Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(4), 333-342
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.164119

顶点算子代数结构的唯一性

顾钰晗

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛

收稿日期：2026年3月21日；录用日期：2026年4月17日；发布日期：2026年4月27日

摘 要

本文研究了一列顶点算子代数结构的唯一性。这类顶点算子代数的来源是GKO构造，性质由Virasoro顶点算子代数的酉序列及其模决定，具有较好的条件，并且它们还是3A代数与6A代数的推广。它们的顶点算子代数结构由一些模之间的缠结算子决定，而本文证明了只要相关模的融合律不为零，则这一顶点算子代数结构中对应的分量部分也必为非零。本文主要考察了融合律与辫子矩阵等性质，并利用这些方法完成了证明。

关键词

顶点算子代数，唯一性，辫子矩阵，融合律

Uniqueness of Vertex Operator Algebras

Yuhan Gu

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: March 21, 2026; accepted: April 17, 2026; published: April 27, 2026

Abstract

This paper studies the uniqueness of a series of vertex operator algebra structures. These types of vertex operator algebras originate from the GKO construction, with their properties determined by unitary series of the Virasoro vertex operator algebraa and their modules. They have favorable conditions and are also generalizations of the 3A and 6A algebras. The vertex operator algebra structure is determined by the intertwining operators between certain modules, and this paper proves that as long as the fusion rules of the relevant modules are non-zero, the corresponding components in the vertex operator algebra structure must also be non-zero. The paper primarily uses properties such as fusion rules and braid matrices, and uses these methods to complete the proof.

文章引用: 顾钰晗. 顶点算子代数结构的唯一性[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 333-342.
DOI: 10.12677/pm.2026.164119

Keywords

Vertex Operator Algebra, Uniqueness, Braiding Matrix, Fusion Rule

1. 引言

自 20 世纪 80 年代以来，顶点算子代数(Vertex Operator Algebra, VOA)这一概念被引入并得到广泛研究[1]-[3]。其特性呈现出与交换代数、结合代数、微分分次代数的相似性。凭借这些丰富的结构特征，顶点算子代数在群论、模形式、李代数、共形网、张量范畴等多个数学和物理领域建立了深刻的联系。

一个重要例子是在研究魔群月光猜想中出现的月光顶点算子代数，它被用于证明魔群月光猜想，这一非凡的工作使得 Borcherds 获得了 1998 年菲尔兹奖。参考文献[4]证明了包含了中心载荷为二分之一的 Virasoro 顶点算子代数的 48 重张量积。

Virasoro 顶点算子代数，尤其是酉序列，是最简单且被研究得最多的顶点算子代数之一，因此许多性质已经为人所知。它们的有理性、C_2 余有限、自对偶等重要性质均满足。特别地，本文将利用 GKO 构造确定出一列顶点算子代数 $\{\mathcal{U}_k\}$，其极小酉模的辫子矩阵已经有了具体的计算公式，参考[5]-[7]。

本文的动机之一是推广[8] [9]中 3A 代数和[10] [11]中 6A 代数的部分结果。在本文的后续章节中，我们将知道 $\mathcal{U}_0 \cong \mathcal{U}_{3A}$ 和 $\mathcal{U}_1 \cong \mathcal{U}_{6A}$。

接下来我们介绍本文的大致思路。我们首通过 GKO 构造对下式进行分解：

$$\left(\mathcal{L}(3,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\oplus\mathcal{L}(3,3)\otimes\mathcal{L}(1,1)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\right)\otimes\mathcal{L}(1,0)^{\otimes k},$$

这将得到形如 $\oplus_i\left(\mathcal{U}_{k,i}\otimes\mathcal{L}(k+5,i)\right)$ 的式子，其中 $\mathcal{U}:=\mathcal{U}_k:=\mathcal{U}_{k,0}$，即它定义为 GKO 构造中 $\mathcal{L}(k+5,0)$ 的 commutant。更精细地，我们有进一步的分解 $\mathcal{U}_k=\oplus U^i=\oplus\left(P^i\otimes Q^i\right)$。此处 P^i 是 $\mathcal{U}_{k-1}$ 的模而 Q^i 是 Virasoro 顶点算子代数的模。如此一来，其上可能出现的顶点算子就由模之间的融合律确定。而实际上，此处只需要 Q^i 的融合律就已足够。由于我人们已经知道 Q^i 的融合律只能是 0 或 1，我们可以设 $Y=\sum\lambda_{i,j}^k\mathcal{Y}_{i,j}^k$，其中 $\mathcal{Y}_{i,j}^k$ 是 $\begin{pmatrix} & M^k & \\ M^i & & M^j\end{pmatrix}$ 型缠结算子空间的基。本文将证明对所有非零的融合律，$\lambda_{i,j}^k$ 总是非零的。

本文将如下安排内容：第二章将会介绍关于顶点算子代数的基本知识，第三章将会给出 $\mathcal{U}_k$ 的具体构造，第四章将会给出本文主要结果的证明，即 $\lambda_{i,j}^k\neq 0$，最后将讨论这一课题可能的后续研究。

2. 预备知识

2.1. 顶点算子代数的缠结算子与融合律

设 $V=(V,Y,\mathbf{1},\omega)$ 是一个顶点算子代数，其顶点算子是 $Y(v,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}v_nz^{-n-1}$。下面我们介绍本文将用到的相关记号，参考[2] [12]-[15]。

定义 2.1 若向量 $v\in V_2$ 满足 $v_1v=2v$ 和 $v_3v=\frac{c_v}{2}\mathbf{1}$，则称这一向量为中心载荷为 c_v 的 Virasoro 向量。如果一个中心载荷为 $\frac{1}{2}$ 的 Virasoro 向量生成了 Virasoro 顶点算子代数 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$，则称这一向量为 Ising 向量。

设 $M=\oplus_{\lambda\in\mathbb{C}}M_\lambda$ 是一个 V -模，其限制对偶模定义为 $M'=\oplus_{\lambda\in\mathbb{C}}M_\lambda^*$，其中 $M_\lambda^*=Hom\left(M_\lambda,\mathbb{C}\right)$。参考文献[3]证明了 $M'=\left(M',Y_{M'}\right)$ 上有一个自然的 V -模结构，使得对任意的 $v\in V, f\in M'$ 和 $u\in M$ 有

$$\left\langle Y_{M'}(v,z)f,u\right\rangle=\left\langle f,Y_M\left(e^{zL(1)}\left(-z^{-2}\right)^{L(0)}v,z^{-1}\right),u\right\rangle,$$

且满足 $\left(M'\right)'\cong M$ 。进一步，若 M 是不可约模，则 M' 也不可约。若有 $M'\cong M$ ，则称 M 是自对偶的。

定义 2.2 如果一个顶点算子代数 V 满足所有容许模都是完全可约的，那么称 V 是有理的。设 $C_2(V)=\left\langle v_{-2}u\mid u,v\in V\right\rangle$，如果一个顶点算子代数 V 满足 $V/C_2(V)$ 维数有限，则称 V 是 C_2 余有限的。一个顶点算子代数 $V=\oplus_{n\in\mathbb{Z}}V_n$ 若满足 $V_{<0}=0$ 和 $V_0=\mathbb{C}\mathbf{1}$，则称 V 是 CFT 型的。

定义 2.3 设 (V,Y) 是顶点算子代数，$\left(M^i,Y^i\right),\left(M^j,Y^j\right),\left(M^k,Y^k\right)$ 是三个 V -模。$\begin{pmatrix} & M^k & \\ M^i & & M^j\end{pmatrix}$ 型的缠结算子定义为：

$$\mathcal{Y}(\cdot,z):M^i\to Hom\left(M^j,M^k\right)\{z\}$$

$$u\mapsto\sum_{n\in\mathbb{Q}}u_nz^{-n-1},$$

且满足以下条件：

(1) 当 n 足够大时，对任意 $u\in M^i, v\in M^j$ 有 $u_nv=0$；

(2) $\mathcal{Y}\left(L_{-1}v,z\right)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\mathcal{Y}(v,z)$ 对任意 $v\in M^i$ 成立；

(3) 雅可比恒等式：对任意 $u\in V, v\in M^i$，有

$$\begin{aligned}&z_0^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_2}{z_0}\right)Y^k\left(u,z_1\right)\mathcal{Y}\left(v,z_2\right)-z_0^{-1}\delta\left(\frac{-z_2+z_1}{z_0}\right)Y^j\left(v,z_2\right)\mathcal{Y}\left(u,z_1\right)\\&=z_2^{-1}\delta\left(\frac{z_1-z_0}{z_2}\right)\mathcal{Y}\left(Y^i\left(u,z_0\right),z_2\right).\end{aligned}$$

全体 $\begin{pmatrix} & M^k & \\ M^i & & M^j\end{pmatrix}$ 型的缠结算子构成一个线性空间，记为 $I_{i,j}^k$，其维数记为 $N_{i,j}^k$，称为融合律。

设 V^1 和 V^2 是顶点算子代数，M^i 是 V^1 -模，N^i 是 V^2 模，$i=1,2,3$，则参考文献[3]证明了 $M^i\otimes N^i$ 是 $V^1\otimes V^2$ -模。参考文献[16]证明了如下定理：

性质 2.4 若 $N_{M^1,M^2}^{M^3}<\infty$ 或 $N_{N^1,N^2}^{N^3}<\infty$，则有

$$N_{M^1\otimes N^1,M^2\otimes N^3}^{M^3\otimes N^3}=N_{M^1,M^2}^{M^3}N_{N^1,N^2}^{N^3}.$$

参考文献[17]证明了关于双线性型的如下定理：

$$\left(V_0/L(1)V_1\right)^*=Hom\left(V_0/L(1)V_1,\mathbb{C}\right).$$

2.2. Virasoro 顶点算子代数的酉序列和 GKO 构造

现在我们回顾参考文献[5]中关于 Virasoro 代数极小酉模的记号。对正整数 m 和 $1\le s\le r\le m+1$，令

$$c_m=1-\frac{6}{m^2+5m+6},$$

$$h_{r,s}^{(m)}=\frac{\left(r(m+3)-s(m+2)\right)^2-1}{4(m+2)(m+3)},$$

称这样的 $L(c_m,0)$ 为 Virasoro 顶点算子代数的酉序列，它们是有理的。而 $L\left(c_m,h_{r,s}^{(m)}\right)$ 恰为所有的不可约 $L(c_m,0)$ 模。这些模的融合律在参考文献[18]中由下述定理确定：

定义 2.5 一个有序三元组 $((i',i),(j',j),(k',k))$ 若满足以下条件：$1\le i',j',k'\le p+1$，$1\le i,j,k\le p$，$i'+j'+k'<2(p+1)$，$i+j+k<2p$，$i'<j'+k'$，$j'<i'+k'$，$k'<i'+j'$，$i<j+k$，$j<i+k$，$k<i+j$，则称它们构成一个容许三元组。

性质 2.6 极小酉模之间的融合律如下确定：

$$L\left(c_p,h_{i',i}^{(p)}\right)\boxtimes L\left(c_p,h_{j',j}^{(p)}\right)=\sum_{(k',k)}N_{(i',i),(j',j)}^{(k',k)}L\left(c_p,h_{k',k}^{(p)}\right),$$

其中的 N 为 1 当且仅当 $((i',i),(j',j),(k',k))$ 构成容许三元组，其余情形均为 0。

设 $\mathcal{L}(m,n)$ 是 $\mathfrak{sl}(2)$ 仿射顶点算子代数的不可约模。参考文献[19]中对它们之间的张量积给出了如下分解：

$$\mathcal{L}(1,\epsilon)\otimes\mathcal{L}(m,n)=\oplus_{0\le s\le m+3,s\equiv n+\epsilon \bmod 2}\left(L\left(c_{m+2},h_{s+1,n+1}^{(m+2)}\right)\otimes\mathcal{L}(m+1,s)\right)$$

其中 $\epsilon=0,1,0\le n\le m$。这被称为酉 Virasoro 顶点算子代数的 GKO 构造。

2.3. 辫子矩阵

下面我们陈述参考文献[6] [7] [20] [21]中的事实。

顶点算子代数的限制对偶模可以与原来模中的元素配对，而配对得到的多值解析函数可以被解析延拓至一个公共的定义域上。进一步，我们又可以利用万有覆盖将其提升为单值解析函数。结合缠结算子，我们能在酉序列的模上得到形如

$$E\left\langle u_4',\mathcal{Y}_{3,a}^{4}(u_3,z)\mathcal{Y}_{2,1}^{a}(u_2,z)u_1\right\rangle$$

的函数。

记 $\mathcal{I}_{a,b}^{c}$ 的基为 $\mathcal{Y}_{a,b}^{c}$，则 $\left\{E\left\langle u_4',\mathcal{Y}_{3,a}^{4}(u_3,z_1)\mathcal{Y}_{2,1}^{a}(u_2,z_2)u_1\right\rangle \mid \forall a\right\}$ 是线性无关集。固定一组基，则

$$\begin{aligned}&span\left\{E\left\langle u_4',\mathcal{Y}_{3,\mu}^{4}(u_3,z_1)\mathcal{Y}_{2,1}^{\mu}(u_2,z_2)u_1\right\rangle \mid \mu\right\}\\&=span\left\{E\left\langle u_4',\mathcal{Y}_{2,\gamma}^{4}(u_2,z_2)\mathcal{Y}_{3,1}^{a}(u_3,z_1)u_1\right\rangle \mid \gamma\right\}.\end{aligned}$$

此时有 $\left(B_{4,1}^{3,2}\right)_{\mu,\gamma}\in\mathbb{C}$ 使得

$$\begin{aligned}&E\left\langle u_4',\mathcal{Y}_{3,\mu}^{4}(u_3,z_1)\mathcal{Y}_{2,1}^{\mu}(u_2,z_2)u_1\right\rangle\\&=\sum_{\gamma}\left(B_{4,1}^{3,2}\right)_{\mu,\gamma}E\left\langle u_4',\mathcal{Y}_{2,\gamma}^{4}(u_2,z_1)\mathcal{Y}_{3,1}^{a}(u_3,z_2)u_1\right\rangle.\end{aligned}$$

称 $B_{4,1}^{3,2}$ 为辫子矩阵。

2.4. 3A 代数与 6A 代数

3A 代数 $\mathcal{V}=\mathcal{U}_{3A}$ 是一个由两个 Ising 向量生成的顶点算子代数，它的 τ-对合生成了 S_3 且内积为 $13/2^{10}$。参考文献[8] [9]中给出了其存在性和顶点算子代数结构的唯一性，且证明了 3A 代数是有理的。

6A 代数 $\mathcal{U}_{6A}$ 是一个由两个 Ising 向量生成的月光型顶点算子代数，其上内积为 $5/2^{10}$。参考文献[10] [22]研究了它们的结构。

引理 2.7 $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}_{6A}$，并且作为 $\mathcal{V}\otimes L(25/28,0)$-模，有

$$\mathcal{U}_{6A} \cong \mathcal{V} \otimes L\left(\frac{25}{28},0\right) \oplus \mathcal{V}\left(\frac{1}{7}\right) \otimes L\left(\frac{25}{28},\frac{34}{7}\right) \oplus \mathcal{V}\left(\frac{5}{7}\right) \otimes L\left(\frac{25}{28},\frac{9}{7}\right),$$

其中 $\mathcal{V}\left(\frac{1}{7}\right)$ 和 $\mathcal{V}\left(\frac{5}{7}\right)$ 为 $\mathcal{V}$ 的不可约模。

这些 $\mathcal{V}$ -模的结构在参考文献[9]中确定。参考文献[23] [24]可以得到 $\mathcal{U}_{6A}$ 是有理、 C_2 余有限且自对偶的。参考文献[10]证明了 6A 代数上的顶点算子代数结构是唯一的。

3. $\mathcal{U}$ 的构造

令 $\mathcal{U}_0 = \mathcal{V}$ 和 $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_{6A}$ 。对 $k \geq 2$ ，我们将 GKO 构造

$$\left(\mathcal{L}(3,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\oplus\mathcal{L}(3,3)\otimes\mathcal{L}(1,1)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\right)\otimes\mathcal{L}(1,0)^{\otimes k}$$

中 $\mathcal{L}(k+5,0)$ 的 commutant VOA 记为 $\mathcal{U}_{k,0}$ 或简记为 $\mathcal{U}_k$ ，而与 $\mathcal{L}(k+5,i)$ 配对的项记为 $\mathcal{U}_{k,i}$ 。这样，GKO 构造被写成如下形式：

$$\begin{aligned}&\left(\mathcal{L}(3,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\oplus\mathcal{L}(3,3)\otimes\mathcal{L}(1,1)\otimes\mathcal{L}(1,0)\otimes\mathcal{L}(1,0)\right)\otimes\mathcal{L}(1,0)^{\otimes k}\\&\cong\oplus_i\left(\mathcal{U}_{k,i}\otimes\mathcal{L}(k+5,i)\right).\end{aligned}$$

方便起见，我们记 $[i-1,h]_k := \mathcal{U}_{k,i-1}\otimes L(k+7,h)$ 。此时我们有分解

$$\mathcal{U}_{k,0} = \oplus_i U_{k-1}^i,$$

其中 $U_k^i = \left[i-1, h_{1,i}^{(k+7)}\right]_k$ 。

在固定 k 时，我们依次将 $\mathcal{U}_k, \mathcal{U}_{k-1,i}, L\left(c_{k+7}, h_{1,i}^{(k+7)}\right), U_{k-1}^i$ 简记为 $\mathcal{U}, P^i, Q^i, U^i$ 。我们将 P^i 的融合律、辫子矩阵、缠结算子依次记为 $N, B, \mathcal{Y}$ ，而将 Q^i 的融合律、辫子矩阵、缠结算子依次记为 $\tilde{N}, \tilde{B}, \tilde{\mathcal{Y}}$ 。

定理 3.1 $N_{b,c}^a = \tilde{N}_{b,c}^a$ 。

证明 对参考文献[25]中的定理 3.1 应用上述记号，我们直接得到所需命题。证毕。

由此我们得到 P^i 和 Q^i 有着相同的融合律。固定基底 $\mathcal{Y}_{b,c}^a$ 和 $\widetilde{\mathcal{Y}_{b,c}^a}$ ，则 $\mathcal{I}_{b,c}^a = \mathcal{Y}_{b,c}^a \otimes \widetilde{\mathcal{Y}_{b,c}^a}$ 是 $I_{U^1}\begin{pmatrix} & U^c & \\ U^a & & U^b\end{pmatrix}$ 的基。因此根据线性空间中向量对基底的分解，存在常数 $\lambda_{b,c}^a$ 使得

$$Y\left(b\otimes\tilde{b},z\right) = \sum_{c,a}\lambda_{b,c}^a\left(b\otimes\tilde{b},z\right) = \sum_{c,a}\lambda_{b,c}^a\mathcal{Y}_{b,c}^a(b,z)\otimes\widetilde{\mathcal{Y}_{b,c}^a}\left(\tilde{b},z\right).$$

下面我们证明，对任意融合律非零的 a,b,c ，有 $\lambda_{b,c}^a \neq 0$ 。

4. 非退化性

当两个常数 λ 和 μ 同时为零或同时非零时，我们将这一关系记为 $\lambda \sim \mu$ 。本章我们证明若 $N_{i,j}^k \neq 0$ ，则 $\lambda_{i,j}^k \sim 1$ ，即对任意融合律非零的 i,j,k ，有 $\lambda_{i,j}^k \neq 0$ 。

我们记

$$\left\langle u^{i'}, Y\left(u^j, z_1\right) Y\left(u^k, z_2\right) u^l\right\rangle$$

为四元组 (i,j,k,l) 。对上式利用顶点算子的弱交换性后，我们记关系为 $(i,j,k,l)\sim(i,k,j,l)$ 。

注意此两处的 $\sim$ 有不同的意义，但在书写中不会造成歧义。

4.1. 基本性质

记 $\mathcal{Y}_{c,i}^{a}(\cdot,z_2)\mathcal{Y}_{b,d}^{i}(\cdot,z_1)\otimes\tilde{\mathcal{Y}}_{c,j}^{a}(\cdot,z_2)\tilde{\mathcal{Y}}_{b,d}^{j}(\cdot,z_1)$ 为 $e_{i,j}$。依次在 (a,b,c,d) 和 (a,c,b,d) 中将顶点算子 Y 按基写出分量，我们可以直接计算得到

$$E\left\langle (a\otimes\tilde{a})', Y\left(b\otimes\tilde{b},z_1\right)Y\left(c\otimes\tilde{c},z_2\right)d\otimes\tilde{d}\right\rangle$$
$$=E\left\langle (a\otimes\tilde{a})', \sum_{\beta,\gamma_1,\gamma_2}\lambda_{b,\beta}^{a}\lambda_{c,d}^{\beta}B_{\beta,\gamma_1}\tilde{B}_{\beta,\gamma_2}e_{\gamma_1,\gamma_2}d\otimes\tilde{d}\right\rangle$$

以及

$$E\left\langle (a\otimes\tilde{a})', Y\left(c\otimes\tilde{c},z_2\right)Y\left(b\otimes\tilde{b},z_1\right)d\otimes\tilde{d}\right\rangle$$
$$=E\left\langle (a\otimes\tilde{a})', \sum_{\mu}\lambda_{c,\mu}^{a}\lambda_{b,d}^{\mu}e_{\mu,\mu}d\otimes\tilde{d}\right\rangle,$$

其中 $\beta,\gamma_1,\gamma_2,\mu$ 取遍所有能使融合律非零的模。

引理 4.1 关系 $(a,b,c,d)\sim(a,c,b,d)$ 可被写成如下形式：

$$B^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}\left(\lambda_{b,\beta_1}^{a}\lambda_{c,d}^{\beta_1},\cdots,\lambda_{b,\beta_N}^{a}\lambda_{c,d}^{\beta_N}\right)\tilde{B}=\mathrm{diag}\left(\lambda_{c,\mu_1}^{a}\lambda_{b,d}^{\mu_1},\cdots,\lambda_{c,\mu_N}^{a}\lambda_{b,d}^{\mu_N}\right),$$

其中 $B=\left(B_{i,j}\right),\tilde{B}=\left(\tilde{B}_{i,j}\right)$，且 $\beta_i,\mu_j\ (i,j=1,\cdots,N)$ 取遍所有能使融合律非零的模。

证明 令 $C=\mathrm{diag}\left(\lambda_{b,\beta_1}^{a}\lambda_{c,d}^{\beta_1},\cdots,\lambda_{b,\beta_N}^{a}\lambda_{c,d}^{\beta_N}\right), D=\mathrm{diag}\left(\lambda_{c,\mu_1}^{a}\lambda_{b,d}^{\mu_1},\cdots,\lambda_{c,\mu_N}^{a}\lambda_{b,d}^{\mu_N}\right), A=B^{\mathrm{T}}C\tilde{B}$。下面我们只需验证 $A_{i,j}=D_{i,j}$。

直接计算可得 $A_{i,j}=\sum_{k=1}^{N}B_{k,i}C_{k,k}\tilde{B}_{k,j}$。考虑 $(a,b,c,d)\sim(a,c,b,d)$，由四点函数的线性无关性，我们得到

$$\sum_{\beta,\gamma_1,\gamma_2}\lambda_{b,\beta}^{a}\lambda_{c,d}^{\beta}B_{\beta,\gamma_1}\tilde{B}_{\beta,\gamma_2}e_{\gamma_1,\gamma_2}=\sum_{\mu}\lambda_{c,\mu}^{a}\lambda_{b,d}^{\mu}e_{\mu,\mu}.$$

等式左边非零当且仅当 $\gamma_1=\gamma_2=\mu$。由于 $e_{i,j}$ 是基，我们有

$$\sum_{\beta}\lambda_{b,\beta}^{a}\lambda_{c,d}^{\beta}B_{\beta,\mu_i}\tilde{B}_{\beta,\mu_i}=\lambda_{c,\mu_i}^{a}\lambda_{b,d}^{\mu_i}$$

对任何与融合律相容的 μ_i 成立。

由此我们得到当 $i\neq j$ 时有 $A_{i,j}=0=D_{i,j}$。当 $i=j$ 时有

$$D_{i,i}=\lambda_{c,\mu_i}^{a}\lambda_{b,d}^{\mu_i}=\sum_{\beta}\lambda_{b,\beta}^{a}\lambda_{c,d}^{\beta}B_{\beta,\mu_i}\tilde{B}_{\beta,\mu_i}=\sum_{k=1}^{N}B_{k,i}C_{k,k}\tilde{B}_{k,i}=A_{i,i}.$$

证毕。

由于本文结论与 μ_i 或 β_j 的顺序无关，且无需计算辫子矩阵中元素的具体数值，我们将上述关系写为如下形式：

$$\left\{\lambda_{b,\beta_1}^{a}\lambda_{c,d}^{\beta_1},\cdots,\lambda_{b,\beta_N}^{a}\lambda_{c,d}^{\beta_N}\right\}\sim\left\{\lambda_{c,\mu_1}^{a}\lambda_{b,d}^{\mu_1},\cdots,\lambda_{c,\mu_N}^{a}\lambda_{b,d}^{\mu_N}\right\}.$$

定理 4.2 上式中，左右两边非零项的个数相等。

证明 由 $B,\tilde{B}$ 可逆得到定理 4.1 中的两个对角矩阵具有相同的秩，命题证毕。

注意若两边的集合都只有一个数，则这与常数之间的 $\sim$ 记号相容，此时大括号将被省略。

至此我们已对证明 $\lambda_{i,j}^{k}\sim 1$ 做了充足的准备，下面我们开始证明。

引理 4.3 $\lambda_{1,k}^{k}\neq 0,\lambda_{k,1}^{k}\neq 0,\lambda_{k,k}^{1}\neq 0$。

证明 由于U^k是不可约U^1-模，第一个命题成立。对任意$u^k\in U^k$，有

$$\lambda_{k,1}^{k}\mathcal{I}_{k,1}^{k}\left(u^k,z\right)u^1=Y\left(u^k,z\right)u^1=e^{zL(-1)}Y\left(u^1,-z\right)u^k=\lambda_{k,1}^{k}e^{zL(-1)}\mathcal{I}_{1,k}^{k}\left(u^1,-z\right)u^k,$$

因此$\lambda_{k,1}^{k}\neq 0$。

对$u^k,v^k\in U^k$，我们有

$$\left\langle Y\left(u^k,z\right)v^k,u^1\right\rangle=\left\langle v^k,Y\left(e^{zL(-1)}\left(-z^{-1}\right)^{L(0)}u^k,z^{-1}\right)u^1\right\rangle,$$

即

$$\left\langle \lambda_{k,k}^{1}\mathcal{I}_{k,k}^{1}\left(u^k,z\right)v^k,u^1\right\rangle=\left\langle v^k,\lambda_{k,1}^{k}\mathcal{I}_{k,1}^{k}\left(e^{zL(-1)}\left(-z^{-1}\right)^{L(0)}u^k,z^{-1}\right)u^1\right\rangle,$$

由第二个命题得到第三个命题。证毕。

定理 4.4 对所有与融合律相容的i,j,k，有$\lambda_{i,j}^{k}\sim\lambda_{j,i}^{k}\sim\lambda_{j,k}^{i}$。

证明 只需考虑$(1,i,j,k)\sim(1,j,i,k)$。由于$N_{a,b}^{1}$不为零当且仅当$a=b$，此时$\sim$两边只有一项。因此有$\lambda_{j,k}^{i}\lambda_{i,i}^{1}=\lambda_{i,k}^{j}\lambda_{j,j}^{1}$，由上一定理得到所需结果。证毕。

从现在开始，λ指标的替换将被省略。

引理 4.5 对任意与融合律相容的i，有$\lambda_{i,i-2}^{3}\sim 1$。

证明 我们已知命题在$i=3$时成立。假设命题在$i=3,5,7,\cdots,2t+1$时成立而$i=2t+3$时不成立。若我们能在此条件下证明$\lambda_{p,q}^{r}=0$对任意$1\leq p,q\leq 2t+1,r\geq 2t+3$成立，那么$V=\sum_{n=1}^{t}U^{2n+1}$将成为$\mathcal{U}$的子顶点算子代数。但模的融合律却会包括$U^{2t+3}$作为其中一项，导致矛盾。

为了证明所需命题，我们首先对$r=2t+3,p+q=2t+4$情形证明$\lambda_{p,q}^{r}=0$，接着再对$r\geq 2t+3,p\leq 2t-1,q\leq 2t+1$进行证明。

对$r=2t+3,p+q=2t+4$，我们考虑$(3,p,q-2,r)\sim(3,q-2,p,r)$，从而得到

$$\left\{\lambda_{3,p}^{p-2}\lambda_{r,q-2}^{p-2},\lambda_{3,p}^{p}\lambda_{r,q-2}^{p},\lambda_{3,p}^{p+2}\lambda_{r,q-2}^{p+2}\right\}\sim\left\{\lambda_{3,q-2}^{q-4}\lambda_{r,p}^{q-4},\lambda_{3,q-2}^{q-2}\lambda_{r,p}^{q-2},\lambda_{3,q-2}^{q}\lambda_{r,p}^{q}\right\}.$$

由融合律有$N_{r,q-2}^{p-2}=N_{r,q-2}^{p-2}=N_{r,p}^{q-4}=N_{r,p}^{q-2}=0$，而原假设保证了对$3\leq i\leq 2t+1$有$\lambda_{i,i-2}^{3}\sim 1$，因此上式变为$\lambda_{r,q-2}^{p+2}\sim\lambda_{p,q}^{r}$对任意$p\leq 2t+1$成立。因此

$$\lambda_{r,p}^{q}\sim\lambda_{r,p-2}^{q+2}\sim\cdots\sim\lambda_{r,3}^{2t+1}=0.$$

至此我们完成了第一步的证明。

下面我们考虑$r\geq 2t+3,p\leq 2t-1,q\leq 2t+1$的情形。选取$p,q$使得对$p'\leq p,q'\leq q$有$N_{p',q'}^{r}=0$，且使得$p+q$取到最大。

考虑$(3,p,q,r)\sim(3,q,p,r)$，我们得到$\lambda_{q,r}^{p+2}\sim\lambda_{3,q}^{q+2}\lambda_{p,r}^{q+2}$。若$q=2t+1$，则由原假设有$\lambda_{q,r}^{p+2}\sim\lambda_{3,q}^{q+2}=0$，因此$\lambda_{p,2t+1}^{r}=0$对任意$1\leq p\leq 2t+1$成立。而若$q=2t-1$，有$\lambda_{q,r}^{p+2}=\lambda_{p,r}^{2t+1}=0$。对$q$归纳可得到$\lambda_{p,q}^{r}=0$对任意$p.q\leq 2t+1$成立。因此第二步得证，由所需矛盾推出命题成立。证毕。

引理 4.6 假设$\lambda_{i,i}^{3}\sim 1$对任何与融合律相容的i成立。给定p，若对任意与融合律相容且满足$\min\{i,j,k\}\leq p$的i,j,k，有$\lambda_{i,j}^{k}\sim 1$，那么$\lambda_{i,j}^{p+2}\sim 1$。

证明 考虑$(3,p,i,j)\sim(3,i,p,j)$和前一引理，我们立刻得到所需结论。命题证毕。

接下来我们只需证明$\lambda_{i,i}^{3}\sim 1$对任何与融合律相容的 i 成立，即可利用此引理对λ的指标归纳得到$\lambda_{i,j}^{k}\neq 0$对任意与融合律相容的i,j,k成立，从而完成本文的证明。为了证明这一事实，我们需要对融合律中最长指标m的奇偶性分别讨论。

4.2. *m* 为奇数情形

这一节中我们总是假设 m 为奇数。

引理 4.7 $\lambda_{m,m}^{3} \sim 1$。

证明 计算融合律得到 $U^m \boxtimes U^m = U^1 + U^3$。若 $\lambda_{m,m}^{3} = 0$，则 $V = U^1 + U^m$ 构成 $\mathcal{U}$ 的子顶点算子代数，此时融合律与 V -模张量积应有的封闭性矛盾。证毕。

引理 4.8 $\lambda_{a,b}^{m} \sim 1$ 对任意与融合律相容的 a,b 成立。

证明 考虑 $(m,i,m,i-2) \sim (m,m,i,i-2)$，得到 $\lambda_{m,i}^{m-i+3} \sim \lambda_{m,i-2}^{m-i+3} \sim 1$。这已经包括了所有涉及 m 的融合律。证毕。

引理 4.9 $\lambda_{i,i}^{3} \sim 1$ 对任何与融合律相容的 i 成立。

证明 考虑 $(m,m,i,j) \sim (m,i,m,j)$，我们得到

$$\left\{\lambda_{m,m}^{1}\lambda_{i,j}^{1}, \lambda_{m,m}^{3}\lambda_{i,j}^{3}\right\} \sim \left\{\lambda_{m,i}^{m+1-i}\lambda_{m,j}^{m+1-j}, \lambda_{m,i}^{m+3-i}\lambda_{m,j}^{m+3-j}\right\}.$$

利用引理 4.3 和引理 4.8，得 $\lambda_{i,j}^{3} \sim 1$ 对任何与融合律相容的 i 成立。证毕。

定理 4.10 当 m 为奇数时，对任意与融合律相容的 i,j,k，有 $\lambda_{i,j}^{k} \neq 0$。

证明 引理 4.9 使得引理 4.6 的前提条件成立，命题证毕。

4.3. *m* 为偶数情形

这一节中我们总是假设 m 为偶数。

引理 4.11 当 $N_{i,i}^{5} = 1$ 时，有 $\lambda_{i,i}^{5} \sim 1$。当 $N_{i,i+4}^{5} = 1$ 时，有 $\lambda_{i,i+4}^{5} \sim 1$。

证明 分别考虑 $(3,3,i,i) \sim (3,i,3,i)$ 和 $(3,3,i,i+4) \sim (3,i,3,i+4)$，我们立刻得到所需结论。证毕。

引理 4.12 只要 $\lambda_{3,3}^{3} = 0$ 或 $\lambda_{5,5}^{3} = 0$，就有 $\lambda_{4i+1,4i+1}^{3} = 0$ 且 $\lambda_{5,i}^{i+2} = 0$ 对任意 i 成立。

证明 考虑 $(3,3,i,i+2) \sim (3,i,3,i+2)$ 和 $(3,5,i,i+2) \sim (3,i,5,i+2)$ 我们得到

$$\left\{\lambda_{3,3}^{3}, \lambda_{5,i}^{i+2}\right\} \sim \left\{\lambda_{3,i}^{i}, \lambda_{3,i+2}^{i+2}\right\},$$

$$\left\{\lambda_{3,5}^{5}\lambda_{5,i}^{i+2}, \lambda_{7,i}^{i+2}\right\} \sim \left\{\lambda_{3,i}^{i}\lambda_{i,i}^{3}, 1\right\}.$$

首先讨论 $\lambda_{5,5}^{3} = 0$ 的情形。此时 $\lambda_{3,i}^{i}\lambda_{5,i}^{i+2} = 0$。接着在第一式两边同时乘 $\lambda_{3,i}^{i}$。若 $\lambda_{3,3}^{3} = 0$，我们得到 $\lambda_{i,i}^{3}$ 总为 0，因此 $\lambda_{5,i}^{i+2}$ 也全为 0。若 $\lambda_{3,3}^{3} \sim 1$，我们得到 $\lambda_{4t-1,4t-1}^{3} \sim 1$ 和 $\lambda_{4t+1,4t+1}^{3} = 0$ 对任意 $t \geq 1$ 成立。由第一式进一步有 $\lambda_{5,i}^{i+2} = 0$。对任意 i 成立 0

接下来讨论 $\lambda_{3,3}^{3} = 0$ 的情形。在第二式中取 $i = 3$，我们回到了 $\lambda_{5,5}^{3} = 0$ 的情形。证毕。

引理 4.13 $\lambda_{3,3}^{3} \sim \lambda_{5,5}^{3} \sim 1$。

证明 若在命题不成立时可以证明 $\lambda_{4p+1,4q+1}^{4r+3} = 0$ 对任意的 $p,q \geq 1, r \geq 0$ 成立，那么我们将会得到 $V = \sum_{n=1}^{t} U^{4n+1}$ 是 $\mathcal{U}$ 的子顶点算子代数。而其中总有 n 使得 $U^n \boxtimes U^n$ 的融合律不封闭，得出矛盾。因此由前一引理，我们只需在 $\lambda_{5,5}^{3} = 0$ 的假设下对 λ 的指标归纳以完成 $\lambda_{4p+1,4q+1}^{4r+3} = 0$ 的证明。

我们的假设已经保证了 $p' = q' = 1, r' = 0$ 的情形。我们将证明如果 $\lambda_{4p+1,4q+1}^{4r+3} = 0$ 对任意 $p \leq p', q \leq q', r \leq r'$ 成立，那么 $\lambda_{4(p'+1)+1,4q'+1}^{4r'+3} = 0$ 且 $\lambda_{4p'+1,4q'+1}^{4(r'+1)+3} = 0$。

考虑 $(5,4r+3,4p+1,4q+1)$，我们得到

$$\left\{\lambda_{5,4r+3}^{4r-1}\lambda_{4p+1,4q+1}^{4r-1}, \lambda_{5,4r+3}^{4r+1}\lambda_{4p+1,4q+1}^{4r+1}, \lambda_{5,4r+3}^{4r+3}\lambda_{4p+1,4q+1}^{4r+3}, \lambda_{5,4r+3}^{4r+5}\lambda_{4p+1,4q+1}^{4r+5}, \lambda_{5,4r+3}^{4r+7}\lambda_{4p+1,4q+1}^{4r+7}\right\}$$
$$\sim \left\{\lambda_{5,4p+1}^{4p-3}\lambda_{4r+3,4q+1}^{4p-3}, \lambda_{5,4p+1}^{4p-1}\lambda_{4r+3,4q+1}^{4p-1}, \lambda_{5,4p+1}^{4p+1}\lambda_{4r+3,4q+1}^{4p+1}, \lambda_{5,4p+1}^{4p+3}\lambda_{4r+3,4q+1}^{4p+3}, \lambda_{5,4p+1}^{4p+5}\lambda_{4r+3,4q+1}^{4p+5}\right\}.$$

由引理 4.11 和前一引理，所有的 $\lambda_{i,j}^{5}$ 都是已知的。因此我们可以将上式简化为

$$\left\{\lambda_{4p+1,4q+1}^{4(r-1)+3},\lambda_{4p+1,4q+1}^{4(r+1)+3}\right\}\sim\left\{\lambda_{4r+3,4q+1}^{4(p-1)+1},\lambda_{4r+3,4q+1}^{4(p+1)+1}\right\}.$$

由假设得 $\lambda_{4r+3,4q+1}^{4(p+1)+1}\sim\lambda_{4p+1,4q+1}^{4(r+1)+3}$，因此我们得到

$$\lambda_{4r+3,4q+1}^{4(p+1)+1}\sim\lambda_{4(r+1)+3,4q+1}^{4p+1}\sim\cdots\sim\lambda_{5,4q+1}^{4p+4r+3}\sim 0.$$

取 $r=r'$，我们证明了所需命题。证毕。

引理 4.14 $\lambda_{i,i}^{3}\sim 1$ 对任何与融合律相容的 i 成立。

证明 由前一引理我们知道 $\lambda_{3,3}^{3}\sim\lambda_{5,5}^{3}\sim 1$。假设 $\lambda_{k,k}^{3}\sim 1$ 对任意 $k\le t$ 成立而 $\lambda_{t+2,t+2}^{3}=0$。考虑 $(3,3,i,i+2)$，取 $i=t$ 得到 $\lambda_{t,t+2}^{5}=0$。取 $i=t+2$ 得到 $\lambda_{t+4,t+2}^{5}=0$。

考虑 $(3,5,i,i)\sim(3,i,5,i)$，得到

$$\left\{1,\lambda_{i,i}^{7}\right\}\sim\left\{\lambda_{5,i}^{i-2},\lambda_{5,i}^{i+2}\right\}.$$

取 $i=t+2$ 得 $\left\{1,\lambda_{i,i}^{7}\right\}\sim\{0,0\}$，推出矛盾，故原假设不成立。证毕。

定理 4.15 当 m 为偶数时，对任意与融合律相容的 i,j,k，有 $\lambda_{i,j}^{k}\neq 0$。

证明 引理 4.14 使得引理 4.6 的前提条件成立，命题证毕。

5. 讨论与结论

本文证明了对所有非零的融合律，$\lambda_{i,j}^{k}$ 总是非零的。也就是说，每个在融合律中出现的模都确定了 $\mathcal{U}$ 上顶点算子代数结构的一部分。这意味着 $\mathcal{U}$ 上可能的顶点算子代数结构之间，在每个关于模的分量上至多只相差非零常数倍。

如果我们可以证明不同的 $\lambda_{i,j}^{k}$ 给出了同构的顶点算子代数结构，我们就彻底证明了 $\mathcal{U}$ 上顶点算子代数结构的唯一性。本文没有给出辫子矩阵的具体计算，它将会协助证明这一点。

致　谢

感谢我的导师郑文副教授的对我培养与帮助，以及对论文 *Uniqueness of vertex operator algebras arising from GKO-construction* 的讨论与指导。

感谢王宪栋教授在《代数学基础》《高等代数学》课程中的讨论与指导。

感谢肖毓琨副教授在 *Tensor Category* 讨论班中的讨论与指导。

参考文献

[1] Borcherds, R.E. (1986) Vertex Algebras, Kac-Moody Algebras, and the Monster. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **83**, 3068-3071. https://doi.org/10.1073/pnas.83.10.3068

[2] Frenkel, B., Lepowsky, J. and Meurman, A. (1988) Vertex Operator Algebras and the Monster. Pure and Applied Mathematics, Vol. 134. Academic Press.

[3] Frenkel, I.B., Huang, Y. and Lepowsky, J. (1993) On Axiomatic Approaches to Vertex Operator Algebras and Modules. Memoirs of the American Mathematical Society, Vol. 104. American Mathematical Soc. https://doi.org/10.1090/memo/0494

[4] Dong, C., Mason, G. and Zhu, Y. (1994) Discrete Series of the Virasoro Algebra and the Moonshine Module. *Proceedings of a Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society*, Vol. 56, 295-316.

[5] Felder, G., Frohlich, J. and Keller, G. (1989) Braid Matrices and Structure Constants for Minimal Conformal Models. *Communications in Mathematical Physics*, **124**, 647-664. https://doi.org/10.1007/bf01218454

[6] Huang, Y. (2000) Generalized Rationality and a "Jacobi Identity" for Intertwining Operator Algebras. *Selecta Mathematica*, **6**, 225-267. https://doi.org/10.1007/pl00001389

[7] Huang, Y. (2005) Differential Equations and Intertwining Operators. *Communications in Contemporary Mathematics*, **7**, 375-400. https://doi.org/10.1142/s0219199705001799

[8] Miyamoto, M. (2003) Vertex Operator Algebras Generated by Two Conformal Vectors Whose T-Involutions Generate S3. *Journal of Algebra*, **268**, 653-671. https://doi.org/10.1016/s0021-8693(03)00096-6

[9] Sakuma, S. and Yamauchi, H. (2003) Vertex Operator Algebra with Two Miyamoto Involutions Generating S3. *Journal of Algebra*, **267**, 272-297. https://doi.org/10.1016/s0021-8693(03)00170-4

[10] Dong, C., Jiao, X. and Yu, N. (2019) 6a-Algebra and Its Representations. *Journal of Algebra*, **533**, 174-210. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.06.003

[11] Jiao, X. and Zheng, W. (2022) Vertex Operator Algebras Generated by Two Ising Vectors. *Journal of Algebra*, **610**, 546-570. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.07.034

[12] Zhu, Y. (1996) Modular Invariance of Characters of Vertex Operator Algebras. *Journal of the American Mathematical Society*, **9**, 237-302. https://doi.org/10.1090/s0894-0347-96-00182-8

[13] Dong, C., Li, H. and Mason, G. (1997) Regularity of Rational Vertex Operator Algebras. *Advances in Mathematics*, **132**, 148-166. https://doi.org/10.1006/aima.1997.1681

[14] Dong, C., Li, H. and Mason, G. (1996) Simple Currents and Extensions of Vertex Operator Algebras. *Communications in Mathematical Physics*, **180**, 671-707. https://doi.org/10.1007/bf02099628

[15] Dong, C., Li, H. and Mason, G. (1998) Twisted Representations of Vertex Operator Algebras. *Mathematische Annalen*, **310**, 571-600. https://doi.org/10.1007/s002080050161

[16] Abe, T., Dong, C. and Li, H. (2005) Fusion Rules for the Vertex Operator Algebras M(1)+ and V+L. *Communications in Mathematical Physics*, **253**, 171-219. https://doi.org/10.1007/s00220-004-1132-5

[17] Li, H. (1994) Symmetric Invariant Bilinear Forms on Vertex Operator Algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **96**, 279-297. https://doi.org/10.1016/0022-4049(94)90104-x

[18] Wang, W. (1990) Rationality of Virasoro Vertex Operator Algebras. International Mathematics Research Notices. Yale University.

[19] Goddard, P., Kent, A. and Olive, D. (1986) Unitary Representations of the Virasoro and Super-Virasoro Algebras. *Communications in Mathematical Physics*, **103**, 105-119. https://doi.org/10.1007/bf01464283

[20] Knizhnik, V.G. and Zamolodchikov, A.B. (1984) Current Algebra and Wess-Zumino Model in Two Dimensions. *Nuclear Physics B*, **247**, 83-103. https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90374-2

[21] Tsuchiya, A. and Kanie, Y. (1988) Vertex Operators in Conformal Field Theory on P^1 and Monodromy Representations of Braid Group. In: Jimbo, M., Miwa, T. and Tsuchiya, A., Eds., *Conformal Field Theory and Solvable Lattice Models*, Elsevier, 297-372. https://doi.org/10.1016/b978-0-12-385340-0.50013-9

[22] Lam, C.H., Yamada, H. and Yamauchi, H. (2007) Vertex Operator Algebras, Extended E_8 Diagram, and Mckay's Observation on the Monster Simple Group. *Transactions of the American Mathematical Society*, **359**, 4107-4124. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-07-04002-0

[23] Abe, T., Buhl, G. and Dong, C. (2003) Rationality, Regularity, and C_2-Cofiniteness. *Transactions of the American Mathematical Society*, **356**, 3391-3402. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-03-03413-5

[24] Huang, Y., Kirillov, A. and Lepowsky, J. (2015) Braided Tensor Categories and Extensions of Vertex Operator Algebras. *Communications in Mathematical Physics*, **337**, 1143-1159. https://doi.org/10.1007/s00220-015-2292-1

[25] Lin, X. (2017) Mirror Extensions of Rational Vertex Operator Algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, **369**, 3821-3840. https://doi.org/10.1090/tran/6749