

# 一种基于Lagrange插值的新高阶三步迭代算法

刘尚\*, 欧娜, 谭艳祥, 张瑗, 梅元倩

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2026年3月20日; 录用日期: 2026年4月11日; 发布日期: 2026年4月23日

## 摘要

本文基于一个求解非线性方程的三阶迭代法, 引入Lagrange插值思想来估计其导数, 构造出一种新的高阶迭代法。并给出收敛性分析。可以发现只需要增加一个函数值计算, 能够将一个四阶的迭代法的收敛阶提高到五阶。我们给出了五阶收敛性的理论分析, 进一步通过数值实验验证了新的迭代法的有效性, 对非线性方程问题的求解具有一定的实际应用价值。

## 关键词

非线性方程, 迭代法, 线性插值, 高阶收敛, MATLAB

# A New High-Order Three-Step Iterative Method Based on Lagrange Interpolation Method

Shang Liu\*, Na Ou, Yanxiang Tan, Yuan Zhang, Yuanqian Mei

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: March 20, 2026; accepted: April 11, 2026; published: April 23, 2026

## Abstract

This paper primarily discusses iterative methods for solving nonlinear equations. Based on a third-order iterative method for solving nonlinear equations, we introduce an Lagrange interpolation approach to estimate its derivative, thereby constructing a new high-order iterative method. A convergence analysis is also provided. It is found that by adding just one function evaluation, the convergence order of a fourth-order iterative method can be increased to fifth order. We provide a

\*通讯作者。

**theoretical proof of the fifth-order convergence and further verify the effectiveness of the new iterative method through numerical experiments, demonstrating its potential value in solving nonlinear equations.**

## Keywords

**Nonlinear Equation, Iterative Method, Linear Interpolation, High-Order Convergence, MATLAB**

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在解决科学与工程实际问题中, 求解非线性方程是一种非常重要的数学问题, 非线性方程的迭代法在解决非线性方程问题的作用日益增加, 很多科学研究工作者进行了大量的研究。近年来, 有很多学者在前人的研究基础上提出了新的研究方法。张旭[1]基于 Newton-Cotes 积分公式, 构造了几种新的迭代格式, 并在论文中证明了这三种新的迭代格式具有高阶收敛性。进一步通过引入两个参数在一定条件下所构造的这种加速收敛迭代格式能够达到高阶收敛。单吉宁等[2]根据 Weerakoon 和 Fernando 在论文中给出的三阶算术平均牛顿法和经典牛顿法, 利用线性插值法, 提出了一种新的改进高阶牛顿法, 进一步证明了该方法收敛阶可达 6 阶的高收敛阶。张辉等[3]在文中探讨了求非线性方程组的解三种五阶牛顿预估-校正迭代格式, 并进行收敛性分析证明这些新的迭代算法具有五阶收敛性。黄娜等研究工作者[4]构造了一种新的三阶迭代方法, 并证明了这个公式三阶收敛, 最后通过数值实验, 将这个新三阶迭代方法与几种经典的迭代算法进行非线性方程的求解, 分别从 CPU 时间、迭代次数、误差和收敛阶数四个指标进行比较可以发现, 该新算法都更有效。王小瑞等[5]以带参数条件  $y_n = x_n - \theta \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  ( $0 < \theta \leq 1$ ) 为基础,

在带有参数条件下, 提出和构造了一类新的两步迭代方法, 获得高阶的收敛阶结果, 并且说明了该方法在  $n = 3$  时是符合 Kung-Traub 猜想的, 对算法通过数值验证分析比较, 可以发现新的两步迭代方法明显优于牛顿迭代法及一些已存在的其他经典迭代方法, 具有高效性和较好可行性。Ozban [6] 在论文中通过使用直角梯形的两个底数之和的平均面积来代替弧形处的梯形面积, 在此基础上提出了中点牛顿迭代方法。同时, 他还从几何意义上提出了一种调和平均牛顿迭代方法。

综上所述, 针对非线性方程  $f(x) = 0$  的求解问题, 大量科学研究工作者提出了很多经典迭代法[7], 如牛顿法, 中点牛顿迭代法和调和平均牛顿法等算法, 我们在本论文中考虑利用插值方法来估计导函数, 提出了一种仅需要添加一个函数值计算就能将低阶的迭代法提高到高阶收敛性的新三步算法, 并给出了其高阶收敛性的证明定理。进一步通过几个数值实验和实际应用验证了新三步迭代法的高阶性和有效性。

## 2. 改进的新三步迭代法构造

在文献[2]中, 单吉宁在算术平均牛顿法的基础上, 利用线性插值的方法, 提出了一种新型牛顿法。在文献[5]中, 以  $y_n = x_n - \theta \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  ( $0 < \theta \leq 1$ ) 为基础获得了一种改进的三步牛顿法, 本文基于此三步迭代法, 利用线性插值法思想来代替求导数, 提出了一种新的高阶三步迭代法。我们结合牛顿法

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  和三阶迭代法:

$$\begin{cases} z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{3f'(x_n)} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n) + f'(z_n)}{4f'(z_n) - 2f'(x_n)} \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \quad (2.1)$$

令  $z_n$  保持不变

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{3f'(x_n)}, \quad (2.2)$$

再将  $x_{n+1}$  令为  $y_n$ , 则得到关于  $y_n$  的表达式:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{f'(x_n) + f'(z_n)}{4f'(x_n) - 2f'(z_n)}, \quad (2.3)$$

将(2.3)代入牛顿迭代公式可得迭代函数  $x_{n+1}$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} \quad (2.4)$$

为了简化迭代计算, 已知点  $(x_n, f'(x_n))$  以及点  $(z_n, f'(z_n))$ , 利用线性插值公式, 对  $f'(y_n)$  进行估计, 最后可得  $f'(y_n)$  的估计

$$f'(x) \approx \frac{x - x_n}{z_n - x_n} f'(z_n) + \frac{x - z_n}{x_n - z_n} f'(x_n) \quad (2.5)$$

将  $y_n$  代入

$$f'(y_n) \approx \frac{y_n - x_n}{z_n - x_n} f'(z_n) + \frac{y_n - z_n}{x_n - z_n} f'(x_n) \quad (2.6)$$

将式(2.3)代入式(2.6), 综合可得

$$f'(y_n) \approx \frac{f(x_n)}{z_n - x_n} \frac{f'(x_n) + f'(z_n)}{4f'(x_n) - 2f'(z_n)} \left[ 1 - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \right] + f'(x_n) \quad (2.7)$$

结合式(2.4)和式(2.7)可得

$$f'(y_n) \approx 3[f'(z_n) - f'(x_n)] \frac{f'(x_n) + f'(z_n)}{4f'(x_n) - 2f'(z_n)} + f'(x_n) \quad (2.8)$$

综上即获得下述新的迭代法

$$\begin{cases} y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{f'(x_n) + f'(z_n)}{4f'(x_n) - 2f'(z_n)} \\ z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{3f'(x_n)} \\ x_{n+1} = y_n - \frac{2f(y_n)[2f'(z_n) - f'(x_n)]}{4f'(z_n)f'(x_n) - 5[f'(x_n)]^2 + 3[f'(z_n)]^2} \end{cases} \quad (2.9)$$

接下来, 我们将对这个三步算法进行收敛性分析。为了理论分析方便, 我们假设函数  $f(x)$  在区间足

够光滑。

### 3. 收敛性分析

**定理 2.1** 函数  $f(x)$  在区间  $I$  上足够光滑 ( $I$  为开区间), 设  $x^*$  为方程  $f(x)=0$  的一个单根, 且  $x^* \in I$ , 当  $x_0$  无限趋近  $x^*$  时, 该三步迭代法(2.9)以五阶的效率收敛至单根  $x^*$ 。

**证明:** 令  $e_n = x_n - x^*$ , 将  $f'(x_n)$  与  $f(x_n)$  在  $x^*$  处泰勒公式展开, 可得到

$$f(x_n) = f'(x^*) \left( e_n + \sum_{k=2}^4 c_k e_n^k + O(e_n^5) \right), k \in N^+ \quad (3.1)$$

$$f'(x_n) = f'(x^*) \left( 1 + \sum_{k=2}^4 k c_k e_n^{k-1} + O(e_n^4) \right), k \in N^+ \quad (3.2)$$

根据公式(3.1)和公式(3.2), 可得

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2 e_n^2 - 2c_3 e_n^3 + 2c_2^2 e_n^3 - 3c_4 e_n^4 + 7c_2 c_3 e_n^4 - 4c_2^3 e_n^4 + O(e_n^5) \quad (3.3)$$

由式(3.3), 可得到

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{3f'(x_n)} = x^* + \frac{1}{3}e_n + \frac{2}{3}(c_2 e_n^2 - 2e_n^3(c_2^2 - c_3) + e_n^4(3c_4 - 7c_2 c_3 + 4c_2^3)) + O(e_n^5) \quad (3.4)$$

由式(3.4)可得

$$z_n - x^* = \frac{2}{3}e_n + \frac{1}{3}(c_2 e_n^2 - 2e_n^3(c_2^2 - c_3) + e_n^4(3c_4 - 7c_2 c_3 + 4c_2^3)) + O(e_n^5) \quad (3.5)$$

将  $f'(z_n)$  在  $x^*$  处泰勒公式展开, 可知

$$f'(z_n) = f'(x^*) \left[ 1 + \frac{4}{3}c_2 e_n + \frac{2}{3}e_n^2(2c_3 + c_2^2) - \frac{4}{3}e_n^3 \left( c_2^3 - \frac{8}{9}c_4 - 2c_2 c_3 \right) \right] + O(e_n^4) \quad (3.6)$$

从式(3.3)与式(3.6)可知

$$f'(x_n) + f'(z_n) = f'(x^*) \left[ 2 + \frac{10}{3}c_2 e_n + e_n^2 \left( \frac{13}{3}c_3 + \frac{2}{3}c_2^2 \right) + e_n^3 \left( \frac{140}{27}c_4 - \frac{4}{3}c_2^3 + \frac{8}{3}c_2 c_3 \right) \right] + O(e_n^4) \quad (3.7)$$

$$4f'(x_n) - 2f'(z_n) = f'(x^*) \left[ 2 + \frac{4}{3}c_2 e_n - e_n^2 \left( \frac{2}{3}c_3 - \frac{8}{3}c_2^2 \right) + e_n^3 \left( \frac{32}{3}c_2 c_3 - \frac{16}{3}c_2^3 - \frac{88}{27}c_4 \right) \right] + O(e_n^4) \quad (3.8)$$

结合式(3.7)及式(3.8)有

$$\frac{f'(x_n) + f'(z_n)}{4f'(x_n) - 2f'(z_n)} = 1 + c_2 e_n + 5e_n^2 \left( \frac{1}{3}c_3 - \frac{1}{3}c_2^2 \right) + e_n^3 \left( \frac{16}{3}c_2^3 + \frac{38}{9}c_4 - \frac{16}{3}c_2 c_3 \right) + O(e_n^4) \quad (3.9)$$

根据式(3.5)及式(3.9)可有

$$\frac{f'(x_n) + f'(z_n)}{4f'(x_n) - 2f'(z_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n + e_n^3 \left( \frac{1}{2}c_3 - \frac{2}{3}c_2^2 \right) + O(e_n^4)$$

综上所述可以得到误差方程

$$y_n - x^* = x_n - \frac{f'(x_n) + f'(z_n)}{4f'(x_n) - 2f'(z_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x^* = e_n^3 \left( \frac{2}{3} c_2^2 - \frac{1}{2} c_3 \right) + O(e_n^4) \quad (3.10)$$

由(3.1)式及式(3.6)可有

$$\frac{2[2f'(z_n) - f'(x_n)]}{4f'(z_n)f'(x_n) - 5[f'(x_n)]^2 + 3[f'(z_n)]^2} = [f'(x^*)]^{-1} [1 + 2c_3 e_n^2 + O(e_n^3)] \quad (3.11)$$

将  $f(y_n)$  在  $x^*$  处用泰勒公式展开可知

$$f(y_n) = f'(x^*)(y_n - x^*) + O((y_n - x^*)^2) \quad (3.12)$$

结合式(3.11)和式(3.12)可得

$$\frac{2f(y_n)[2f'(z_n) - f'(x_n)]}{4f'(z_n)f'(x_n) - 5[f'(x_n)]^2 + 3[f'(z_n)]^2} = (y_n - x^*) + 2(y_n - x^*)c_3 e_n^2 + O(e_n^3) \quad (3.13)$$

结合上面的推论和式(2.9)可以得

$$x_{n+1} = y_n - (y_n - x^*) + 2(y_n - x^*)c_3 e_n^2 + O(e_n^3)$$

到该新的迭代法的误差估计为

$$e_{n+1} = x_{n+1} - x^* = y_n - x^* - (y_n - x^*) - 2(y_n - x^*)c_3 e_n^2 + O(e_n^6) = c_3^2 e_n^5 - \frac{4}{3} c_3 c_2^2 e_n^5 + O(e_n^6) \quad (3.14)$$

根据式(3.13)我们可得该迭代法在单根附近能够五阶收敛于根  $x^*$ ，其误差估计即为

$$e_{n+1} = \left( c_3^2 - \frac{4}{3} c_3 c_2^2 \right) e_n^5 + O(e_n^6). \quad (3.15)$$

通过上面的收敛性分析，可知新的迭代法为三步五阶收敛迭代法，其效率指数为  $\sqrt[5]{5}$ 。和牛顿法和二步算法式(2.1)相比，明显提高了收敛阶和收敛速度。

#### 4. 数值实验

在本小节中，我们将选择几个不同的测试函数，利用 `matlab` 软件编程求出所选取的几个测试函数的解[8]。在这个数值实验中，分别对测试函数选取相同的初值，将我们所构造的新三步五阶迭代法与几个经典的迭代算法进行比较，以此来验证新的迭代法的优越性。我们用  $x_0$  表示测试函数的初始值，针对每一个测试函数，我们都选取 1 个迭代初始值。当误差满足  $|x_{n+1} - x_n| \leq 10^{-15}$  时，迭代法就停止。我们给出如下三个测试函数：

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^x - 10, x \in [2, 2.5] \\ f_2(x) &= 4x^3 - 3x^2 - 2, x \in [0, 3] \\ f_3(x) &= \cos^2(x) + x^2 - 5, x \in [0, 3] \end{aligned}$$

用 `matlab` 软件分别求出它们对应零点的区间分别为：[2, 2.5][1, 1.5][2, 2.5][0, 0.5]，分别对几个不同测试函数选取初值  $x_0$ ，给出了几种迭代法在达到相同精度时所需要的迭代次数(见表 1)。

**Table 1.** Iteration counts of several iterative methods for different test functions**表 1.** 不同测试函数的几种迭代法的迭代次数

迭代法	函数	$f_1(x)(x_0 = 2.25)$ 迭代次数	$f_2(x)(x_0 = 1.3)$ 迭代次数	$f_3(x)(x_0 = 2.25)$ 迭代次数
牛顿迭代法		5	6	5
算术平均迭代法		4	4	3
中点牛顿迭代法		4	4	4
调和平均迭代法		3	4	4
改进三步迭代法		3	4	3

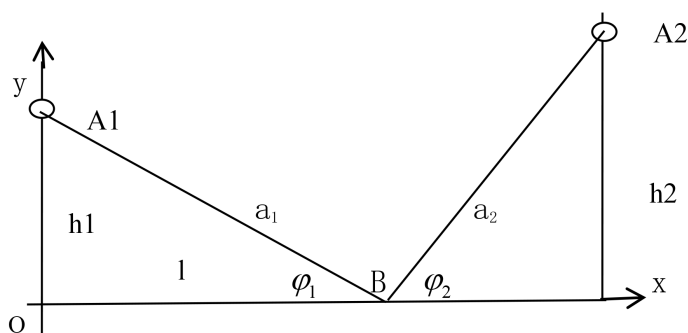
由表 1 可知, 与其他几种经典迭代法比较, 在达到相同精度的同时, 我们可以发现对于复杂的超越函数, 我们构造的改进三步迭代法比其他几种迭代法的迭代次数相对更少, 收敛速度更快。

### 5. 新三步迭代法的实际应用举例

我们考虑如下实际问题: 作为一种公共设施, 路灯为行人和车辆的安全提供了保证。根据路段的具体情况, 道路宽度, 道路交通量和行人人数, 路灯通常具有以下类型的布置: 道路左右两侧对称布置, 道路单边布置和中心道路悬挂装置。若我们采用道路左右两侧对称布置的方式来安装路灯, 道路宽 20 米, 路灯 1 有 2 千瓦, 高 5 米, 路灯 2 有 3 千瓦, 高 6 米。那么, 在漆黑的晚上, 打开相对应的路灯, 在这两只路灯连线的路面上, 请通过计算找出最亮的点和最暗的点。

问题求解: 根据题目信息, 我们建立坐标系并绘制如下路灯道路照明示意图(图 1):

路灯 1 坐标(0, 5), 路灯 2 坐标为(20, 6)。

**Figure 1.** Schematic diagram of road lighting**图 1.** 道路照明示意图

由照度计算公式, 可以计算出两个光源在点  $B(x, 0)$ ,  $x \in [0, 20]$  的照度为:

$$Q_1 = k \frac{A_1 \sin \varphi_1}{a_1^2}, \quad Q_2 = k \frac{A_2 \sin \varphi_2}{a_2^2}$$

其中  $k=1$ 。点  $B$  的照度公式  $f(x)$  为:

$$f(x) = \frac{A_1 h_1}{(h_1^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{A_2 h_2}{(h_2^2 + (l-x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

由图 1, 我们可得:

$$a_1^2 = h_1^2 + x^2, \quad a_2^2 = h_2^2 + (l-x)^2$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{h_1}{a_1} = \frac{h_1}{(h_1^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{h_2}{a_2} = \frac{h_2}{(h_2^2 + (l-x)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

由照度公式  $f(x)$ , 求得

$$f'(x) = -3 \frac{A_1 h_1 x}{(h_1^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} + 3 \frac{A_2 h_2 (l-x)}{(h_2^2 + (l-x)^2)^{\frac{5}{2}}}$$

若要求出光源在道路上的最亮点及最暗点, 我们就需要求出  $f(x)$  的驻点, 即  $f'(x) = 0$  的根。带入具体数值得:

$$f'(x) = -\frac{30x}{(25+x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{54(20-x)}{(36+(20-x)^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (5.8)$$

用 matlab 软件绘制出  $f(x)$ , 与  $f'(x)$  的图像为:

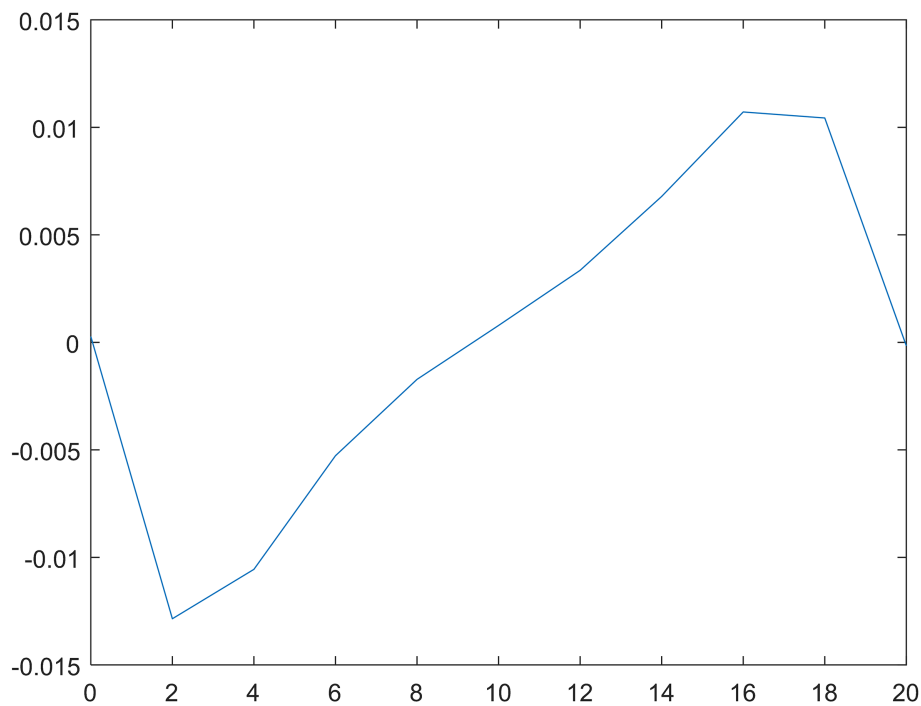


Figure 2. Function  $f'(x)$

图 2. 函数  $f'(x)$

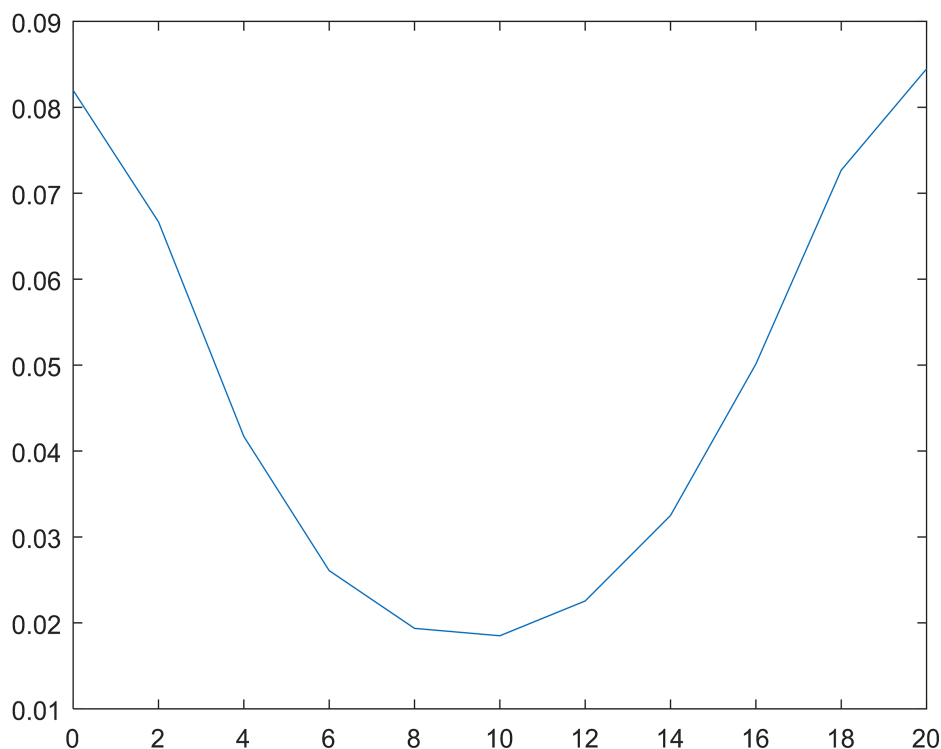


Figure 3. Function  $f(x)$

图 3. 函数  $f(x)$

由图 2 和图 3 可以判断出, 在区间中间位置存在极小值点, 取初值  $x_0 = 10$ , 利用改进的新三步迭代法, 取初值  $x_0 = 10$ , 迭代一次  $z_0 \approx 9.779$ ,  $y_0 \approx 9.338$ ,  $x_1 \approx 9.338$ , 故迭代一次就可得到与牛顿法迭代 5 次相近结果。

就可以求出求解可得  $x_k = 9.338$  为  $f(x)$  的最小值点 18.25, 共迭代 10 次。在路灯垂足处 0 或者 20 存在最大点。  $f(0) = 81.977$ ,  $f(20) = 84.474$ , 故  $x = 20$  时, 路面灯光最亮,  $x = 9.3383$  时, 路面灯光最暗。

## 6. 结论

本文将线性插值思想和牛顿迭代算法相结合, 提出了一种新型的高阶牛顿法。通过引入  $y_n$ , 将原本迭代格式中的  $x_{n+1}$  变为  $y_n$ , 构造新的迭代函数  $x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$ , 已知点  $(x_n, f'(x_n))$  以及点  $(z_n, f'(z_n))$ , 利用 Lagrange 线性插值公式, 对  $f'(y_n)$  进行估计, 最后得到  $f'(y_n)$  的估计, 通过将公式进行几次转换, 构造出一种基于插值思想的新的三步五阶迭代公式。然后通过几个数值实验验证可知, 本文构造三步高阶迭代法在求解非线性方程时, 其迭代次数明显少于其他迭代法, 特别是对于超越方程该算法具有更优高阶性和有效性。

## 基金项目

本项目受长沙理工大学学位与研究生教学改革研究项目(项目编号: CLYJSJG24047, CLYJSJG24048), 长沙理工大学教研教改项目(项目编号: XJG22-122), 湖南省普通高等学校教学改革研究项目(项目编号: 202401000617)资助。

## 参考文献

- [1] 张旭. 求解非线性方程组的几种迭代方法[D]: [硕士学位论文]. 合肥: 合肥工业大学, 2014.
- [2] 单吉宁, 蔡静. 解非线性方程的一类改进型牛顿法[J]. 湖州师范学院学报, 2015, 37(2): 9-13, 34.
- [3] 张辉, 陈豫眉, 周琴. 构造一种六阶牛顿迭代法解非线性方程组[J]. 山东师范大学学报(自然科学版), 2017, 32(4): 37-44.
- [4] 黄娜, 马昌凤. 求解非线性方程的一个新的三阶迭代算法[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2012, 35(3): 460-464.
- [5] 王小瑞, 刘喜兰. 条件最优的两步迭代法及 Jarratt 变形方法[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2017, 43(4): 314-320, 349.
- [6] Özban, A.Y. (2004) Some New Variants of Newton's Method. *Applied Mathematics Letters*, 17, 677-682.  
[https://doi.org/10.1016/s0893-9659\(04\)90104-8](https://doi.org/10.1016/s0893-9659(04)90104-8)
- [7] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 第 5 版. 武汉: 华中科技大学出版社, 2018.
- [8] 张志涌, 等. 精通 MATLAB6.5 版[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2003.