Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(5), 16-29
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.165127

具有抑制因子的食物链恒化器模型正解的全局结构

成新宇

长安大学理学院，陕西 西安

收稿日期：2026年3月23日；录用日期：2026年4月29日；发布日期：2026年5月25日

摘 要

本文研究了一类非均匀恒化器中具有抑制因子的食物链模型，其中捕食者以生长在恒化器中的单个食饵为食，且总体捕食者对可育捕食者存在抑制作用。首先，运用抛物方程的比较原理等，得出系统平凡解和半平凡解的全局稳定性；然后，运用分歧理论等方法，建立具有抑制因子的食物链恒化器模型正解的全局结构。

关键词

恒化器，抑制因子，捕食食饵模型，分歧理论

Global Structure of the Positive Solution of the Food Chain Chemostat Model with Inhibitors

Xinyu Cheng

School of Science, Chang'an University, Xi'an Shaanxi

Received: March 23, 2026; accepted: April 29, 2026; published: May 25, 2026

Abstract

In this paper, a food chain model with inhibitors in an unstirred chemostat is studied, in which the predator feeds on a single prey grown in the chemostat, and the overall predator has an inhibitory effect on reproducing predators. Firstly, the comparison principle of parabolic equations is used to obtain the global stability of the trivial and semi-trivial solutions of the system. Then, using bifurcation theory and other methods, the global structure of the positive solution of the food chain chemostat

文章引用: 成新宇. 具有抑制因子的食物链恒化器模型正解的全局结构[J]. 理论数学, 2026, 16(5): 16-29.
DOI: 10.12677/pm.2026.165127

model with inhibitors is established.

Keywords

Chemostat, Inhibitor, Predator-Prey Model, Bifurcation Theory

1. 引言

恒化器是用于微生物连续培养的实验装置。1950 年，恒化器原理被提出，引起大量学者对恒化器模型的研究及推广。大多数早期的恒化器模型假设培养物被均匀搅拌，然而这种理想化的假设与微生物种群的真实情况截然不同。因此，一些关键因素，比如扩散[1] [2]，抑制剂[3] [4]，多种资源[5] [6]，拥挤效应[7]等被引入恒化器模型，出现了许多非均匀恒化器模型。

由于微生物以随机移动的方式活动，那么上述提到的扩散在种群的生存和灭绝方面起着关键作用。Liu 等[2]研究了具有扩散和流动的流动反应器中捕食者－食饵微生物的正稳态，建立了捕食者－食饵种群的共存条件。Shi 等[1]通过研究扩散对两物种竞争同一资源的非均匀恒化器模型动力学行为的影响，最终得出结论，只有在中等扩散速率下，两物种才可以做到共存。

食物链作为生态系统中的重要组成部分，依靠不同生物在食物链中扮演不同角色，生态系统稳定性才能得以维持。Li 等在[8]中通过研究具有 Crowley-Martin 功能反应的食物链模型，得出当捕食者的最大生长率在一定范围内时，该模型的线性稳定共存解是唯一的。Nie 等[9]研究了一种扩散性捕食-食饵恒化器系统，结果表明，只有对于较小的扩散速率，所有物种才能共存。在此基础之上，考虑总体捕食者对可育捕食者的抑制作用，讨论以下非均匀恒化器模型的反应扩散系统

$$\begin{cases} \mathcal{S}_t = d\mathcal{S}_{xx} - \mathcal{U}\dfrac{a\mathcal{S}}{k_1+\mathcal{S}+\beta_1\mathcal{U}}, & 0<x<1, t>0, \\ \mathcal{U}_t = d\mathcal{U}_{xx} + \mathcal{U}\dfrac{a\mathcal{S}}{k_1+\mathcal{S}+\beta_1\mathcal{U}} - \mathcal{W}\dfrac{b\mathcal{U}}{k_2+\mathcal{U}+\beta_2\mathcal{W}}, & 0<x<1, t>0, \\ \mathcal{V}_t = d\mathcal{V}_{xx} + \mathcal{V}\dfrac{b\mathcal{U}}{k_2+\mathcal{U}+\beta_2\mathcal{W}}\dfrac{l}{l+\mathcal{W}} - m\mathcal{V}, & 0<x<1, t>0, \\ \mathcal{W}_t = d\mathcal{W}_{xx} + \mathcal{V}\dfrac{b\mathcal{U}}{k_2+\mathcal{U}+\beta_2\mathcal{W}}\dfrac{l}{l+\mathcal{W}} - m\mathcal{W}, & 0<x<1, t>0, \end{cases} \tag{1}$$

边界条件为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_x(0,t) = -S^0, \mathcal{S}_x(1,t)+\gamma\mathcal{S}(1,t)=0, & t>0, \\ \mathcal{U}_x(0,t) = \mathcal{U}_x(1,t)+\gamma\mathcal{U}(1,t)=0, & t>0, \\ \mathcal{V}_x(0,t) = \mathcal{V}_x(1,t)+\gamma\mathcal{V}(1,t)=0, & t>0, \\ \mathcal{W}_x(0,t) = \mathcal{W}_x(1,t)+\gamma\mathcal{W}(1,t)=0, & t>0, \end{cases} \tag{2}$$

初始条件为

$$\begin{cases} \mathcal{S}(x,0) = \mathcal{S}_0(x), \mathcal{U}(x,0) = \mathcal{U}_0(x), 0<x<1, \\ \mathcal{V}(x,0) = \mathcal{V}_0(x), \mathcal{W}(x,0) = \mathcal{W}_0(x), 0<x<1, \end{cases} \tag{3}$$

其中$\mathcal{S}(x,t)$表示营养液的浓度，$\mathcal{U}(x,t)$表示食饵的浓度，$\mathcal{W}(x,t)$表示一类捕食者的总浓度，$\mathcal{V}(x,t)$表示这一类捕食者中的可育捕食者浓度，$S^0>0$表示营养液的初始输入浓度，$\frac{\mathcal{S}}{k_1+\mathcal{S}+\beta_1\mathcal{U}}$和$\frac{\mathcal{U}}{k_2+\mathcal{U}+\beta_2\mathcal{W}}$为B-D反应函数，$k_1$，$k_2$，$\beta_1$，$\beta_2$为正常数，$a$和$b$则代表着食饵和捕食者的最大生长率，$m$代表捕食者的死亡率，$l$为总体捕食者$\mathcal{W}(x,t)$对可育捕食者$\mathcal{V}(x,t)$起抑制作用的因子，$d$代表营养液、食饵及捕食者三者的扩散系数，$\gamma$为正常数。$\mathcal{S}_0(x)$，$\mathcal{U}_0(x)$，$\mathcal{V}_0(x)$，$\mathcal{W}_0(x)$是[0, 1]上的非负连续函数，而且总体捕食者初始浓度$\mathcal{W}_0(x)$总会大于等于可育捕食者初始浓度$\mathcal{V}_0(x)$，所以系统的生物可行域为

$$X=\left\{\left(\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0,\mathcal{V}_0,\mathcal{W}_0\right)\in C\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}_+^4\right):\mathcal{W}_0(x)\geq\mathcal{V}_0(x)\right\},$$

这里$\mathbb{R}_+=\left[0,+\infty\right)$。

为了研究系统(1)~(3)的共存解，考虑以下与系统(1)~(3)相对应的稳态系统

$$\begin{cases} dS_{xx}-U\dfrac{aS}{k_1+S+\beta_1U}=0, & 0<x<1,\\ dU_{xx}+U\dfrac{aS}{k_1+S+\beta_1U}-W\dfrac{bU}{k_2+U+\beta_2W}=0, & 0<x<1,\\ dV_{xx}+V\dfrac{bU}{k_2+U+\beta_2W}\dfrac{l}{l+W}-mV=0, & 0<x<1,\\ dW_{xx}+V\dfrac{bU}{k_2+U+\beta_2W}\dfrac{l}{l+W}-mW=0, & 0<x<1,\end{cases}\tag{4}$$

边界条件为

$$\begin{cases} S_x(0)=-S^0,S_x(1)+\gamma S(1)=0,\\ U_x(0)=U_x(1)+\gamma U(1)=0,\\ V_x(0)=V_x(1)+\gamma V(1)=0,\\ W_x(0)=W_x(1)+\gamma W(1)=0.\end{cases}\tag{5}$$

2. 预备知识

首先，考虑下面的特征值问题

$$\begin{cases}\mu\varphi(x)=d\varphi_{xx}+q(x)\varphi(x),0<x<1,\\ \varphi_x(0)=\varphi_x(1)+\gamma\varphi(1)=0,\end{cases}\tag{6}$$

其中d，γ是正常数，$q(x)\in C([0,1])$。由[10]知，(6)存在一个主特征值，记为$\mu_1(d,q(x))$，与其对应的正特征函数记为$\varphi(\cdot,d,q(x))$，且$\max\limits_{x\in[0,1]}\varphi_1=1$。

引理 1.1 [11]存在唯一的$d_0\in(0,+\infty)$，使得

$$\begin{cases}\mu_1\left(d,\dfrac{az}{k_1+z}\right)>0, & 0<d<d_0;\\ \mu_1\left(d,\dfrac{az}{k_1+z}\right)=0, & d=d_0;\\ \mu_1\left(d,\dfrac{az}{k_1+z}\right)<0, & d>d_0.\end{cases}\tag{7}$$

其中 $z(x)=S^0\left(\frac{1+\gamma}{\gamma}-x\right)$。

其次，考虑没有捕食者的单物种系统，则系统(1)~(3)可以简化为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_t = d\mathcal{S}_{xx} - \mathcal{U}\frac{a\mathcal{S}}{k_1+\mathcal{S}+\beta_1\mathcal{U}}, & 0<x<1,t>0, \\ \mathcal{U}_t = d\mathcal{U}_{xx} + \mathcal{U}\frac{a\mathcal{S}}{k_1+\mathcal{S}+\beta_1\mathcal{U}}, & 0<x<1,t>0, \\ \mathcal{S}_x(0,t) = -S^0, \mathcal{S}_x(1,t)+\gamma\mathcal{S}(1,t)=0, & t>0, \\ \mathcal{U}_x(0,t)=\mathcal{U}_x(1,t)+\gamma\mathcal{U}(1,t)=0, & t>0, \\ \mathcal{S}(x,0)=\mathcal{S}_0(x)\ge 0, \mathcal{U}(x,0)=\mathcal{U}_0(x)\ge 0,\ne 0, & 0\le x\le 1. \end{cases} \tag{8}$$

引理 1.2 固定 $a,k_1,\beta_1,\gamma>0$，设 $(\mathcal{S}(x,t),\mathcal{U}(x,t))$ 是(8)的解，则存在 $d_0>0$ 使得，

(i) 当 $0<d<d_0$ 时，系统(8)在 $x\in[0,1]$ 上存在唯一正稳态 $(z(x)-\Theta(d),\Theta(d))$，且是全局渐近稳定的。即 $\lim\limits_{t\to+\infty}(\mathcal{S}(x,t),\mathcal{U}(x,t))=(z(x)-\Theta(d),\Theta(d))$ 在 $x\in[0,1]$ 上一致成立，其中 $\Theta(d)$ 是 $d\Theta_{xx}+\Theta\frac{a(z-\Theta)}{k_1+(z-\Theta)+\beta_1\Theta}=0, 0<x<1, \Theta_x(0)=\Theta_x(1)+\gamma\Theta(1)=0$ 的唯一正解。

(ii) 对 $d\ge d_0$，$(z(x),0)$ 是全局渐近稳定的。即 $\lim\limits_{t\to+\infty}(\mathcal{S}(x,t),\mathcal{U}(x,t))=(z(x),0)$ 在 $x\in[0,1]$ 上一致成立。

根据引理 1.2，系统(1)~(3)对 $\forall d>0$ 都有平凡解 $(z(x),0,0,0)$，对 $d\in(0,d_0)$，则有半平凡解 $(z(x)-\Theta(d),\Theta(d),0,0)$。半平凡解 $(z(x)-\Theta(d),\Theta(d),0,0)$ 的稳定性与特征值 $\mu_1\left(d,\frac{b\Theta(d)}{k_2+\Theta(d)}\right)$ 有关，特别地，有下面的性质

引理 1.3 [12]设 $\frac{bz(0)}{k_2+z(0)}>m$，则存在唯一的 $d_1\in(0,d_0)$，使得

$$\begin{cases} \mu_1\left(d,\frac{b\Theta(d)}{k_2+\Theta(d)}\right)>m, & 0<d<d_1; \\ \mu_1\left(d,\frac{b\Theta(d)}{k_2+\Theta(d)}\right)=m, & d=d_1; \\ \mu_1\left(d,\frac{b\Theta(d)}{k_2+\Theta(d)}\right)<m, & d_1<d<d_0. \end{cases} \tag{9}$$

引理 1.4 $\forall x\in[0,1]$，$t>0$，固定 $d>0$，则初值为 $(\mathcal{S}_0(x),\mathcal{U}_0(x),\mathcal{V}_0(x),\mathcal{W}_0(x))\in X_0$ 的系统(1)~(3)存在唯一的解 $(\mathcal{S}(x,t),\mathcal{U}(x,t),\mathcal{V}(x,t),\mathcal{W}(x,t))$，且存在仅依赖于初值 $\mathcal{S}_0(x)$，$\mathcal{U}_0(x)$，$\mathcal{V}_0(x)$，$\mathcal{W}_0(x)$ 的正常数 M_1,M_2，使得对于 $\forall x\in[0,1]$，$t>0$，有 $0<\mathcal{S}(x,t)\le M_1$，$0<\mathcal{U}(x,t)\le M_1$，$0<\mathcal{V}(x,t)\le\mathcal{W}(x,t)\le M_2$，其中 $X_0=\{(\mathcal{S}_0(x),\mathcal{U}_0(x),\mathcal{V}_0(x),\mathcal{W}_0(x))\in X:\mathcal{V}_0(x)\ne 0,\mathcal{W}_0(x)\ne 0\}$。

引理 1.5 固定 $d>0$，$(S(x),U(x),V(x),W(x))$ 是稳态系统(4)-(5)的非负解，其中在区间[0, 1]上 $U(x)\ne 0$，$V(x)\ne 0$，则(i)在[0, 1]上，$0<S(x)<z(x)$，$0<U(x)<\Theta(d)<z(x)$，且 $0<V(x)<W(x)<z(x)$；(ii) $0<d<d_0$。

引理 1.6 若 $d>d_1$，则稳态系统(4)~(5)没有正解。

证明：根据引理 1.5，当 $d>d_0$ 时系统(4)~(5)没有正解。即证当 $d\in[d_1,d_0)$ 时系统(4)~(5)没有正解。为此假设系统(4)~(5)在 $d\in[d_1,d_0)$ 时存在正解 (S,U,V,W)，则通过关于 V 的方程可以推断出

$\mu_1\left(d,\frac{bU}{k_2+U+\beta_2 W}\frac{l}{l+W}\right)=m$。根据引理 1.5 知在[0, 1]上$U<\Theta(d)$，因此结合主特征值的性质可以推断出

$$m=\mu_1\left(d,\frac{bU}{k_2+U+\beta_2 W}\frac{l}{l+W}\right)<\mu_1\left(d,\frac{bU}{k_2+U+\beta_2 W}\right)<\mu_1\left(d,\frac{b\Theta(d)}{k_2+\Theta(d)}\right),$$

再根据(9)得出$0<d<d_1$，这与$d>d_1$矛盾，因此得证。□

3. 动力学行为

定理 2.1 初值$\left(\mathcal{S}_0(x),\mathcal{U}_0(x),\mathcal{V}_0(x),\mathcal{W}_0(x)\right)\in X_0$，则当$d>d_0$时，系统(1)-(3)的平凡解$\left(z(x),0,0,0\right)$是全局渐近稳定的。

定理 2.1 的证明与定理 2.2 的方法类似，具体可参考下述过程。

定理 2.2 设$\frac{bz(0)}{k_2+z(0)}>m$，初值$\left(\mathcal{S}_0(x),\mathcal{U}_0(x),\mathcal{V}_0(x),\mathcal{W}_0(x)\right)\in X_0$，则存在唯一的$d_1\in(0,d_0)$，使$d_1<d<d_0$时，系统(1)~(3)的解$z(\ )(x)-\Theta(d),\Theta(d),0,0$是全局渐近稳定的。

证明：根据引理 1.4 得出，系统(1)~(3)的解$\left(\mathcal{S}(x,t),\mathcal{U}(x,t),\mathcal{V}(x,t),\mathcal{W}(x,t)\right)$满足，对$\forall x\in[0,1]$，$t>0$，有$\mathcal{S}(x,t)>0$，$\mathcal{U}(x,t)>0$，$\mathcal{W}(x,t)\ge\mathcal{V}(x,t)>0$。因此得出

$$\begin{cases}\mathcal{S}_t=d\mathcal{S}_{xx}-\mathcal{U}\dfrac{a\mathcal{S}}{k_1+\mathcal{S}+\beta_1\mathcal{U}}, & 0<x<1,t>0,\\ \mathcal{U}_t\le d\mathcal{U}_{xx}+\mathcal{U}\dfrac{a\mathcal{S}}{k_1+\mathcal{S}+\beta_1\mathcal{U}}, & 0<x<1,t>0,\\ \mathcal{S}_x(0,t)=-S^0,\mathcal{S}_x(1,t)+\gamma\mathcal{S}(1,t)=0, & t>0,\\ \mathcal{U}_x(0,t)=\mathcal{U}_x(1,t)+\gamma\mathcal{U}(1,t)=0, & t>0,\\ \mathcal{S}(x,0)=\mathcal{S}_0(x),\mathcal{U}(x,0)=\mathcal{U}_0(x), & 0\le x\le 1.\end{cases}\tag{10}$$

设$\omega(x,t)=\mathcal{S}(x,t)+\mathcal{U}(x,t)$，则$\omega(x,t)$满足

$$\begin{cases}\omega_t\le d\omega_{xx}, & 0<x<1,t>0,\\ \omega_x(0,t)=-S^0,\omega_x(1,t)+\gamma\omega(1,t)=0, & t>0,\\ \omega(x,0)=\mathcal{S}_0(x)+\mathcal{U}_0(x), & 0\le x\le 1,\end{cases}$$

根据抛物方程的比较原理可进一步得到，对$\forall x\in[0,1]$，$t>0$，有$\omega(x,t)\le\hat{\omega}(x,t)$，其中$\hat{\omega}(x,t)$满足

$$\begin{cases}\hat{\omega}_t=d\hat{\omega}_{xx}, & 0<x<1,t>0,\\ \hat{\omega}_x(0,t)=-S^0,\hat{\omega}_x(1,t)+\gamma\hat{\omega}(1,t)=0, & t>0,\\ \hat{\omega}(x,0)=\mathcal{S}_0(x)+\mathcal{U}_0(x), & 0\le x\le 1,\end{cases}$$

所以，对$\forall x\in[0,1]$，$t>0$，有$\mathcal{S}(x,t)+\mathcal{U}(x,t)\le\hat{\omega}(x,t)$，即对$\forall x\in[0,1]$，$t>0$，有$\mathcal{S}(x,t)\le\hat{\omega}(x,t)-\mathcal{U}(x,t)$。将其代入(13)的第二个不等式得，

$$\mathcal{U}_t\le d\mathcal{U}_{xx}+\mathcal{U}\frac{a(\hat{\omega}-\mathcal{U})}{k_1+(\hat{\omega}-\mathcal{U})+\beta_1\mathcal{U}},x\in(0,1),t\in(0,+\infty).$$

再次利用抛物方程的比较原理有，对$\forall x\in[0,1]$，$t>0$，$\mathcal{U}(x,t)\le\bar{\mathcal{U}}(x,t)$，其中$\bar{\mathcal{U}}(x,t)$满足下列问题

$$\begin{cases}\bar{\mathcal{U}}_t = d\bar{\mathcal{U}}_{xx} + \bar{\mathcal{U}}\dfrac{a(\hat{\omega}-\bar{\mathcal{U}})}{k_1+(\hat{\omega}-\bar{\mathcal{U}})+\beta_1\bar{\mathcal{U}}}, 0<x<1, t>0,\\ \bar{\mathcal{U}}_x(0,t)=\bar{\mathcal{U}}_x(1,t)+\gamma\bar{\mathcal{U}}(1,t)=0, \quad t>0,\\ \bar{\mathcal{U}}(x,0)=\mathcal{U}_0(x), \quad 0\le x\le 1.\end{cases}$$

已知 $d<d_0$，则根据(7)有 $\mu_1\left(d,\dfrac{az}{k_1+z}\right)>0$。又因为在区间 $[0,1]$ 上 $\hat{\omega}(\cdot,t)$ 关于 $t\to\infty$ 一致收敛于 $z(x)$，然后根据[9]中(2.4)的相似方法得出，在区间 $[0,1]$ 上 $\bar{\mathcal{U}}(\cdot,t)$ 关于 $t\to\infty$ 一致收敛于 $\Theta(d)$。即在区间[0, 1]上

$$\limsup_{t\to+\infty}\mathcal{U}(x,t)\le\Theta(d) \tag{11}$$

一致成立。即对 $\forall\varepsilon_1>0$，$\exists t_2(\varepsilon_1)>0$，对 $\forall x\in[0,1]$，$t>t_2$，有 $\mathcal{U}(x,t)\le\Theta(d)+\varepsilon_1$。再由(1)的第三个方程有 $\mathcal{V}_t\le d\mathcal{V}_{xx}+\mathcal{V}\dfrac{b(\Theta(d)+\varepsilon_1)}{k_2+(\Theta(d)+\varepsilon_1)+\beta_2\mathcal{W}}\dfrac{l}{l+\mathcal{W}}-m\mathcal{V}, x\in(0,1), t\in(t_2,+\infty)$，利用抛物方程的比较原理得，对 $\forall x\in[0,1]$，$t>t_2$，有 $\mathcal{V}(x,t)\le\hat{\mathcal{V}}(x,t)$，其中 $\hat{\mathcal{V}}(x,t)$ 满足下问题

$$\begin{cases}\hat{\mathcal{V}}_t = d\hat{\mathcal{V}}_{xx}+\hat{\mathcal{V}}\dfrac{b(\Theta(d)+\varepsilon_1)}{k_2+(\Theta(d)+\varepsilon_1)+\beta_2\mathcal{W}}\dfrac{l}{l+\mathcal{W}}-m\hat{\mathcal{V}}, \quad 0<x<1, t>t_2,\\ \hat{\mathcal{V}}_x(0,t)=\hat{\mathcal{V}}_x(1,t)+\gamma\hat{\mathcal{V}}(1,t)=0, \quad t>t_2,\\ \hat{\mathcal{V}}(x,t_2)=\mathcal{V}(x,t_2), \quad 0\le x\le 1.\end{cases} \tag{12}$$

因 $d_1<d<d_0$，则由(9)有 $\mu_1\left(d,\dfrac{b\Theta(d)}{k_2+\Theta(d)}\right)<m$。因此 $\mu_1\left(d,\dfrac{b\Theta(d)}{k_2+\Theta(d)+\beta_2\mathcal{W}}\dfrac{l}{l+\mathcal{W}}\right)<m$。根据连续性，取 $\varepsilon_1>0$ 足够小使得 $\mu_1\left(d,\dfrac{b(\Theta(d)+\varepsilon_1)}{k_2+(\Theta(d)+\varepsilon_1)+\beta_2\mathcal{W}}\dfrac{l}{l+\mathcal{W}}\right)-m<0$，对(15)应用分离变量，得区间[0, 1]上 $\hat{\mathcal{V}}(\cdot,t)$ 关于 $t\to\infty$ 一致收敛于 0。即在区间[0, 1]上 $\lim_{t\to+\infty}\mathcal{V}(x,t)=0$ 一致成立。同理可推得在区间[0, 1]上 $\lim_{t\to+\infty}\mathcal{W}(x,t)=0$ 一致成立。

接下来证明在区间[0, 1]上 $\lim_{t\to+\infty}\mathcal{U}(x,t)$ 一致收敛于 $\Theta(d)$。因为 $\lim_{t\to+\infty}\mathcal{W}(x,t)$ 在区间[0, 1]上一致收敛于 0，所以 $\exists t_3(\varepsilon_1)>t_2$，使得对 $\forall x\in[0,1]$，$t>t_3$，有 $0<\mathcal{W}(x,t)<\varepsilon_1$。根据引理 1.4 可得，存在一个正常数 $M>0$，使得对 $\forall x\in[0,1]$，$t>t_3$，有 $\dfrac{b\mathcal{U}}{k_2+\mathcal{U}+\beta_2\mathcal{W}}\le M$。因此

$$\begin{cases}\mathcal{S}_t = d\mathcal{S}_{xx}-\mathcal{U}\dfrac{a\mathcal{S}}{k_1+\mathcal{S}+\beta_1\mathcal{U}}, \quad 0<x<1, t>t_3,\\ \mathcal{U}_t\ge d\mathcal{U}_{xx}+\mathcal{U}\dfrac{a\mathcal{S}}{k_1+\mathcal{S}+\beta_1\mathcal{U}}-M\varepsilon_1, \quad 0<x<1, t>t_3.\end{cases} \tag{13}$$

设 $r(x,t)=\mathcal{S}(x,t)+\mathcal{U}(x,t)$，则 $r(x,t)$ 满足

$$\begin{cases}r_t\ge dr_{xx}-M\varepsilon_1, \quad 0<x<1, t>t_3,\\ r_x(0,t)=-S^0, r_x(1,t)+\gamma r(1,t)=0, \quad t>t_3,\\ r(x,t_3)=\mathcal{S}(x,t_3)+\mathcal{U}(x,t_3), \quad 0\le x\le 1,\end{cases}$$

利用抛物方程的比较原理，对 $\forall x\in[0,1]$， $t>t_3$， $r(x,t)\ge\hat r(x,t)$，其中 $\hat r(x,t)$ 满足如下问题

$$\begin{cases}\hat r_t=d\hat r_{xx}-M\varepsilon_1, & 0<x<1,t>t_3,\\ \hat r_x(0,t)=-S^0,\hat r_x(1,t)+\gamma\hat r(1,t)=0, & t>t_3,\\ \hat r(x,t_3)=\mathcal S(x,t_3)+\mathcal U(x,t_3), & 0\le x\le 1,\end{cases}\tag{14}$$

所以，对 $\forall x\in[0,1]$，$t>t_3$，有 $\mathcal S(x,t)+\mathcal U(x,t)\ge\hat r(x,t)$。即对 $\forall x\in[0,1]$，$t>t_3$，有 $\mathcal S(x,t)\ge\hat r(x,t)-\mathcal U(x,t)$。将其代入(16)的第二个不等式有，

$$\mathcal U_t\ge d\mathcal U_{xx}+\mathcal U\frac{a(\hat r-\mathcal U)}{k_1+(\hat r-\mathcal U)+\beta_1\mathcal U}-M\varepsilon_1,x\in(0,1),t\in(t_3,+\infty),$$

再次利用抛物方程的比较原理，对 $\forall x\in[0,1]$， $t>t_3$，有 $\mathcal U(x,t)\ge\tilde{\mathcal U}(x,t)$，其中 $\tilde{\mathcal U}(x,t)$ 满足

$$\begin{cases}\tilde{\mathcal U}_t=d\tilde{\mathcal U}_{xx}+\tilde{\mathcal U}\dfrac{a(\hat r-\tilde{\mathcal U})}{k_1+(\hat r-\tilde{\mathcal U})+\beta_1\tilde{\mathcal U}}-M\varepsilon_1, & 0<x<1,t>t_3,\\ \tilde{\mathcal U}_x(0,t)=\tilde{\mathcal U}_x(1,t)+\gamma\tilde{\mathcal U}(1,t)=0, & t>t_3,\\ \tilde{\mathcal U}(x,t_3)=\mathcal U(x,t_3), & 0\le x\le 1.\end{cases}$$

根据[13]引理 2.2 和引理 4.2 的论证，可得在区间[0, 1]上 $\lim\limits_{t\to+\infty}\hat r(x,t)$ 一致收敛于 $\underline{\hat r}(x)$，其中 $\underline{\hat r}(x)$ 是(17)唯一的正稳态。从而根据正则性理论得到，在区间[0, 1]上 $\lim\limits_{\varepsilon_1\to0}\underline{\hat r}(x)=z(x)$。因此类似的分析还可以得到，在区间[0, 1]上 $\tilde{\mathcal U}(x,t)$ 关于 $t\to\infty$ 和 $\varepsilon_1\to0$ 一致收敛于 $\Theta(d)$。因此在区间[0, 1]上 $\liminf\limits_{t\to+\infty}\mathcal U(x,t)\ge\Theta(d)$ 一致成立。再结合(14)有，在区间[0, 1]上 $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathcal U(x,t)=\Theta(d)$ 一致成立。同理，在区间[0, 1]上 $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathcal S(x,t)=z(x)-\Theta(d)$ 一致成立。□

4. 正稳态解的进一步研究

定义

$$\begin{aligned}&Y_0=\{\psi\in W^{2,p}(0,1):\psi_x(0)=\psi_x(1)+\gamma\psi(1)=0\};\\ &Y_1=Y_0\times Y_0\times Y_0\times Y_0;\\ &Y_1^+=\{(S,U,V,W)\in Y_1:S>0,U>0,V>0,W>0,x\in[0,1]\}.\end{aligned}\tag{15}$$

其中 $p>1$，则 Y_1 嵌入 $\left(C^1([0,1])\right)^4$，且 Y_1^+ 是 Y_1 中的正锥。

定理 3.1 设 $\dfrac{bz(0)}{k_2+z(0)}>m$，则稳态系统(4)~(5)存在一个连续正解分支，记为 $\mathfrak B^*$，该分支从半平凡解分支 $\{(d;z-\Theta(d),\Theta(d),0,0):d\in(0,d_0)\}$ 上的点 $(d_1;z-\Theta(d_1),\Theta(d_1),0,0)$ 处发出，并在 $\mathbb R_+\times Y_1^+$ 中沿 $d\to0^+$ 方向无限延伸，且满足 $\{d:(d;S,U,V,W)\in\mathfrak B^*\}=(0,d_1)$，其中 $\mathbb R_+=(0,+\infty)$。即稳态系统(4)~(5)至少存在一个正解的充要条件是 $d\in(0,d_1)$。进一步，存在充分小的正数 ε，使得 $d\in(d_1-\varepsilon,d_1)$ 时，稳态系统(4)~(5)至少存在一个稳定的正解。

证明： 将证明过程分为以下三步，其中，记 $\Theta(d)$ 为 Θ_d。

第 1 步 局部分歧

设 $\chi=z-S$，则稳态系统(4)~(5)等价于

$$\begin{cases} d\chi_{xx}+U\dfrac{a(z-\chi)}{k_1+(z-\chi)+\beta_1 U}=0, & 0<x<1, \\ dU_{xx}+U\dfrac{a(z-\chi)}{k_1+(z-\chi)+\beta_1 U}-W\dfrac{bU}{k_2+U+\beta_2 W}=0, & 0<x<1, \\ dV_{xx}+V\dfrac{bU}{k_2+U+\beta_2 W}\dfrac{l}{l+W}-mV=0, & 0<x<1, \\ dW_{xx}+V\dfrac{bU}{k_2+U+\beta_2 W}\dfrac{l}{l+W}-mW=0, & 0<x<1, \\ \chi_x(0)=\chi_x(1)+\gamma\chi(1)=0, U_x(0)=U_x(1)+\gamma U(1)=0, \\ V_x(0)=V_x(1)+\gamma V(1)=0, W_x(0)=W_x(1)+\gamma W(1)=0, \end{cases} \tag{16}$$

根据变量变换，系统(4)~(5)的半平凡解$(z-\Theta_d,\Theta_d,0,0)$映射至$(\chi,U,V,W)=(\Theta_d,\Theta_d,0,0)$。

定义$F:\mathbb{R}_+\times Y_1\to Y_2$

$$F(d;\chi,U,V,W)=\begin{pmatrix} d\chi_{xx}+U\dfrac{a(z-\chi)}{k_1+(z-\chi)+\beta_1 U} \\ dU_{xx}+U\dfrac{a(z-\chi)}{k_1+(z-\chi)+\beta_1 U}-W\dfrac{bU}{k_2+U+\beta_2 W} \\ dV_{xx}+V\dfrac{bU}{k_2+U+\beta_2 W}\dfrac{l}{l+W}-mV \\ dW_{xx}+V\dfrac{bU}{k_2+U+\beta_2 W}\dfrac{l}{l+W}-mW \end{pmatrix}$$

其中Y_1由(18)给出，$Y_2=L^p(0,1)\times L^p(0,1)\times L^p(0,1)\times L^p(0,1)$。设$\mathcal{D}_{(\chi,U,V,W)}F(d;\Theta_d,\Theta_d,0,0)$为算子$F(d;\chi,U,V,W)$在$(\Theta_d,\Theta_d,0,0)$处对$(\chi,U,V,W)$的Frechét导数。易知$\mathcal{D}_{(\chi,U,V,W)}F(d;\Theta_d,\Theta_d,0,0)$是指标为0的Fredholm算子，结合$\mathcal{D}_{(\chi,U,V,W)}F(d;\Theta_d,\Theta_d,0,0)(\phi,\psi,\varphi,\varrho)=0$，其中$(\phi,\psi,\varphi,\varrho)\neq(0,0,0,0)$可以推得

$$\begin{cases} d\phi_{xx}-\Theta_d\dfrac{a(k_1+\beta_1\Theta_d)}{(k_1+z-\Theta_d+\beta_1\Theta_d)^2}\phi+\dfrac{a(z-\Theta_d)(k_1+z-\Theta_d)}{(k_1+z-\Theta_d+\beta_1\Theta_d)^2}\psi=0, & 0<x<1, \\ d\psi_{xx}-\Theta_d\dfrac{a(k_1+\beta_1\Theta_d)}{(k_1+z-\Theta_d+\beta_1\Theta_d)^2}\phi+\dfrac{a(z-\Theta_d)(k_1+z-\Theta_d)}{(k_1+z-\Theta_d+\beta_1\Theta_d)^2}\psi-\dfrac{b\Theta_d}{k_2+\Theta_d}\varrho=0, & 0<x<1, \\ d\varphi_{xx}+\dfrac{b\Theta_d}{k_2+\Theta_d}\varphi-m\varphi=0, & 0<x<1, \\ d\varrho_{xx}+\dfrac{b\Theta_d}{k_2+\Theta_d}\varphi-m\varrho=0, & 0<x<1, \end{cases} \tag{17}$$

对应边界条件为

$$\begin{cases} \phi_x(0)=\phi_x(1)+\gamma\phi(1)=0, \psi_x(0)=\psi_x(1)+\gamma\psi(1)=0, \\ \varphi_x(0)=\varphi_x(1)+\gamma\varphi(1)=0, \varrho_x(0)=\varrho_x(1)+\gamma\varrho(1)=0, \end{cases}$$

如果$\varphi\equiv\varrho\equiv 0$，则$(\phi,\psi)$满足$\boldsymbol{B}(d)\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，对应的边界条件为$\phi_x(0)=\phi_x(1)+\gamma\phi(1)=0$，$\psi_x(0)=\psi_x(1)+\gamma\psi(1)=0$，其中

$$B=\begin{pmatrix} d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-\Theta_d\dfrac{a(k_1+\beta_1\Theta_d)}{(k_1+z-\Theta_d+\beta_1\Theta_d)^2} & \dfrac{a(z-\Theta_d)(k_1+z-\Theta_d)}{(k_1+z-\Theta_d+\beta_1\Theta_d)^2} \\ -\Theta_d\dfrac{a(k_1+\beta_1\Theta_d)}{(k_1+z-\Theta_d+\beta_1\Theta_d)^2} & d\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{a(z-\Theta_d)(k_1+z-\Theta_d)}{(k_1+z-\Theta_d+\beta_1\Theta_d)^2} \end{pmatrix}.$$

根据[7]引理 2.3 得，B 在边界条件 $\phi_x(0)=\phi_x(1)+\gamma\phi(1)=0$，$\psi_x(0)=\psi_x(1)+\gamma\psi(1)=0$ 下是可逆的。因此，$(\phi,\psi)=(0,0)$，矛盾。因此 $\varphi\neq0$ 或 $\varrho\neq0$。又通过(20)的第四个方程容易得到，当且仅当 $\varphi=0$ 时，$\varrho=0$。因此 $\varphi\neq0$ 且 $\varrho\neq0$。又根据强极值原理可得，对 $x\in[0,1]$ 有 $\varphi>0,\varrho>0$。取 $d=d_1$，根据(9)有 $\mu_1\left(d_1,\dfrac{b\Theta_{d_1}}{k_2+\Theta_{d_1}}\right)=m$。因此取 $(\varphi,\varrho)=(\hat{\varphi}_1,\hat{\varrho}_1)$，其中 $\hat{\varphi}_1>0$ 为区间[0, 1]上对应于 $\mu_1\left(d_1,\dfrac{b\Theta_{d_1}}{k_2+\Theta_{d_1}}\right)$ 的主特征函数，并且

$$\hat{\varrho}_1=\left(-d_1\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+m\right)^{-1}\left(\frac{b\Theta_{d_1}}{k_2+\Theta_{d_1}}\hat{\varphi}_1\right)>0,x\in[0,1]$$

已知 $B(d_1)$ 是可逆的，则可推得 $N\left(\mathcal{D}_{(\chi,U,V,W)}F(d_1;\Theta_{d_1},\Theta_{d_1},0,0)\right)=\mathrm{Span}\{(\phi_1,\psi_1,\hat{\varphi}_1,\hat{\varrho}_1)\}$，其中 (ϕ_1,ψ_1) 是 $B(d_1)\begin{pmatrix}\phi_1\\ \psi_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{b\Theta_{d_1}}{k_2+\Theta_{d_1}}\hat{\varrho}_1\end{pmatrix}$ 的唯一解，对应的边界条件为 $(\phi_1)_x(0)=(\phi_1)_x(1)+\gamma(\phi_1)(1)=0$，$(\psi_1)_x(0)=(\psi_1)_x(1)+\gamma(\psi_1)(1)=0$。

接下来判断 $\mathcal{D}_{(\chi,U,V,W)}F(d_1;\Theta_{d_1},\Theta_{d_1},0,0)$ 的值域。假设

$$(\chi,U,V,W)\in R\left(\mathcal{D}_{(\chi,U,V,W)}F(d_1;\Theta_{d_1},\Theta_{d_1},0,0)\right),$$

因此存在 $(\phi,\psi,\varphi,\varrho)\in Y_1$，使得

$$\begin{cases} d_1\phi_{xx}-\Theta_{d_1}\dfrac{a(k_1+\beta_1\Theta_{d_1})}{(k_1+z-\Theta_{d_1}+\beta_1\Theta_{d_1})^2}\phi+\dfrac{a(z-\Theta_{d_1})(k_1+z-\Theta_{d_1})}{(k_1+z-\Theta_{d_1}+\beta_1\Theta_{d_1})^2}\psi=\chi, & 0<x<1,\\ d_1\psi_{xx}-\Theta_{d_1}\dfrac{a(k_1+\beta_1\Theta_{d_1})}{(k_1+z-\Theta_{d_1}+\beta_1\Theta_{d_1})^2}\phi+\dfrac{a(z-\Theta_{d_1})(k_1+z-\Theta_{d_1})}{(k_1+z-\Theta_{d_1}+\beta_1\Theta_{d_1})^2}\psi-\dfrac{b\Theta_{d_1}}{k_2+\Theta_{d_1}}\varrho=U, & 0<x<1,\\ d_1\varphi_{xx}+\dfrac{b\Theta_{d_1}}{k_2+\Theta_{d_1}}\varphi-m\varphi=V, & 0<x<1,\\ d_1\varrho_{xx}+\dfrac{b\Theta_{d_1}}{k_2+\Theta_{d_1}}\varphi-m\varrho=W, & 0<x<1,\\ \phi_x(0)=\phi_x(1)+\gamma\phi(1)=0,\psi_x(0)=\psi_x(1)+\gamma\psi(1)=0, \\ \varphi_x(0)=\varphi_x(1)+\gamma\varphi(1)=0,\varrho_x(0)=\varrho_x(1)+\gamma\varrho(1)=0, \end{cases}\tag{18}$$

已知 $\hat{\varphi}_1$ 满足

$$\begin{cases} d_1(\hat{\varphi}_1)_{xx}+\dfrac{b\Theta_{d_1}}{k_2+\Theta_{d_1}}\hat{\varphi}_1=m\hat{\varphi}_1,x\in(0,1),\\ (\hat{\varphi}_1)_x(0)=(\hat{\varphi}_1)_x(1)+\gamma\hat{\varphi}_1(0)=0, \end{cases}\tag{19}$$

让(21)的第三个方程乘以 $\hat{\varphi}_1$，(22)的第一个方程乘以 φ，在区间(0, 1)上积分可得

$\int_0^1 V\hat{\varphi}_1 \mathrm{d}x = d_1\left(\hat{\varphi}_1\varphi_x\big|_0^1 - \varphi\left(\hat{\varphi}_1\right)_x\big|_0^1\right) = 0$，根据 Fredholm 选择公理得出，当且仅当 $\int_0^1 V\hat{\varphi}_1 \mathrm{d}x = 0$ 时，方程 $d_1\varphi_{xx} + \frac{b\Theta_{d_1}}{k_2+\Theta_{d_1}}\varphi - m\varphi = V, 0<x<1, \varphi_x(0) = \varphi_x(1) + \gamma\varphi(1) = 0$ 在 $W^{2,p}(0,1)$ 有解(记作 $\tilde{\varphi}$)。

已知算子 $d_1\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - m$ 和 $\boldsymbol{B}(d_1)$ 在对应的边界条件下是可逆的。因此，假设

$$\tilde{\varrho} = \left(d_1\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - m\right)^{-1}\left(-\frac{b\Theta_{d_1}}{k_2+\Theta_{d_1}}\tilde{\varphi} + W\right), \left(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}(d_1)^{-1}\begin{pmatrix} \chi \\ \frac{b\Theta_{d_1}}{k_2+\Theta_{d_1}}\tilde{\varrho} + U \end{pmatrix},$$

则当且仅当 $\int_0^1 V\hat{\varphi}_1 \mathrm{d}x = 0$ 时，$\left(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\varrho}\right)$ 是(21)的解。即当且仅当 $\int_0^1 V\hat{\varphi}_1 \mathrm{d}x = 0$ 时，$(\chi, U, V, W) \in Y_2$ 在值域 $R\left(\mathcal{D}_{(\chi,U,V,W)}F\left(d_1;\Theta_{d_1},\Theta_{d_1},0,0\right)\right)$ 中。

接下来验证横截面条件：

$$\mathcal{D}_{d(\chi,U,V,W)}F\left(d_1;\Theta_{d_1},\Theta_{d_1},0,0\right)\left(\phi_1,\psi_1,\hat{\varphi}_1,\hat{\varrho}_1\right)^{\mathrm{T}} \notin R\left(\mathcal{D}_{(\chi,U,V,W)}F\left(d_1;\Theta_{d_1},\Theta_{d_1},0,0\right)\right).$$

直接计算可得

$$\mathcal{D}_{d(\chi,U,V,W)}F\left(d_1;\Theta_{d_1},\Theta_{d_1},0,0\right)\left(\phi_1,\psi_1,\hat{\varphi}_1,\hat{\varrho}_1\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \\ \left(\hat{\varphi}_1\right)_{xx} + \frac{\partial\left(\frac{b\Theta_d}{k_2+\Theta_d}\right)}{\partial d}\Bigg|_{d=d_1}\hat{\varphi}_1 \\ \left(\hat{\varrho}_1\right)_{xx} + \frac{\partial\left(\frac{b\Theta_d}{k_2+\Theta_d}\right)}{\partial d}\Bigg|_{d=d_1}\hat{\varphi}_1 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 = {} & \left(\phi_1\right)_{xx} - \frac{a\left(k_1+\beta_1\Theta_{d_1}\right)}{\left(k_1+z-\Theta_{d_1}+\beta_1\Theta_{d_1}\right)^2}\frac{\partial\Theta_d}{\partial d}\bigg|_{d=d_1}\phi_1 \\
& -\Theta_{d_1}\frac{\partial\left[\frac{a\left(k_1+\beta_1\Theta_d\right)}{\left(k_1+z-\Theta_d+\beta_1\Theta_d\right)^2}\right]}{\partial d}\Bigg|_{d=d_1}\phi_1 + \frac{\partial\left[\frac{a\left(z-\Theta_d\right)\left(k_1+z-\Theta_d\right)}{\left(k_1+z-\Theta_d+\beta_1\Theta_d\right)^2}\right]}{\partial d}\Bigg|_{d=d_1}\psi_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 = {} & \left(\psi_1\right)_{xx} - \frac{a\left(k_1+\beta_1\Theta_{d_1}\right)}{\left(k_1+z-\Theta_{d_1}+\beta_1\Theta_{d_1}\right)^2}\frac{\partial\Theta_d}{\partial d}\bigg|_{d=d_1}\phi_1 - \Theta_{d_1}\frac{\partial\left[\frac{a\left(k_1+\beta_1\Theta_d\right)}{\left(k_1+z-\Theta_d+\beta_1\Theta_d\right)^2}\right]}{\partial d}\Bigg|_{d=d_1}\phi_1 \\
& + \frac{\partial\left[\frac{a\left(z-\Theta_d\right)\left(k_1+z-\Theta_d\right)}{\left(k_1+z-\Theta_d+\beta_1\Theta_d\right)^2}\right]}{\partial d}\Bigg|_{d=d_1}\psi_1 - \frac{\partial\left[\frac{b\Theta_d}{k_2+\Theta_d}\right]}{\partial d}\Bigg|_{d=d_1}\hat{\varrho}_1,
\end{aligned}$$

且根据在区间(0, 1)上 $\frac{\partial\left(\frac{b\Theta_d}{k_2+\Theta_d}\right)}{\partial d}\Bigg|_{d=d_1} = \frac{bk_2}{\left(k_2+\Theta_{d_1}\right)^2}\cdot\frac{\partial\Theta_d}{\partial d}\bigg|_{d=d_1} < 0$ 有

$$\int_0^1\left[\left(\hat{\varphi}_1\right)_{xx}+\frac{\partial\left(\dfrac{b\Theta_d}{k_2+\Theta_d}\right)}{\partial d}\Bigg|_{d=d_1}\hat{\varphi}_1\right]\hat{\varphi}_1\mathrm{d}x=-\gamma\hat{\varphi}_1^2(1)-\int_0^1\left(\hat{\varphi}_1\right)_x^2\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{\partial\left(\dfrac{b\Theta_d}{k_2+\Theta_d}\right)}{\partial d}\Bigg|_{d=d_1}\hat{\varphi}_1^2\mathrm{d}x<0.$$

因此，$\mathcal{D}_{d(\chi,U,V,W)}F\left(d_1;\Theta_{d_1},\Theta_{d_1},0,0\right)\left(\phi_1,\psi_1,\hat{\varphi}_1,\hat{\varrho}_1\right)^{\mathrm{T}}\notin R\left(\mathcal{D}_{(\chi,U,V,W)}F\left(d_1;\Theta_{d_1},\Theta_{d_1},0,0\right)\right)$。

记 $\mathbf{Z}=\left\{(\chi,U,V,W)\in Y_1:\int_0^1 V\hat{\varphi}_1\mathrm{d}x=0\right\}$，明显，$\mathbf{Z}\oplus\operatorname{span}\left\{\left(\phi_1,\psi_1,\hat{\varphi}_1,\hat{\varrho}_1\right)\right\}=Y_1$。根据[14]中分歧理论可得，存在 $\sigma_0>0$ 和 C^1 光滑的曲线 $\left(d(s),\rho(s),\pi(s),\theta(s),\varsigma(s)\right):(-\sigma_0,\sigma_0)\to\mathbb{R}\times\mathbf{Z}$，有 (i) $d(0)=d_1$，(ii) $\rho(0)=0$，$\pi(0)=0$，$\theta(s)=0$，$\varsigma(s)=0$，(iii) $F\left(d(s);\chi(s),U(s),V(s),W(s)\right)=0$，其中，$|s|<\sigma_0$，$\chi(s)=\Theta_d+s\left(\phi_1+\rho(s)\right)$，$U(s)=\Theta_d+s\left(\psi_1+\pi(s)\right)$，$V(s)=s\left(\hat{\varphi}_1+\theta(s)\right)$，$W(s)=s\left(\hat{\varrho}_1+\varsigma(s)\right)$。

即当 $d=d(s)$ 时，$\left(\chi(s),U(s),V(s),W(s)\right)$ 是(19)的解。设 $S(s)=z-\chi(s)$，已知在区间[0, 1]上 $\hat{\varphi}_1,\hat{\varrho}_1>0$，得到分支 $\Gamma=\left\{\left(d(s);S(s),U(s),V(s),W(s)\right):0<s<\sigma_0\right\}$ 是系统(4)~(5)的正稳态解。即系统(4)~(5)在 $\left(d_1;z-\Theta_{d_1},\Theta_{d_1},0,0\right)$ 附近的非平凡非负解，要么在半平凡解分支 $\left\{\left(d;z-\Theta_d,\Theta_d,0,0\right):d\in(0,d_0)\right\}$ 上，要么在分支 Γ 上。

根据引理 1.6，当 $d>d_1$ 时，系统(4)~(5)没有正解，因此可以得出导数 $\dot{d}(0)<0$，$d(s)<d_1$，其中 $0<s<\sigma_0$。即正解分支 Γ 的分歧方向向左，且存在 $\varepsilon>0$ 足够小使得系统(4)-(5)在 $d\in\left(d_1-\varepsilon,d_1\right)$ 时至少存在一个正解。

第 2 步 局部稳定性

设 $\mathcal{L}\left(d(s);S(s),U(s),V(s),W(s)\right)$ 为系统(4)~(5)在 $\left(d(s);S(s),U(s),V(s),W(s)\right)$ 处的线性化算子。由[15]中的推论 1.13 可得，存在定义在 d_1 上的 C^1 函数 $d\mapsto\left(\mathfrak{o}(s),\mathfrak{p}(s)\right)\in\mathbb{R}\times Y_1$ 和定义在零点领域上的 C^1 函数 $s\mapsto\left(\mathfrak{h}(s),\mathfrak{m}(s)\right)\in\mathbb{R}\times Y_1$，使得 $\left(\mathfrak{o}(d_1),\mathfrak{p}(d_1)\right)=\left(0,\phi_1,\psi_1,\hat{\varphi}_1,\hat{\varrho}_1\right)=\left(\mathfrak{h}(0),\mathfrak{m}(0)\right)$，且在领域上有

$$\mathcal{L}\left(d;z-\Theta_d,\Theta_d,0,0\right)\mathfrak{p}(d)=\mathfrak{o}(d)\mathfrak{p}(d),\left|d-d_1\right|\ll 1,$$

$$\mathcal{L}\left(d(s);S(s),U(s),V(s),W(s)\right)\mathfrak{m}(s)=\mathfrak{h}(s)\mathfrak{m}(s),0<s\ll 1.$$

根据[15]中的推论 1.16 可得 $\lim\limits_{s\to 0^+}\dfrac{s\dot{d}(s)\dot{\mathfrak{o}}(d_1)}{\mathfrak{h}(s)}=-1$，这里 $\dot{d}(s)$ 是 $d(s)$ 对 s 的导数，$\dot{\mathfrak{o}}(d_1)$ 是 $\mathfrak{o}(d_1)$ 在 $d=d_1$ 处对 d 的导数，同时 $\mathfrak{o}(d)$ 是如下问题的简单特征值

$$\begin{cases}d\varphi_{xx}+\varphi f_2\left(\Theta_d,0\right)-m\varphi=\mathfrak{o}(d)\varphi, & 0<x<1,\\ \varphi_x(0)=\varphi_x(1)+\gamma\varphi(1)=0.\end{cases}$$

因此 $\mathfrak{o}(d)=\mu_1\left(d,\dfrac{b\Theta_d}{k_2+\Theta_d}\right)-m$。由主特征值性质知，$\dot{\mathfrak{o}}(d_1)<0$，前面分析已有 $\dot{d}(0)<0$，可得，对于 $0<s<\sigma_0$ 有 $\mathfrak{h}(s)<0$。因此系统(4)~(5)在分支 Γ 上的正解是局部渐近稳定的。

第 3 步 全局分歧

根据[16]定理 1.2，借助 Fredholm 算子的全局分歧结论，可将局部解分支 Γ 延拓至全局分支。显然，映射 Y_1 嵌入 Y_2 是紧的，$F:\mathbb{R}_+\times Y_1\to Y_2$ 是 C^1 光滑的。由[14]定理 3.3 可得，对 $\forall\left(d;\chi,U,V,W\right)\in\mathbb{R}_+\times Y_1$，Frechét 导数 $\mathcal{D}_{(\chi,U,V,W)}F\left(d;\chi,U,V,W\right)$ 为指标 0 的 Fredholm 算子，从而再根据[16]中定理 1.1 可推得，集合

$$\left\{\left(d;\chi,U,V,W\right)\in\mathbb{R}\times Y_1:F\left(d;\chi,U,V,W\right)=0,\left(\chi,U,V,W\right)\neq\left(\Theta_d,\Theta_d,0,0\right)\right\}$$

中的连通分支 $\mathfrak{B}$ 发自点 $\left(d_1;\Theta_{d_1},\Theta_{d_1},0,0\right)$ 附近的 $\left\{\left(d;\Theta_d,\Theta_d,0,0\right):d\in(0,d_1)\right\}$。该连通元 $\mathfrak{B}$ 必满足二者其一：

(i) 它在$\mathbb{R}_+\times Y_1$中非紧；(ii) 它包含点$\left(d_2;\Theta_{d_2},\Theta_{d_2},0,0\right)$，其中$d_2\neq d_1$。

设$\mathfrak{B}'=\left\{\left(d;S,U,V,W\right):S=z-\chi,\left(d;\chi,U,V,W\right)\in\mathfrak{B}\right\}$。

已知$Y_1^+=\left\{\left(S,U,V,W\right)\in Y_1:S>0,U>0,V>0,W>0,x\in\left[0,1\right]\right\}$，则$\mathfrak{B}'\cap\left(\mathbb{R}_+\times Y_1^+\right)\neq\varnothing$。记$\mathfrak{B}^*=\mathfrak{B}'\cap\left(\mathbb{R}_+\times Y_1^+\right)$，则$\mathfrak{B}^*$由分歧点$\left(d_1;z-\Theta_{d_1},\Theta_{d_1},0,0\right)$附近的局部正解分支$\Gamma$组成。设$\mathfrak{B}^+$为$\mathfrak{B}'\setminus\left\{\left(d\left(s\right);S\left(s\right),U\left(s\right),V\left(s\right),W\left(s\right)\right):-\sigma_0<s<0\right\}$的连通元，则$\mathfrak{B}^*\subset\mathfrak{B}^+$。根据[14]定理4.4可知$\mathfrak{B}^+$满足三者其一：(i) 它包含点$\left(d_2;z-\Theta_{d_2},\Theta_{d_2},0,0\right)$，其中$d_2\neq d_1$；(ii) 它是非紧的；(iii) 它包含点$\left(d;z-\Theta_d+S,\Theta_d+U,V,W\right)$，其中$\left(S,U,V,W\right)\neq0$，$\left(S,U,V,W\right)\in\mathbf{Z}$。

假设(iii)成立，对$\forall\left(S,U,V,W\right)\in\mathfrak{B}^*$，在区间[0, 1]上有$V>0$，则$\int_0^1V\hat{\varphi}_1\mathrm{d}x>0$，这与$\left(S,U,V,W\right)\in\mathbf{Z}$矛盾，因此(iii)不可能。

假设(i)成立，则存在一组序列点$\left\{\left(d_n;S_n,U_n,V_n,W_n\right)\right\}\subset\mathfrak{B}^+\cap\left(\mathbb{R}_+\times Y_1^+\right)$，满足在区间[0, 1]上有$S_n>0,U_n>0,V_n>0,W_n>0$，且这组序列点列随着$n\to\infty$收敛于$\left(d_2,z-\Theta_{d_2},\Theta_{d_2},0,0\right)$。由$V_n$的方程可知$\mu_1\left(d_n,\frac{bU_n}{k_2+U_n+\beta_2W_n}\frac{l}{l+W_n}\right)=m$，当$n\to\infty$时，可得$\mu_1\left(d_2,\frac{b\Theta_{d_2}}{k_2+\Theta_{d_2}}\right)=m$，根据(9)得到$d_2=d_1$，矛盾。

接下来证明$\mathfrak{B}^+-\left\{\left(d_1,z-\Theta_{d_1},\Theta_{d_1},0,0\right)\right\}\subset\mathbb{R}_+\times Y_1^+$。假设不然，则存在

$$\left(\tilde{d};\tilde{S},\tilde{U},\tilde{V},\tilde{W}\right)\in\mathfrak{B}^+-\left\{\left(d_1,z-\Theta_{d_1},\Theta_{d_1},0,0\right)\right\}\subset\partial\left(\mathbb{R}_+\times Y_1^+\right)$$

是序列点$\left\{\left(d_k;S_k,U_k,V_k,W_k\right)\right\}\subset\mathfrak{B}^+\cap\left(\mathbb{R}_+\times Y_1^+\right)$的极限，其中在区间[0, 1]上有$S_k>0$，$U_k>0$，$V_k>0$，$W_k>0$。根据$\left(\tilde{d};\tilde{S},\tilde{U},\tilde{V},\tilde{W}\right)\in\partial\left(\mathbb{R}_+\times Y_1^+\right)$可知，下面一种情况成立：(a) 在区间[0, 1]上，$\tilde{S}\geq0$，且对于某个点$x_0\in\left[0,1\right]$有$\tilde{S}\left(x_0\right)=0$；(b) 在区间[0, 1]上，$\tilde{U}\geq0$，且对于某个点$x_0\in\left[0,1\right]$有$\tilde{U}\left(x_0\right)=0$；(c) 在区间[0, 1]上，$\tilde{V}\geq0$，且对于某个点$x_0\in\left[0,1\right]$有$\tilde{V}\left(x_0\right)=0$；(d) 在区间[0, 1]上，$\tilde{W}\geq0$，且对于某个点$x_0\in\left[0,1\right]$有$\tilde{W}\left(x_0\right)=0$；(e) $\tilde{d}=0$。

根据强极值原理知，在区间[0, 1]上，$\tilde{S}>0$，因此(a)不成立。如果在区间[0, 1]上$\tilde{U}=0$，则根据$\tilde{V}$和$\tilde{W}$的方程得，在区间[0, 1]上$\tilde{V}=\tilde{W}\equiv0$。根据在区间[0, 1]上$\tilde{W}\left(x\right)\geq\tilde{V}\left(x\right)$，进一步得到在区间[0, 1]上$\tilde{W}\left(x\right)\equiv0$当且仅当在区间[0, 1]上$\tilde{V}\left(x\right)\equiv0$，因此根据强极值原理，(b), (c)和(d)意味着只有这两种情况会发生：(i) 在区间[0, 1]上，$\tilde{U}\equiv0$，$\tilde{V}\equiv0$；(ii) 在区间[0, 1]上，$\tilde{U}>0$，$\tilde{V}\equiv0$。

假设在区间[0, 1]上$\tilde{U}\equiv0$，$\tilde{V}\equiv0$，那么$\tilde{S}=z$，$\tilde{W}\equiv0$，且在Y_1中取极限$k\to\infty$有$\left(d_k;S_k,U_k,V_k,W_k\right)\to\left(d_k;z,0,0,0\right)$。根据$V_k$的方程得出$m=\mu_1\left(d_k,\frac{bU_k}{k_2+U_k+\beta_2W_k}\frac{l}{l+W_k}\right)$，

当$k\to\infty$时，有$m=\mu_1\left(\tilde{d},0\right)<0$，矛盾。假设在区间[0, 1]上$\tilde{U}>0$，$\tilde{V}\equiv0$，那么在区间[0, 1]上$\tilde{W}\equiv0$且$\left(\tilde{S},\tilde{U}\right)$满足

$$\begin{cases}\tilde{d}\tilde{S}_{xx}-\tilde{U}\dfrac{a\tilde{S}}{k_1+\tilde{S}+\beta_1\tilde{U}}=0,\tilde{d}\tilde{U}_{xx}+\tilde{U}\dfrac{a\tilde{S}}{k_1+\tilde{S}+\beta_1\tilde{U}}=0, & 0<x<1,\\ \tilde{S}_x\left(0\right)=-S^0,\tilde{S}_x\left(1\right)+\gamma\tilde{S}\left(1\right)=0,\tilde{U}_x\left(0\right)=\tilde{U}_x\left(1\right)+\gamma\tilde{U}\left(1\right)=0, & \end{cases}$$

因此$\left(\tilde{S},\tilde{U}\right)=\left(z-\Theta_{\tilde{d}},\Theta_{\tilde{d}},0,0\right)$。即$k\to\infty$有$\left(d_k;S_k,U_k,V_k,W_k\right)\to\left(\tilde{d};z-\Theta_{\tilde{d}},\Theta_{\tilde{d}},0,0\right)$。根据$V_k$的方程知$m=\mu_1\left(d_k,\frac{bU_k}{k_2+U_k+\beta_2W_k}\frac{l}{l+W_k}\right)$，取$k\to\infty$可以得到$m=\mu_1\left(\tilde{d},\frac{b\Theta_{\tilde{d}}}{k_2+\Theta_{\tilde{d}}}\right)$，从而可得$\tilde{d}=d_1$，矛盾。

假设$\tilde{d}=0$，即存在$d_k\to0$和系统(4)~(5)的正解$\left(S_k,U_k,V_k,W_k\right)$，其中$d=d_k$，使得在$Y_1$中，当$k\to\infty$时有$\left(S_k,U_k,V_k,W_k\right)\to\left(\tilde{S},\tilde{U},\tilde{V},\tilde{W}\right)$。

对系统(4)~(5) $\left(d=d_k\right)$的每个方程在[0, 1]上积分，并$k\to\infty$取极限可以得到

$$\begin{cases} \int_0^1 \tilde{U}\dfrac{a\tilde{S}}{k_1+\tilde{S}+\beta_1\tilde{U}}\mathrm{d}x=0, \\ \int_0^1 \tilde{U}\dfrac{a\tilde{S}}{k_1+\tilde{S}+\beta_1\tilde{U}}\mathrm{d}x-\int_0^1 \tilde{W}\dfrac{b\tilde{U}}{k_2+\tilde{U}+\beta_2\tilde{W}}\mathrm{d}x=0, \\ \int_0^1 \tilde{V}\dfrac{b\tilde{U}}{k_2+\tilde{U}+\beta_2\tilde{W}}\dfrac{l}{l+\tilde{W}}\mathrm{d}x-m\int_0^1\tilde{V}\mathrm{d}x=0, \\ \int_0^1 \tilde{V}\dfrac{b\tilde{U}}{k_2+\tilde{U}+\beta_2\tilde{W}}\dfrac{l}{l+\tilde{W}}\mathrm{d}x-m\int_0^1\tilde{W}\mathrm{d}x=0, \end{cases} \tag{20}$$

根据(23)前两个方程可得 $\int_0^1 \tilde{W}\frac{b\tilde{U}}{k_2+\tilde{U}+\beta_2\tilde{W}}\mathrm{d}x=\int_0^1 \tilde{U}\frac{a\tilde{S}}{k_1+\tilde{S}+\beta_1\tilde{U}}\mathrm{d}x=0$。由于在[0, 1]上 $\tilde{V}\le\tilde{W}$，可得 $\int_0^1 \tilde{V}\frac{b\tilde{U}}{k_2+\tilde{U}+\beta_2\tilde{W}}\mathrm{d}x=0$。那么根据(23)后两个方程有 $\int_0^1\tilde{V}\mathrm{d}x=0$，$\int_0^1\tilde{W}\mathrm{d}x=0$，因此在[0, 1]上 $\tilde{V}\equiv0$，$\tilde{W}\equiv0$。已知 $\tilde{S}_x(0)=-S^0$，于是在[0, 1]上 $\tilde{S}>0$，因此在[0, 1]上 $\tilde{U}\equiv0$。根据 V_k 的方程知 $m=\mu_1\left(d_k,\frac{bU_k}{k_2+U_k+\beta_2W_k}\frac{l}{l+W_k}\right)$，取极限 $k\to\infty$，可得 $m=\mu_1(0,0)=0$，矛盾。因此 $\mathfrak{B}^+-\left\{\left(d_1,z-\Theta_{d_1},\Theta_{d_1},0,0\right)\right\}\subset\mathbb{R}_+\times Y_1^+$。

综合引理 1.5 和 1.6 可知，唯一可能是 $\mathfrak{B}^*=\mathfrak{B}^+-\left\{\left(d_1;z-\Theta_{d_1},\Theta_{d_1},0,0\right)\right\}$ 在 $\mathbb{R}_+\times Y_1^+$ 中延拓至无穷远，且延拓至无穷只有一种方式，即 d 沿分支递减至 0。据此可得，系统(4)~(5)至少存在一个正解的充要条件为 $d\in(0,d_1)$。进一步结合第二步的分析结论，存在充分小的正数的 ε，使得当 $d\in(d_1-\varepsilon,d_1)$ 时系统(4)~(5)至少存在一个稳定的正解。

基金项目

国家自然科学基金(No. 12201067)，长安大学中央高校基本科研业务费专项(Nos. 300102124201，300102124205)资金资助。

参考文献

[1] Shi, J., Wu, Y. and Zou, X. (2020) Coexistence of Competing Species for Intermediate Dispersal Rates in a Reaction-Diffusion Chemostat Model. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **32**, 1085-1112. https://doi.org/10.1007/s10884-019-09763-0

[2] Liu, J., Liu, X., Zheng, S., *et al*. (2007) Positive Steady State of a Food Chain System with Diffusion. *Conference Publications*, **2007**, 667-676.

[3] Nie, H., Hsu, S. and Wu, J. (2017) A Competition Model with Dynamically Allocated Toxin Production in the Unstirred Chemostat. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **16**, 1373-1404. https://doi.org/10.3934/cpaa.2017066

[4] Nie, H. and Wu, J. (2014) Multiple Coexistence Solutions to the Unstirred Chemostat Model with Plasmid and Toxin. *European Journal of Applied Mathematics*, **25**, 481-510. https://doi.org/10.1017/s0956792514000096

[5] Wu, J., Nie, H. and Wolkowicz, G.S.K. (2004) A Mathematical Model of Competition for Two Essential Resources in the Unstirred Chemostat. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **65**, 209-229. https://doi.org/10.1137/s0036139903423285

[6] Zheng, S., Guo, H. and Liu, J. (2008) A Food Chain Model for Two Resources in Un-Stirred Chemostat. *Applied Mathematics and Computation*, **206**, 389-402. https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.09.017

[7] Jiang, D., Nie, H. and Wu, J. (2017) Crowding Effects on Coexistence Solutions in the Unstirred Chemostat. *Applicable Analysis*, **96**, 1016-1046. https://doi.org/10.1080/00036811.2016.1171319

[8] Li, H., Wu, J., Li, Y. and Liu, C. (2018) Positive Solutions to the Unstirred Chemostat Model with Crowley-Martin Functional Response. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—Series B*, **23**, 2951-2966.

https://doi.org/10.3934/dcdsb.2017128

[9] Nie, H., Shi, Y. and Wu, J. (2022) The Effect of Diffusion on the Dynamics of a Predator-Prey Chemostat Model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **82**, 821-848. https://doi.org/10.1137/21m1432090

[10] Cantrell, R.S. and Cosner, C. (2004) Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations. Wiley. https://doi.org/10.1002/0470871296

[11] He, X. and Zheng, S. (2017) Protection Zone in a Diffusive Predator-Prey Model with Beddington-DeAngelis Functional Response. *Journal of Mathematical Biology*, **75**, 239-257. https://doi.org/10.1007/s00285-016-1082-5

[12] Zhang, W., Nie, H. and Wang, Z. (2023) Dynamics of an Unstirred Chemostat Model with Beddington-DeAngelis Functional Response. *Frontiers in Physics*, **11**, Article ID: 1205571. https://doi.org/10.3389/fphy.2023.1205571

[13] Nie, H. and Wu, J. (2006) A System of Reaction-Diffusion Equations in the Unstirred Chemostat with an Inhibitor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **16**, 989-1009. https://doi.org/10.1142/s0218127406015246

[14] Shi, J. and Wang, X. (2009) On Global Bifurcation for Quasilinear Elliptic Systems on Bounded Domains. *Journal of Differential Equations*, **246**, 2788-2812. https://doi.org/10.1016/j.jde.2008.09.009

[15] Crandall, M.G. and Rabinowitz, P.H. (1973) Bifurcation, Perturbation of Simple Eigenvalues, Itand Linearized Stability. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **52**, 161-180. https://doi.org/10.1007/bf00282325

[16] López-Gómez, J. (2016) Global Bifurcation for Fredholm Operators. *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste*, **48**, 539-564.