

容斥原理与网络可靠性分析

艾达洪·阿补力买提, 殷代君

新疆师范高等专科学校(新疆教育学院), 人工智能与大数据学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2026年3月23日; 录用日期: 2026年4月29日; 发布日期: 2026年5月26日

摘要

系统的可靠性作为时间的函数, $R(t)$, 被定义为系统在 $[0, t]$ 区间内正常运行的概率, 并假设它在时间 $t=0$ 时处于运行状态。本文重点介绍容斥原理在概率故障模型中子网络可靠性, 定义为由特定大小的无故障子网络在网络中仍然可用的概率, 分析中的应用。

关键词

可靠性分析, 包含和排除原理, 概率故障模型

The Principle of Inclusion-Exclusion and Network Reliability Analysis

Aidahong Abulimaiti, Daijun Yin

School of Artificial Intelligence and Big Data, Xinjiang Education Institute (Xinjiang Teacher's College), Urumqi
Xinjiang

Received: March 23, 2026; accepted: April 29, 2026; published: May 26, 2026

Abstract

The reliability of a system as a function of time, $R(t)$, is defined as the probability of the system operating normally within the interval of $[0, t]$, assuming it is in operation at time $t=0$. This article focuses on the application of inclusion and exclusion principles in calculating sub-network reliability, defined as the probability that a specific size of inexplicable sub network is still available in the network, analysis in probabilistic fault models.

Keywords

Reliability Analysis, The Principle of Inclusion and Exclusion, Probabilistic Fault Model



1. 引言

随着网络技术的飞速发展, 网络可靠性成为保障各类网络服务稳定运行的关键因素。系统的可靠性作为时间的函数, $R(t)$, 被定义为系统在 $[0, t]$ 区间内正常运行的概率, 并假设它在时间 $t=0$ 时处于运行状态。传统的可靠性评估方法主要是终端可靠性, 如全终端可靠性和距离计算机网络的可靠性[1][2]。其他可靠是基于任务的可靠性, 定义为系统中有一些最小数量的连接节点可用于任务执行的概率[3], 以及子网络可靠性[4], 定义为由特定大小的无故障子网络在网络中仍然可用的概率。在这些可靠性衡量标准中, 子网络可靠性是最实用的一种。

最初, 学者们引入概率故障模型来评估超立方体的子立方体可靠性[5]。随后, Wu 和 Latifi 研究了星网络的子网络可靠性[6]。受这两篇文献的启发, 国内外学者研究许多网络图的子网络可靠性, 如冒泡排序网络[7], k -元 n -立方体网络[8], 分裂星网络[9]以及完全置换网络[10]等。

因子系统重叠、组合情况复杂, 精确计算难度较大, 为此研究者提出了包含容斥原理在内的多种近似方法与上下界估计方法。本文探讨容斥原理在网络可靠性分析中的简单应用, 阐述容斥原理的基本概念、数学表达形式及其在网络可靠性计算中的理论基础。通过构建基于容斥原理的网络可靠性分析模型, 针对不同类型的网络拓扑结构进行实例分析, 展示了容斥原理在解决网络可靠性问题上的有效性和实用性。

2. 预备知识

容斥原理概述

基本公式

板容斥原理的基本思想是在计数时, 先不考虑重叠的情况, 将包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来, 然后再把计数时重复计算的数目排斥出去, 使得计算的结果既无遗漏又无重复。对于多个有限集合, A_1, A_2, \dots, A_n , 其并集元素个数的容斥原理公式为:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \quad (1)$$

该公式通过对各个集合及其交集元素个数的加和与减和运算, 准确计算出了多个集合并集的元素个数。

3. 主要结果与推导

3.1. 子网络可靠性的计算

3.1.1. 模型构建

在网络可靠性分析中, 将网络中的各个组成部分(如处理器)看作集合, 将网络正常工作的状态看作集合的并集。假设网络中有 n 个处理器, 每个处理器正常工作的事件分别为 A_1, A_2, \dots, A_n , 那么网络正常工作的概率 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ 就可以用容斥原理公式进行计算。通过确定每个处理器正常工作的概率 $P(A_i)$ 以及处理器之前同时正常工作的概率 $P(A_i \cap A_j)$, $P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ 等, 代入容斥原理公式即可得网

络正常工作的概率, 从而实现网络可靠性的评估。例如, 在参考文献[6]中, 已得到星网络的可靠性:

$$R_{n,n-1}(p) = \sum_{i=0}^{n(n-1)-1} c_i + (-1) \sum_{i,j=0,1,\dots,n(n-1)-1}^{i \neq j} c_i c_j (\text{一对}) + (-1)^2 \sum_{i,j,k=0,1,\dots,n(n-1)-1}^{i \neq j \neq k} c_i c_j c_k (\text{三重}) \\ + (-1)^3 \sum_{i,j,k,l=0,1,\dots,n(n-1)-1}^{i \neq j \neq k \neq l} c_i c_j c_k c_l (\text{四重}) + \dots + (-1)^{n(n-1)-1} \prod_{i=0}^{n(n-1)-1} c_i \quad (2)$$

其中 c_i 表示在 n -维星网络中 $(n-1)$ -维子星网络正常运行的概率。

3.1.2. 应用实例

下面, 我们利用公式(2)思路, 计算平衡超立方体模型和 Godan 网络模型的子网络可靠性。

• 平衡超立方体网络模型

定义: 平衡超立方体模型, BH_n , 的递归定义如下:

(1) BH_1 为一个 4-圈, 其顶点依次标记为 0、1、2 和 3。

(2) BH_n 由 4 个子图构成, 分别记为 $B^{(i)}$ ($0 \leq i \leq 3$), 其中 $B^{(i)} \cong BH_{n-1}$ 。对于 BH_n 中的任意顶点 $v = v_0 v_1 \dots v_{i-1} v_i v_{i+1} \dots v_n$, 该顶点有两个邻点, 满足:

$$N_{BH_n - B^{(i)}}(v) = \begin{cases} (v_0 \pm 1) v_1 \dots v_{n-2} (v_{n-1} + 1) \in V(B^{(i+1)}), \text{ 其中 } v_0 \text{ 为偶数} \\ (v_0 \pm 1) v_1 \dots v_{n-2} (v_{n-1} - 1) \in V(B^{(i-1)}), \text{ 其中 } v_0 \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (3)$$

平衡超立方体 BH_1 和 BH_2 如图 1 所示。

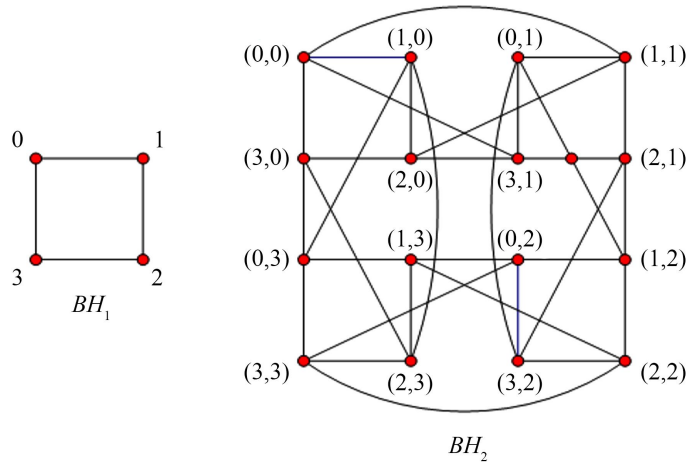


Figure 1. Balanced hypercube BH_1 and BH_2
图 1. 平衡超立方体 BH_1 和 BH_2

BH_n 具有如下性质:

- (1) BH_n 是二部图;
- (2) BH_n 是点传递的, 也是边传递的;
- (3) 对于顶点 $v = v_0 v_1 \dots v_{i-1} v_i v_{i+1} \dots v_n$, 在 BH_n 中存在唯一的顶点 $s(v) = (v_0 + 2) \dots v_{i-1} v_i v_{i+1} \dots v_n$ 与 v 拥有相同的 $2n$ 个邻点;
- (4) 当 $n \geq 2$ 时, 对于 $0 \leq i \leq 3$, $B^{(i)}$ 与 $B^{(i+1)}$ 之间存在 4^{n-1} 条边。

超立方体是并行和分布式系统中最受欢迎的互连网络之一。类似于超立方体, 由吴和黄[11]提出的平

平衡超立方体 BH_n 是二部图, 顶点和边都具有对称性[12]。超立方体和平衡超立方体在顶点连通性和边连通性上都是极大化的。此外, 平衡超立方体优于超立方体, 因为它支持高效的重构, 而无需改变任务之间的相邻关系, 这使其直径比超立方体更小。此外, 平衡超立方体中的每个顶点都有一个唯一的备份顶点, 且具有相同的邻居关系。这意味着在顶点发生故障时, 运行在其上的任务可以轻松转移到其备份顶点, 而无需进行任何修改。

平衡超立方体图的可靠性可以容斥原理来计算, 首先需要明确对于 n 维平衡超立方体图, 可以通过删除 BH_n 中的所有 d -边, 可以将 BH_n 划分为 4 个不相交的 BH_{n-1} 子网络, 其中 $d \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, 用 $H_{d,i}$ 表示 BH_n 中由点集 $\{u = u_0 u_1 \dots u_d \dots u_{n-1} \in V(BH_n) : u_d = i\}$ 导出的子图, 则 $H_{d,0}$ 、 $H_{d,1}$ 、 $H_{d,2}$ 和 $H_{d,3}$ 显然是通过删除所有 BH_n 中的 d -边得到的 4 个不相交的 BH_{n-1} 子网络。

根据文献[13]的研究可知, BH_n 中任意的 BH_{n-1} 子网络可以被唯一的 $H_{d,i}$ 表示, 这说明 BH_n 中有且仅有 $4n$ 个不同的 BH_{n-1} 子网络。因此可知, 在 BH_n 中, 当每个节点独立工作且正常运行概率为 p 时, $n-1$ 维子网络 BH_{n-1} 正常工作的子网络可靠性 $R_n^{n-1}(p)$:

$$R_n^{n-1}(p) = \sum_{i=1}^{4n} R(p) + (-1)^1 \sum_{1 \leq i < j \leq 4n} R(i, j)(p) + (-1)^2 \sum_{1 \leq i < j < l \leq 4n} R(i, j, l)(p) + (-1)^3 \sum_{1 \leq i < j < l < m \leq 4n} R(i, j, l, m)(p) + (-1)^{4n-1} R(1, 2, \dots, 4n)(p) \tag{4}$$

将式(4)右端前三项的和作为 $R_n^{n-1}(p)$ 的上界, 右端前四项作为 $R_n^{n-1}(p)$ 的下界。由于 $R_n^{n-1}(p)$ 的值域为 $[0, 1]$, 可得:

$$R_U = \min \left\{ \sum_{i=1}^{4n} R(p) + (-1)^1 \sum_{1 \leq i < j \leq 4n} R(i, j)(p) + (-1)^2 \sum_{1 \leq i < j < l \leq 4n} R(i, j, l)(p), 1 \right\} \tag{5}$$

$$R_L = \max \left\{ \sum_{i=1}^{4n} R(p) + (-1)^1 \sum_{1 \leq i < j \leq 4n} R(i, j)(p) + (-1)^2 \sum_{1 \leq i < j < l \leq 4n} R(i, j, l)(p) + (-1)^3 \sum_{1 \leq i < j < l < q \leq 4n} R(i, j, l, q)(p), 0 \right\} \tag{6}$$

根据平衡超立方体的性质可知, 对于任意的 BH_{n-1} 子网络共有 4^{n-1} 个顶点, 且 BH_n 中顶点的可靠性为 p , 可知 $R(p) = R(i, j)(p) = \dots = R(1, 2, \dots, 4n) = p^{4^{n-1}}$, 而不同的 BH_{n-1} 子网络之间可能包含共同顶点, 故需要对 2 个和 3 个 BH_{n-1} 子网络间的相交方式进行分类讨论:

对于 2 个 BH_{n-1} 子网络, 有且仅有 2 种不同的相交方式(见图 2):

其中满足类型 1 的不同相交方式共有 $n \times \binom{4}{2} = 6n$ 种, 满足类型 2 的共有

$16 \binom{n-1}{2} + 16(n-1) = 8n(n-1)$ 种, 证明过程见参考文献[14]。

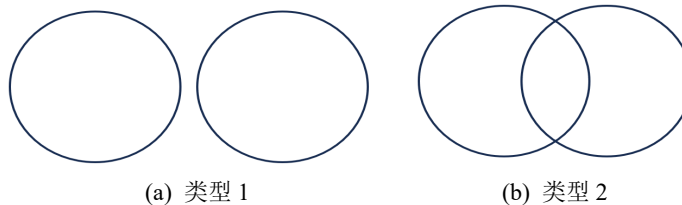


Figure 2. The intersection mode of two $(n-1)$ -dimensional subnetwork graphs
图 2. 2 个 $n-1$ 维子网络图的相交方式

而对于 3 个 BH_{n-1} 子网络, 有 3 种不同的相交方式(见图 3):

其中满足类型 1 的不同相交方式共有 $4n$ 种, 那满足类型 2 的不同相交方式有 $24n(n-1)$ 种, 满足类型 3 的不同相交方式有 $\frac{32n(n-1)(n-2)}{3}$ 种, 证明过程见参考文献[13]。

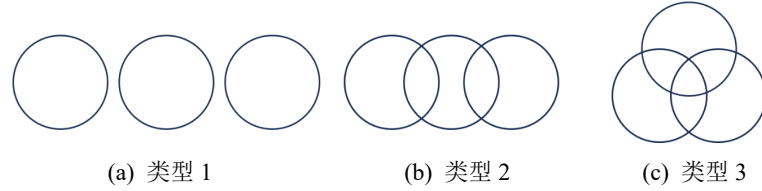


Figure 3. Intersection patterns of three $(n-1)$ -dimensional subnetwork graphs
图 3. 3 个 $n-1$ 维子网络图的相交方式

因此当 $n \geq 3$ 时, 有上限:

$$R_U = \min \left\{ 4np^{4^{n-1}} - \left[6np^{2 \times 4^{n-1}} + 8n(n-1)p^{7 \times 4^{n-2}} \right] \right. \\ \left. + \left[4np^{3 \times 4^{n-1}} + 24n(n-1)p^{10 \times 4^{n-2}} + \frac{32n(n-1)(n-2)}{3} p^{37 \times 4^{n-3}} \right], 1 \right\} \quad (7)$$

同理我们还需讨论 4 个 BH_{n-1} 子网络之间的不同相交方式来得到 $R_n^{n-1}(p)$ 的下界:

对于 4 个 BH_{n-1} 子网络之间的相交方式共有 5 种(见图 4):

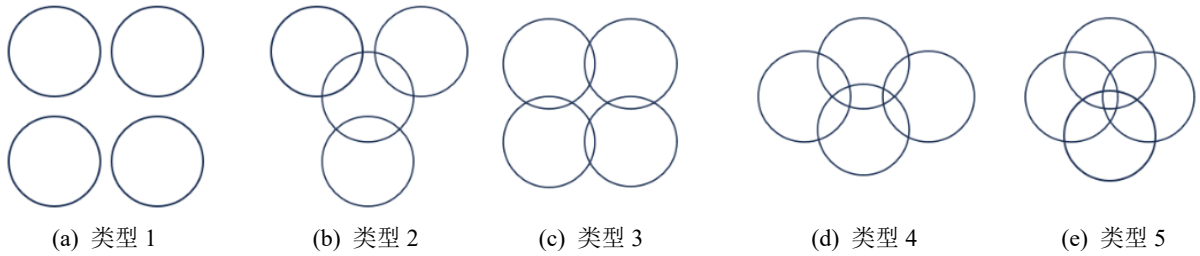


Figure 4. Intersection patterns of four $(n-1)$ -dimensional subnetwork graphs
图 4. 4 个 $n-1$ 维子网络图的相交方式

对于类型 1 共有 n 种不同的相交方式; 对于类型 2 共有 $16n(n-1)$ 种不同的相交方式; 满足类型 3 的共有 $18n(n-1)$ 种; 而类型 4 和类型 5 各有 $48n(n-1)(n-2)$ 和 $\frac{32n(n-1)(n-2)(n-3)}{3}$ 种不同的相交方式, 因此我们可以得到 $R_n^{n-1}(p)$ 下界的表达式:

$$R_L = \max \left\{ 4np^{4^{n-1}} - \left[6np^{2 \times 4^{n-1}} + 8n(n-1)p^{7 \times 4^{n-2}} \right] \right. \\ \left. + \left[4np^{3 \times 4^{n-1}} + 24n(n-1)p^{10 \times 4^{n-2}} + \frac{32n(n-1)(n-2)}{3} p^{37 \times 4^{n-3}} \right] \right. \\ \left. - \left[np^{4^n} + 16n(n-1)p^{13 \times 4^{n-2}} + 18n(n-1)p^{12 \times 4^{n-2}} + 48n(n-1)(n-2)p^{46 \times 4^{n-3}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{32n(n-1)(n-2)(n-3)}{3} p^{175 \times 4^{n-4}} \right], 0 \right\} \quad (8)$$

由此可以得出平衡超立方体图的可靠性区间。

3.2. Godan 网络模型

定义: 对于置换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}, i \rightarrow p_i$ 为方便起见, 我们用 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 来表示该置换。每个置换都

可以表示为若干个循环的乘积[14]。例如: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 3 \ 2)$ 。特别地, 恒等置换记为

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = (1)$ 。两个置换的乘积 $\sigma\tau$ 是指先进行 τ 映射再进行 σ 映射的复合, 例如:

$(1 \ 2)(1 \ 3) = (1 \ 3 \ 2)$ 。令 $\Omega^* = \{(1 \ 2), (1 \ 2 \ 3), (1 \ 3 \ 2)\} \cup \{(1 \ 2)(3 \ i) : 4 \leq i \leq n\}$ 且 $s^* \in \Omega^*$ 。 n 维戈丹图 EA_n 是一个以 $V(EA_n) = S_n$ 为顶点集的图, 其中两个顶点 u 与 v 相邻当且仅当 $u = vs^*$ 。注意到若 $u = vs^*$, 则 $v = u(s^*)^{-1}$ 且 $(s^*)^{-1} \in \Omega^*$ 。由定义容易看出, EA_n 是一个具有 $n!$ 个顶点的 n -正则图。

Ren 和 Wang [14] 引入了 n -维 Godan 网络 EA_n 作为互连网络的拓扑结构, 他们证明了其具有许多理想的特性, 如规则性、高连通性和顶点可换性。Godan 网络 EA_4 如图 5 所示。

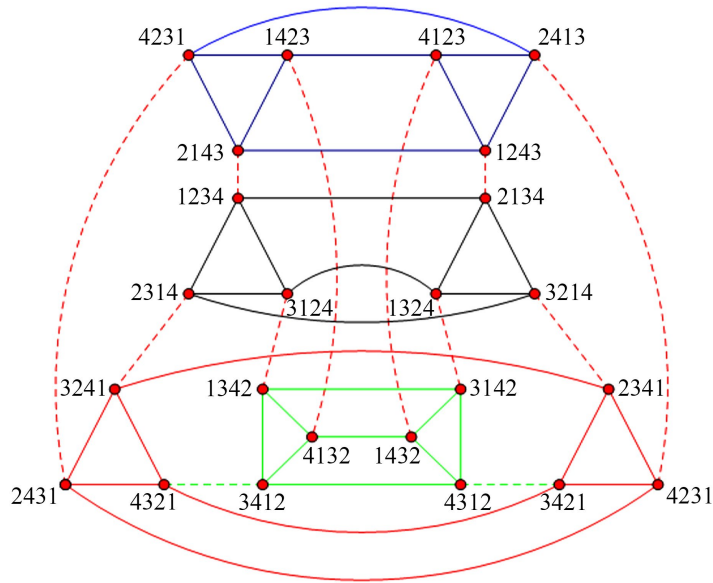


Figure 5. The Godan graph model EA_4
图 5. Godan 网络模型 EA_4

在 EA_n 中, 当每个节点独立工作且正常运行概率为 p 时, $n-1$ 维子网络 GH_{n-1} 正常工作的子网络可靠性 $R_n^{n-1}(p)$, 通过容斥原理计算公式如下:

$$R_n^{n-1}(p) = \sum_{i=1}^{n(n-3)} R(p) + (-1)^1 \sum_{1 \leq i < j \leq n(n-3)} R(i, j)(p) + (-1)^2 \sum_{1 \leq i < j < l \leq n(n-3)} R(i, j, l)(p) + (-1)^3 \sum_{1 \leq i < j < l < m \leq n(n-3)} R(i, j, l, m)(p) + (-1)^{n(n-3)-1} R(1, 2, \dots, n(n-3))(p) \tag{9}$$

4. 结论

总结: 本文介绍了容斥原理在网络可靠性分析中的应用, 阐述了容斥原理的基本概念、数学表达形

式及其在网络可靠性分析中的应用。通过构建基于容斥原理的网络可靠性分析模型, 针对两类网络拓扑结构进行实例分析, 给出了容斥原理下, 两类网络可靠性分析的计算公式。

基金项目

本研究由新疆维吾尔自治区自然科学基金资助, 项目编号: 2022D01A252。

参考文献

- [1] Soh, S., Rai, S. and Trahan, J.L. (1994) Improved Lower Bounds on the Reliability of Hypercube Architectures. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **5**, 364-378. <https://doi.org/10.1109/71.273045>
- [2] Wu, X., Latifi, S. and Jiang, Y. (2007) A Combinatorial Analysis of Distance Reliability in Star Network. 2007 *IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium*, Long Beach, 26-30 March 2007, 1-6. <https://doi.org/10.1109/ipdps.2007.370602>
- [3] Das, C.R. and Kim, J. (1992) A Unified Task-Based Dependability Model for Hypercube Computers. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **3**, 312-324. <https://doi.org/10.1109/71.139205>
- [4] Latifi, S. (2007) A Study of Fault Tolerance in Star Graph. *Information Processing Letters*, **102**, 196-200. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2006.12.013>
- [5] Chang, Y. and Bhuyan, L.N. (1995) A Combinatorial Analysis of Subcube Reliability in Hypercubes. *IEEE Transactions on Computers*, **44**, 952-956. <https://doi.org/10.1109/12.392856>
- [6] Wu, X. and Latifi, S. (2008) Substar Reliability Analysis in Star Networks. *Information Sciences*, **178**, 2337-2348. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2007.11.015>
- [7] Feng, K., Ma, X. and Wei, W. (2021) Subnetwork Reliability Analysis of Bubble-Sort Graph Networks. *Theoretical Computer Science*, **896**, 98-110. <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2021.10.007>
- [8] Liu, X., Zhou, S., Hsieh, S. and Zhang, H. (2022) Robustness of Subsystem Reliability of k-Ary n-Cube Networks under Probabilistic Fault Model. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **33**, 4684-4693. <https://doi.org/10.1109/tpds.2022.3199251>
- [9] Kung, T., Teng, Y., Lin, C. and Hsu, Y. (2017) Combinatorial Analysis of the Subsystem Reliability of the Split-Star Network. *Information Sciences*, **415**, 28-40. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2017.06.012>
- [10] Niu, B., Zhou, S., Zhang, H. and Zhang, Q. (2023) Robustness of Subsystem-Based Reliability for Complete-Transposition Network. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **69**, 4717-4737. <https://doi.org/10.1007/s12190-023-01948-7>
- [11] Wu, J. and Huang, K. (1997) The Balanced Hypercube: A Cube-Based System for Fault-Tolerant Applications. *IEEE Transactions on Computers*, **46**, 484-490. <https://doi.org/10.1109/12.588063>
- [12] Zhou, J.X., Wu, Z.L., Yang, S.C. and Yuan, K.W. (2015) Symmetric Property and Reliability of Balanced Hypercube. *IEEE Transactions on Computers*, **64**, 876-881. <https://doi.org/10.1109/tc.2014.2304391>
- [13] 冯凯, 高红艳. 概率故障条件下平衡超立方体的子网络可靠性[J]. 计算机应用, 2024, 44(z1): 175-182.
- [14] Ren, Y. and Wang, S. (2022) Reliability Analysis of Godan Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **307**, 180-190. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.10.022>