness, together with Painlevé-Kuratowski convergence, stability results for approximate weak minimal solutions are established.

Keywords

Set Optimization Problems, Stability, Linear Spaces



1. 绪论

自 Kuroiwa [1] 首先引入了以集合整体为单位的集序关系的概念并得到相关性质后, 集优化问题的研究引起了很多学者的兴趣, 而关于集优化问题近似解的稳定性亦是集优化研究的核心课题之一。一些实用的集优化模型定义于无拓扑结构的实线性空间中[2], 且即使序锥的拓扑内部为空, 其代数内部仍可能非空, 这使得基于代数框架对此类问题的研究具有重要意义。

受此启发, 本文在非可度量的线性拓扑空间中探讨集优化问题。我们通过代数意义下定义收敛性、紧致性与开集性, 结合 Painlevé-Kuratowski 收敛性, 我们证明了近似弱极小解的稳定性, 为相关问题的后续研究与应用提供了重要的理论支撑。

2. 预备知识

在本篇论文中, 若无特殊说明, 我们设 X 为实赋范线性空间, Y 为实线性空间。 X 和 Y 上所有非空子集族分别记为 $\mathcal{P}(X)$ 与 $\mathcal{P}(Y)$ 。对任意集合 $A \in \mathcal{P}(Y)$, A 的代数内部(记为 $\text{core}A$)与向量闭包(记为 $\text{vcl}A$) [3], 分别定义为

$$\text{core}A := \{a \in A : \forall h \in Y, \exists \lambda > 0, \forall \delta \in [0, \lambda], a + \delta h \in A\}$$

与

$$\text{vcl}A := \{a \in A : \exists h \in Y, \forall \lambda > 0, \exists \delta \in]0, \lambda], a + \delta h \in A\}.$$

对集合 $A \in \mathcal{P}(Y)$ 。若 $\text{vcl}A = A$, 则称 A 为代数闭的; 若 $\text{core}A = A$, 则称 A 为代数开的; 若 $A \cap (-A) = \{0\}$, 则称 A 是尖的; 若满足

$$\lambda a \in A, \forall a \in A, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

则称 A 是 Y 中的锥。若 A 满足

$$\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 \in A, \forall a_1, a_2 \in A, \lambda \in [0, 1],$$

则称 A 为 Y 中的凸集。显然, A 为凸锥当且仅当对任意 $a_1, a_2 \in A$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$ 有

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \in A.$$

设 K 是 Y 中的一个代数闭, 尖, 凸锥, 且满足 $\text{core}K \neq \emptyset$ 。

设 $A, B \in \mathcal{P}(Y)$, 我们记 $A+B := \{a+b : a \in A, b \in B\}$, $A-B := \{a-b : a \in A, b \in B\}$, $A \setminus B := \{x : x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 。

设 $F: X \rightrightarrows Y$ 为集值映射, 其图记为 $\text{graph}F$, 定义为

$$\text{graph}F := \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

下集序关系(\preceq_c^l)和弱下集序关系(\prec_c^l)分别定义为

$$A \preceq_c^l B \Leftrightarrow B \subseteq A+C$$

和

$$A \prec_c^l B \Leftrightarrow B \subseteq A+\text{core}C.$$

定义 1 [4] 设 $A \in \mathcal{P}(Y)$

(a) A 称为平衡集: 如果对任意 $a \in A$, 任意 $\lambda \in [-1, 1]$, 我们有 $\lambda a \in A$;

(b) A 称为吸收集: 如果对任意 $y \in Y$, 存在 $\lambda' > 0$, 任意 $\lambda \in [0, \lambda']$, 我们有 $\lambda y \in A$ 。

$U(0)$ 表示 Y 中所有凸的, 平衡吸收集所构成的集合。

定义 2 [4] 设 $y_0 \in Y$, 序列 $\{y_n\} \subseteq Y$ 。若对任意 $U \in U(0)$, 存在正整数 $N_0 \in \mathbb{N}^+$, 使得当 $n > N_0$ 时, 有 $y_n \in y_0 + U$, 则称序列 $\{y_n\}$ I -收敛于 y_0 , 记作 $y_n \xrightarrow{i} y_0$ 。

注记 1

(a) 对于上述给定的 N_0 与 U , 考虑子列的下标 n_k 。由于 $n_k \geq k > N_0$, 故有 $y_{n_k} \in y_0 + U$ 。因此, I -收敛序列必有 I -收敛子列。

(b) 由于 U 是凸集, 且同时为平衡集与吸收集。若 $y_n \xrightarrow{i} y_0$, 则对任意实数 $\lambda \geq 0$, 易证 $\lambda y_n \xrightarrow{i} \lambda y_0$ 。

(c) 对任意 $y \in Y$ 及正数 α , 当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 由 U 的吸收性质, 易得 $\alpha y \xrightarrow{i} 0$ 。

下面将考虑经典的集合序列收敛性概念。

定义 3 [4] 设序列 $\{A_n\} \subseteq Y$, $\{B_n\} \subseteq X$, 其中 $n \in \mathbb{N}$ 。我们定义:

(a) $I\text{-Ls}A_n := \{y \in Y : \exists y_{n_k} \in A_{n_k} \text{ 使得 } y_{n_k} \xrightarrow{i} y, k \in \mathbb{N}\}$;

(b) $I\text{-Li}A_n := \{y \in Y : \exists y_n \in A_n \text{ 使得 } y_n \xrightarrow{i} y\}$ 。

若集合序列 $\{A_n\}$ 满足 $I\text{-Ls}A_n \subseteq A \subseteq I\text{-Li}A_n$, 则称集合序列 $\{A_n\}$ 在 Painlevé-Kuratowski 意义下 I -收敛于 Y 的子集 A , 记作 $A_n \xrightarrow{P.K_i} A$ 。若满足 $I\text{-Ls}A_n \subseteq A \subseteq I\text{-Li}A_n$ (则称 $\{A_n\}$ 关于 A 的 Painlevé-Kuratowski I -上收敛(I -下收敛), 分别记为 $A_n \xrightarrow{P.K_i} A$ ($A_n \xrightarrow{P.K_i} A$)。

定义 4 [4] 设 $x_0 \in X$, $F: X \rightrightarrows Y$ 为集值映射。如果对任意序列 $\{(x_n, y_n)\} \subseteq \text{graph}F$, 若 $x_n \rightarrow x_0$, 则存在子列 $\{y_{n_k}\}$ 及一点 $y_0 \in F(x_0)$, 使得 $y_{n_k} \xrightarrow{i} y_0$, 则称 F 在点 x_0 处是 I -紧的,

注记 3 称集值映射 F 在子集 $S \subseteq X$ 上是 I -紧的, 若 F 在每一点 $x_0 \in S$ 处均为 I -紧的。

定义 5 [4] 设 $F: X \rightrightarrows Y$ 为集值映射, $V \in \mathcal{P}(Y)$, $S \in \mathcal{P}(X)$ 。

(a) 称 V 为 I -开集, 如果对任意 $y \in V$, 存在 $U \in U(0)$, 使得 $y + U \subseteq V$;

(b) 称 F 在 S 上是 I -开映射, 如果对任意 $x \in S$, $y \in F(x)$, 存在 $U \in U(0)$, 使得 $y + U \subseteq F(x)$ 。

注记 4 若 F 在 S 上是 I -开映射, 则对任意 $x_1 \in S$, 像集 $F(x_1)$ 是 I -开集。

3. 本文主要结果

设 $S \in \mathcal{P}(X)$, $F: X \rightrightarrows Y$ 为定义在 S 上的集值映射。我们考虑如下集优化问题:

$$(SOP) \min F(x) \text{ s.t } x \in S.$$

下面我们引入(SOP)的弱极小解与近似弱极小解的概念。

定义 6 设 $\varepsilon \geq 0$, $e \in \text{core}C$ 。若元素 $x_0 \in S$ 满足以下条件, 则称其为

(a) (SOP)的弱极小解: 对任意 $x \in S$, 有 $F(x) \not\prec_C^l F(x_0)$;

(b) (SOP)的近似弱极小解: 对任意 $x \in S$, 有 $F(x) + \varepsilon e \not\prec_C^l F(x_0)$ 。

(SOP)的弱极小解与近似弱极小解分别记为 $W(F, S, C)$ 和 $W(F, S, C, \varepsilon)$ 。

命题 1 对任意 $\varepsilon \geq 0$, $e \in \text{core}K$ 。若 $x_0 \in W(F, S, K)$, 则 $x_0 \in W(F, S, K, \varepsilon)$ 。

证明: 当 $\varepsilon = 0$ 时, 结论显然成立。当 $\varepsilon \neq 0$ 时, 由于 $x_0 \in W(F, S, K)$, 根据定义 6 可知, 对任意 $x \in S$, 有

$$F(x_0) \not\subseteq F(x) + \text{core}K. \tag{1}$$

假设 $x_0 \notin W(F, S, K, \varepsilon)$, 则根据定义 6 可知, 存在 $\bar{x} \in S$, 使得 $F(\bar{x}) + \varepsilon e \prec_k^l F(x_0)$, 即

$F(x_0) \subseteq F(\bar{x}) + \varepsilon e + \text{core}K$ 。注意到 $\varepsilon e \in \text{core}K$ ，故

$$\begin{aligned} F(x_0) &\subseteq F(\bar{x}) + \varepsilon e + \text{core}K \\ &\subseteq F(\bar{x}) + \text{core}K + \text{core}K \\ &\subseteq F(\bar{x}) + \text{core}K. \end{aligned}$$

这与式(1)矛盾。因此， $x_0 \in W(F, S, K, \varepsilon)$ 。

命题 2 [4] 设序列 $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq Y$ ，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 。若 $a_n \xrightarrow{i} a$ ， $b_n \xrightarrow{i} b$ ，则 $a_n + b_n \xrightarrow{i} a + b$ 。

命题 3 [4] 设 $V \in \mathcal{P}(Y)$ 为一个 I -开集。对任意序列 $\{a_n\} \subseteq Y$ ，若 $a_n \xrightarrow{i} a$ 且 $a_n \notin V$ ，则 $a \notin V$ 。

定义 7 [5] 称集优化问题(SOP)在子集 $S \subseteq X$ 上满足弱可控性，如果对任意 $x \in S$ ，要么 $x \in W(F, S, K)$ ，要么存在 $x_0 \in W(F, S, K)$ ，使得 $F(x_0) \prec_k^l F(x)$ 。

下面我们研究扰动问题的近似弱极小解集的 Painlevé-Kuratowski 收敛性。设 K_n 是 Y 中的代数闭，尖，凸序锥，且满足 $\text{core}K_n \neq \emptyset$ ， $e_n \in \text{core}K_n$ 。

定理 1 设 $\{K_n\}$ 是 Y 中的一列代数闭，尖，凸锥，满足 $\text{core}K_n \xrightarrow{\text{P.K.}} \text{core}K$ ，并设 $e_n \in \text{core}K_n$ ， $e \in \text{core}K$ 满足 $e_n \xrightarrow{i} e$ 。若 F 在 $S \setminus W(F, S, K)$ 上是 I -紧的，在 $W(F, S, K)$ 上是 I -开映射，且(SOP)在 S 上满足弱可控性，则

$$W(F, S, K_n, \varepsilon) \xrightarrow{\text{P.K.}} W(F, S, K, \varepsilon), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

证明：根据定义 3，只需证明

$$\text{Ls}W(F, S, K_n, \varepsilon) \subseteq W(F, S, K, \varepsilon).$$

设 $x_0 \in \text{Ls}W(F, S, K_n, \varepsilon)$ ，则存在子列 $\{x_{n_i}\} \subseteq W(F, S, K_{n_i}, \varepsilon)$ ，使得 $x_{n_i} \rightarrow x_0$ 。由于 $x_{n_i} \in W(F, S, K_{n_i}, \varepsilon)$ ，由定义可知

$$F(x) + \varepsilon e_{n_i} \not\prec_k^l F(x_{n_i}), \quad \forall x \in S \tag{2}$$

即

$$F(x_{n_i}) \not\subseteq F(x) + \text{core}K_{n_i} + \varepsilon e_{n_i}, \quad \forall x \in S. \tag{3}$$

因此，存在 $y_{n_i} \in F(x_{n_i})$ ，使得

$$y_{n_i} \notin F(x) + \text{core}K_{n_i} + \varepsilon e_{n_i}, \quad \forall x \in S. \tag{4}$$

假设 $x_0 \notin W(F, S, K, \varepsilon)$ ，则存在 $x_1 \in S$ ，使得

$$F(x_1) + \varepsilon e \prec_k^l F(x_0). \tag{5}$$

由于(SOP)满足弱可控性，结合命题 1，可知 $x_0 \notin W(F, S, K)$ 。不妨设

$$x_1 \in W(F, S, K) \subseteq W(F, S, K, \varepsilon). \tag{6}$$

于是有

$$F(x_1) + \varepsilon e \prec_k^l F(x_0), \tag{7}$$

即

$$F(x_0) \subseteq F(x_1) + \varepsilon e + \text{core}K. \tag{8}$$

由于 F 在 x_0 处是 I -紧的，由定义 4 可知，存在子列 $\{y_{n_m}\} \subseteq \{y_{n_i}\}$ 及点 $y_0 \in F(x_0)$ ，使得 $y_{n_m} \xrightarrow{i} y_0$ 。

由式(8)知, $y_0 \in F(x_1) + \varepsilon e + \text{core}K$, 故存在 $c \in \text{core}K$, 使得

$$y_0 - c - \varepsilon e \in F(x_1). \tag{9}$$

又因 $\text{core}K_n \xrightarrow{P.K_i} \text{core}K$, 根据定义 3, 有 $\text{core}K \subseteq I\text{-Licore}K_n$, 从而 $c \in I\text{-Licore}K_n$. 因此, 存在序列 $c_n \in \text{core}K_n$, 使得 $c_n \xrightarrow{i} c$, 再由注记 1 知, 存在子列 $c_{n_m} \in \text{core}K_{n_m}$ 使得 $c_{n_m} \xrightarrow{i} c$. 另一方面, 由式(4)可知, 对每个 m , 存在 $y_{n_m} \in F(x_{n_m})$ 使得

$$y_{n_m} \notin F(x_1) + \text{core}K_{n_m} + \varepsilon e_{n_m}. \tag{10}$$

于是, 对子列 $c_{n_m} \in \text{core}K_{n_m}$, 由式(10)可得

$$y_{n_m} - c_{n_m} - \varepsilon e_{n_m} \notin F(x_1). \tag{11}$$

结合式(11), 命题 2 及注记 1, 我们可推出

$$y_{n_m} - c_{n_m} - \varepsilon e_{n_m} \xrightarrow{i} y_0 - c - \varepsilon e. \tag{12}$$

根据注记 4, 可知 $F(x_1)$ 是一个 I -开集, 进一步, 利用式(12)和命题 3, 我们得到

$$y_0 - c - \varepsilon e \notin F(x_1). \tag{13}$$

这与式(9)矛盾, 因此假设不成立。从而 $x_0 \in W(F, S, K, \varepsilon)$ 。

基金项目

该工作由国家自然科学基金项目资助(项目编号: 12171061)。重庆理工大学研究生创新项目(项目编号: gzlcx20253358)。

参考文献

- [1] Kuroiwa, D. (1998) The Natural Criteria in Set-Valued Optimization (Nonlinear Analysis and Convex Analysis). *The Institute of Mathematical Analysis Emphasizes Recording*, **1031**, 85-90.
- [2] Aubin, J.P. and Frankowska, H. (2009) Set-Valued Analysis. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4848-0>
- [3] Zhao, K.Q, Rong, W.D. and Yang, X.M. (2016) New Nonlinear Separation Theorems and Applications in Vector Optimization. *Scientia Sinica Mathematica*, **47**, 533-544. <https://doi.org/10.1360/n012014-00235>
- [4] 欧阳磊. 当拓扑内部为空集时集优化问题的近似弱有效解与近似全局真有效解[D]: [硕士学位论文]. 南昌: 南昌大学, 2022.
- [5] Luc, D.T. (1989) Theory of Vector Optimization. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-50280-4>