

# 非线性脉冲微分方程模型在传染病动力学中的应用研究

李 静

云南民族大学就业创业指导服务中心, 云南 昆明

收稿日期: 2026年4月10日; 录用日期: 2026年5月15日; 发布日期: 2026年5月28日

## 摘 要

本文基于经典的SIR模型, 构建了包含医疗资源有限以及固定时刻脉冲策略的传染病模型, 旨在刻画间歇性疫苗接种对传染病控制的影响。通过运用频闪映射、不动点定理以及Lambert W函数的性质, 分析了疾病根除周期解的存在性。接着, 结合Floquet乘子理论、比较定理和不等式放缩方法, 研究了系统的全局渐近稳定性。随后, 通过数值模拟分析了医疗资源约束对疾病传播的影响, 并结合敏感性分析识别出影响传染病传播的关键参数。研究表明, 在固定时间节点实施疫苗接种策略能够有效抑制疾病传播, 且接种间隔越短, 防控效果越显著。

## 关键词

资源有限, 传染病动力学, 脉冲微分方程, 周期解

# Research on the Application of Nonlinear Impulsive Differential Equation Models in Infectious Disease Dynamics

Jing Li

Career and Entrepreneurship Guidance Service Center, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: April 10, 2026; accepted: May 15, 2026; published: May 28, 2026

## Abstract

In the context of limited medical resources, this paper builds an infectious disease model based on the classical SIR model, incorporating a fixed-time impulse vaccination strategy to examine the impact of intermittent vaccination on disease control. By utilizing stroboscopic mapping, the fixed-

point theorem, and the properties of the Lambert W function, the existence of periodic solutions for disease eradication is analyzed. Subsequently, the global asymptotic stability of the system is studied using Floquet multiplier theory, comparison theorems, and inequality scaling methods. Subsequently, numerical simulations were conducted to analyze the impact of healthcare resource constraints on disease transmission, and sensitivity analysis was employed to identify the key parameters influencing the spread of infectious diseases. The results indicate that implementing vaccination strategies at fixed time points can effectively suppress disease transmission, and shorter vaccination intervals lead to more significant control effects.

## Keywords

Limited Resources, Infectious Disease Dynamics, Impulsive Differential Equations, Periodic Solutions

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

疾病与人类文明相伴相生，历次全球传染病大流行深刻影响了社会发展。从古代天花的肆虐到中世纪黑死病的爆发，传染病始终威胁着人类的健康与生命安全，也不断推动着相关科学研究的深入[1]-[4]。每一次重大传染病的爆发都促使医学、公共卫生以及全球合作等领域的迅速发展，推动了疫苗研发、疾病预测模型的建立和全球健康治理机制的完善。尽管科学在防治传染病方面取得了显著进展，全球化的背景和病原的变异依然使传染病成为人类健康的重要挑战，且对经济、社会稳定和国际合作产生深远影响[5]。因此，研究和应对传染病的挑战，尤其是在全球范围内，依然是当今时代亟待解决的重要课题[6]。

数学模型是研究传染病传播规律与防控策略的重要工具，近年来，许多研究者在经典 SIR 模型的基础上，发展了多种模型来分析传染病的传播机制[7]-[9]。Kermack 和 McKendrick [10]提出的经典 SIR 模型为传染病传播提供了基本框架，但在考虑潜伏期、疫苗接种等复杂因素时存在局限。为此，Cao 等人[11]在经典模型基础上建立了 SEIAR 模型，研究了 Omicron 变异株的传播机制，提升了模型的现实适用性。Velasco-Hernández 等人[12]则将疫苗接种纳入模型，分析了疫苗在控制疟疾传播中的作用。此外，部分学者将疾病控制策略等因素纳入模型，探索了不同防控措施的影响[13]。这些基于常微分方程的模型有效描述了感染人数变化的趋势，为传染病预测、控制策略优化及公共卫生决策提供了重要的理论依据。

然而，在实际传染病爆发中伴随医疗资源的紧缺，如疫苗、药物、医护人员和医疗设施的不足，这使得如何合理利用有限资源成为传染病控制的关键[14]。与此同时，人口流动、年龄结构等社会因素通常导致疾病传播呈现周期性波动，增加了传染病控制的复杂性[15]。因此，传统的连续控制策略往往难以应对这种变化，尤其在疫苗接种和治疗的过程中，这使得引入非线性脉冲控制显得尤为必要，以更贴近真实的疫苗接种过程和动态变化的传染病需求。尽管现有研究多集中于疾病流行规律的预测，但在资源有限的情况下，如何设计和分析有效的防控策略仍显不足。为此，本文在经典 SIR 模型的基础上，建立具有医疗资源约束和非线性脉冲控制的 SIR 传染病模型，旨在研究和分析间歇性疫苗接种对传染病传播的影响。

本文结构安排如下：第二节建立了具有资源限制的非线性脉冲 SIR 传染病模型；第三节研究了疾病

根除周期解的存在性与稳定性；第四节计算了模型的基本再生数，并通过数值模拟探讨了关键参数对阈值的影响，以及资源约束条件下的传染病动态演化；最后一节总结全文并展望未来研究方向。

## 2. 模型建立

疫苗接种对传染病的传播和控制至关重要。为反映疫苗接种对疾病传染率的抑制效应或“心理”效应，引入了一个饱和常数  $k \in [0, 1]$ ，使得发病率由双线性形式  $\beta S(t)I(t)$  转变为具有疫苗接种的抑制形式  $\beta S(t)I(t)/(1+kI(t))$ 。此时，当  $k$  值减小，抑制效应增强，疾病发病率降低，易感者人口数量减少；而当  $k$  值增大，抑制效应减弱，疾病发病率增强，易感者人口数量增多。基于此，在文献[10]所提模型的基础上建立如下 SIR 传染病模型

$$\dot{S}(t) = b - \frac{\beta S(t)I(t)}{1+kI(t)} - bS(t), \quad \dot{I}(t) = \frac{\beta S(t)I(t)}{1+kI(t)} - \gamma I(t) - bI(t), \quad \dot{R}(t) = \gamma I(t) - bR(t), \quad (1)$$

其中， $S(t)$ ， $I(t)$  和  $R(t)$  分别代表在  $t$  时刻的易感者、感染者和恢复者的人口数量；死亡率和出生率相等都为  $b$ ； $\beta$  代表传染率； $\gamma$  代表恢复率。值得注意的是，恢复者不会影响易感者和感染者的动力学行为，故不作分析。同时，疫苗接种率受人口规模与分布密度影响，即人口多且集中地区接种更易实施且免疫效果更好，反之则更困难、效果较差。因此，疫苗接种率并非常数，而是受外界因素影响的非线性函数。考虑传染病暴发过程中医疗资源的约束，设疫苗接种率为  $p$ ，并采用 Sigmoid 函数[14]对其进行刻画，即

$$p(t) = \frac{p_1}{1 + e^{-S(t)}}, \quad 0 \leq p_1 \leq 1. \quad (2)$$

同时，疫苗的接种是间歇性实施的。因此，建立如下具有医疗资源限制及非线性脉冲的传染病模型

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = b - \frac{\beta S(t)I(t)}{1+kI(t)} - bS(t), \\ \dot{I}(t) = \frac{\beta S(t)I(t)}{1+kI(t)} - \gamma I(t) - bI(t), \end{cases} \quad t \neq nT, n \in N, \quad (3)$$

$$\begin{cases} S(t^+) = \left(1 - \frac{p_1}{1 + e^{-S(t)}}\right) S(t), \\ I(t^+) = I(t), \end{cases} \quad t = nT, n \in N,$$

在这里， $p_1$  为最大接种率，其他参数与模型(1)意义相同。

## 3. 疾病根除周期解的存在性与稳定性

### 3.1. 疾病根除周期解的存在性

当  $I = 0$  时，模型(3)的可简化为

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = b - bS(t), \quad t \neq nT, \\ S(t^+) = \left(1 - \frac{p_1}{1 + e^{-S(t)}}\right) S(t), \quad t = nT, \end{cases} \quad (4)$$

由(4)式中第一个公式可得  $dS(t)/(1-S(t)) = bdt$ ，再两边同时积分得

$$S(t) = \left[ S(nT^+) - 1 \right] e^{-b(t-nT)} + 1 \quad (5)$$

是模型(4)在区间 $[nT, (n+1)T]$ 上的解。将 $S((n+1)T^+)$ 分别带入(5)式和(4)中的第二个式子, 有

$$S((n+1)T) = [S(nT^+) - 1]e^{-bT} + 1, \quad S((n+1)T^+) = \left(1 - \frac{p_1}{1 + e^{-S((n+1)T)}}\right) S((n+1)T). \quad (6)$$

再将(6)式中第一个公式代入第二个公式

$$S((n+1)T^+) = \frac{\left\{e^{-[S(nT^+) - 1]e^{-bT} + 1} + 1 - p_1\right\} \left[ (S(nT^+) - 1)e^{-bT} + 1 \right]}{e^{-[S(nT^+) - 1]e^{-bT} + 1} + 1}. \quad (7)$$

记 $S(nT^+) = S_n$ , 则由(7)式可以定义如下的频闪映射

$$S_{n+1} = \frac{\left\{e^{-(S_n - 1)e^{-bT} + 1} + 1 - p_1\right\} \left[ (S_n - 1)e^{-bT} + 1 \right]}{e^{-(S_n - 1)e^{-bT} + 1} + 1} \triangleq f(S_n) \quad (8)$$

且由

$$f'(S_n) = \left\{ 1 - \frac{p_1 \left[ S_n e^{-bT} - e^{-bT} + 2 \right] e^{-(S_n - 1)e^{-bT} + 1} + (S_n - 1)e^{-bT} + 1}{\left[ e^{-(S_n - 1)e^{-bT} + 1} + 1 \right]^2} \right\} e^{-bT}, \quad (9)$$

可知 $0 < |f'(S_n)| < 1$ 恒成立。为求解频闪映射(8)的不动点 $\tilde{S}$ , 将公式(8)改写成

$$\tilde{S} \left[ e^{-[(\tilde{S} - 1)e^{-bT} + 1]} + 1 \right] = \left( e^{-[(\tilde{S} - 1)e^{-bT} + 1]} + 1 - p_1 \right) \left[ (\tilde{S} - 1)e^{-bT} + 1 \right]. \quad (10)$$

定义 $A_2 = (\tilde{S} - 1)e^{-bT} + 1$ , 则 $\tilde{S} = (A_2 - 1)e^{bT} + 1$ , 故(10)式等价于

$$\left[ -(1 - e^{bT})A_2 + (1 - e^{bT}) \right] e^{-A_2} + \left[ -(1 - p_1 - e^{bT})A_2 + (1 - e^{bT}) \right] = 0, \quad (11)$$

将其改写成 $(-aA_2 + a)e^{-A_2} + (-cA_2 + a) = 0$ , 则等价于 $(-A_2 + 1)e^{-A_2} = cA_2/a - 1$ , 其中 $a = 1 - e^{bT} < 0$ ,  $c = 1 - p_1 - e^{bT} < 0$ 且 $0 \leq p_1 \leq 1$ , 故 $a \geq c$ 。本文用两种方法讨论频闪映射(8)不动点的存在性和唯一性, 即超越方程(11)正解的存在性和唯一性。

**方法一: 解析法。**不妨将(11)式中的 $A_2$ 看作未知数 $x$ , 则可设 $f_1 = (-x + 1)e^{-x}$ ,  $f_2 = cx/a - 1$ 。令 $f_1 = f_2$ , 则 $(-x + 1)e^{-x} = cx/a - 1$ 两边乘 $e$ 可得

$$(-x + 1)e^{-x+1} = \left( \frac{c}{a}x - 1 \right) e, \quad (12)$$

根据 Lambert W 函数[10], (12)式可变为

$$x = 1 - \text{Lambert W} \left[ \left( \frac{c}{a}x - 1 \right) e \right], \quad (13)$$

而 Lambert W(Z)函数的定义域为 $[-e^{-1}, +\infty)$ , 从而 $z \geq -e^{-1}$ , 即

$$\left( \frac{c}{a}x - 1 \right) e \geq -e^{-1},$$

解得 $x \geq a(1 - e^{-2})/c$ , 则(13)式满足

$$\text{Lambert W} \left[ \left( \frac{c}{a}x - 1 \right) e \right] \leq 1 - \frac{a}{c}(1 - e^{-2}), \quad (14)$$

易知  $0 < ae^{-2}/c < 1$ 。令

$$\text{Lambert W} \left[ \left( \frac{c}{a}x - 1 \right) e \right] \leq 1 - \frac{a}{c},$$

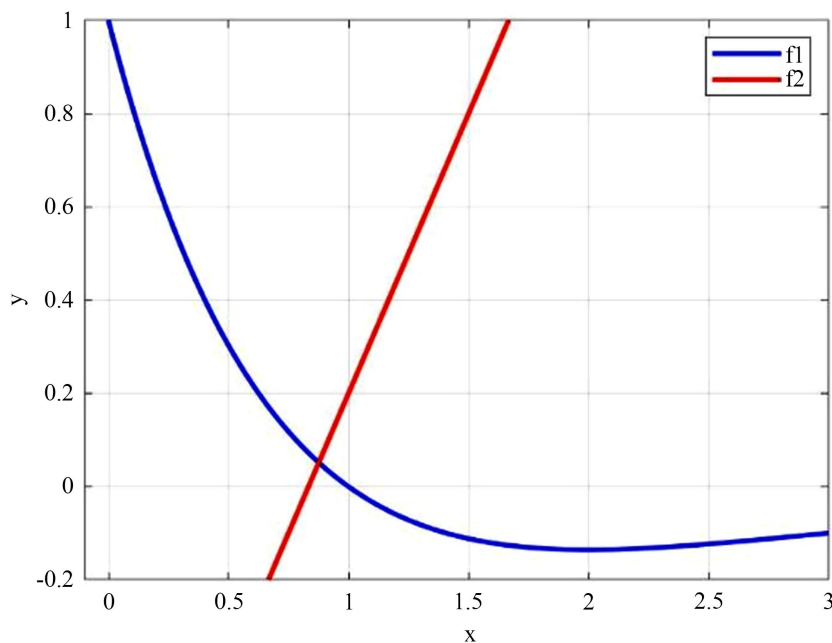
此时(14)式依然成立且  $a = 1 - e^{bT}$ ,  $c = 1 - p_1 - e^{bT}$ , 故  $1 - a/c = -p_1 / (1 - p_1 - e^{bT})$ , 此时取  $p_1 = 0$  有最小值, 即  $\text{Lambert W}[(cx/a - 1)e] \leq 0$ , 由 Lambert W 函数的定义及其相关性质得  $(cx/a - 1)e \leq 0$ , 即  $x \leq a/c$ , 故  $x$  满足  $a(1 - e^{-2})/c \leq x \leq a/c$ , 而  $x = A_2 = (\tilde{S} - 1)e^{-bT} + 1$ , 因此

$$\frac{(1 - e^{bT})(1 - e^{-2})}{1 - p_1 - e^{bT}} \leq [(\tilde{S} - 1)e^{-bT} + 1] \leq \frac{1 - e^{bT}}{1 - p_1 - e^{bT}},$$

即公式(12)必然存在一个正根。

由  $(1 - e^{bT}) / (1 - p_1 - e^{bT})$  是一个关于  $p_1$  的减函数, 故当  $p_1 = 0$  时存在最大值 1。已知  $0 \leq b \leq 1$ , 若  $0 \leq b < 2/T$ , 则  $\tilde{S}$  的范围是  $\tilde{S} > 0$ , 从而 Lambert W 函数图像上存在大于 0 的点, 使得频闪映射(8)至少存在一个正根  $\tilde{S}$ 。

方法二: 数形结合。利用 Matlab 软件作图可得到以下图像。



**Figure 1.** The graphs of functions  $f_1$  and  $f_2$ , where  $c/a > 1$ ,  $a = -5$ ,  $c = -6$

**图 1.** 函数  $f_1$  和  $f_2$  的图像, 其中  $c/a > 1$ ,  $a = -5$ ,  $c = -6$

如图 1 所示, 函数  $f_1$  和  $f_2$  存在唯一的正交点, 即(12)式存在唯一的正根  $x = A_2 = (\tilde{S} - 1)e^{-bT} + 1$ 。这表明映射(8)存在唯一不动点  $\tilde{S}$ , 使得  $\tilde{S} = f(\tilde{S})$  成立。由  $0 < |f'(S_n)| < 1$  可知, 频闪映射(13)的不动点  $\tilde{S}$  是稳定的。通过脉冲微分方程的相关理论可得, 根据模型子系统建立的频闪映射(9)中不动点的存在性和稳定性与非线性脉冲控制微分方程(4)中模型正周期解的存在性和稳定性是等价的。综上所述, 模型(4)中存在一个稳定的正周期解  $S^*(t)$ , 即

$$S^*(t) = (\tilde{S} - 1)e^{-b(t-nT)} + 1, \quad nT < t \leq (n+1)T.$$

综上所述，有如下定理成立：

**定理 1** 模型(3)存在一个正周期解  $S^*(t)$ ，且当  $t \rightarrow +\infty$  时，任意正解  $S(t)$  满足  $|S(t) - S^*(t)| \rightarrow 0$ 。同时，模型(3)还存在一个疾病根除周期解  $(S^*(t), 0)$ ，其中

$$(S^*(t), 0) = ((\tilde{S} - 1)e^{-b(t-nT)} + 1, 0), \quad nT < t \leq (n+1)T. \quad (15)$$

### 3.2. 疾病根除周期解的稳定性

本节将进一步讨论模型(3)中疾病根除周期解  $(S^*(t), 0)$  的全局渐近稳定性。

**定理 2** 若  $\mathcal{R}_0^1 < 1$ ，则模型(3)的疾病根除周期解  $(S^*(t), 0)$  是全局渐近稳定的，其中

$$\mathcal{R}_0^1 = \frac{\beta[(\tilde{S} - 1)(1 - e^{-bT}) + bT]}{bT(\gamma + b)}, \quad (16)$$

且  $\tilde{S}$  由(10)式和(15)式定义。

**证明：** 令

$$S(t) = U(t) + S^*(t), \quad I(t) = V(t),$$

这里的  $U(t)$  和  $V(t)$  都是一个小的扰动，模型(3)在相应变分方程处的解为

$$\begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} U(0) \\ V(0) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < T.$$

定义

$$f_1 = \dot{S} = b - \frac{\beta SI}{1 + kI} - bS, \quad f_2 = \dot{I} = \frac{\beta SI}{1 + kI} - \gamma I - bI,$$

故

$$\begin{cases} f_1 = b - \frac{\beta SI}{1 + kI} - bS, \\ f_2 = \frac{\beta SI}{1 + kI} - \gamma I - bI, \end{cases}$$

其雅克比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta I}{1 + kI} - b & -\frac{\beta S}{(1 + kI)^2} \\ \frac{\beta I}{1 + kI} & \frac{\beta S}{(1 + kI)^2} - \gamma - b \end{pmatrix}, \quad (17)$$

将  $(S^*(t), 0)$  代入(17)式可得

$$J = \begin{pmatrix} -b & -\beta S^*(t) \\ 0 & \beta S^*(t) - \gamma - b \end{pmatrix}$$

基解矩阵  $\Phi(t)$  满足

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = J\Phi(t) = \begin{pmatrix} -b & -\beta S^*(t) \\ 0 & \beta S^*(t) - \gamma - b \end{pmatrix} \Phi(t),$$

和  $\Phi(t) = I$ ,  $I$  为单位矩阵, 由此有

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} e^{-bT} & * \\ 0 & e^{\int_0^T (\beta S^*(t) - \gamma - b) dt} \end{pmatrix},$$

\* 不影响本文的研究, 故省略了 \* 的具体表达式。同理, 模型(3)中的第三、四个公式

$$\begin{cases} S(t^+) = \left(1 - \frac{p_1}{1 + e^{-S(t)}}\right) S(t), \\ I(t^+) = I(t), \end{cases}$$

再次计算雅克比矩阵, 并将  $(S^*(t), 0)$  代入

$$\begin{pmatrix} \frac{dS(t^+)}{dS} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{p_1 [S^*(T) e^{-S^*(T)} + e^{-S^*(T)} + 1]}{[e^{-S^*(T)} + 1]^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

同理

$$\begin{pmatrix} U(nT^+) \\ V(nT^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{p_1 [S^*(T) e^{-S^*(T)} + e^{-S^*(T)} + 1]}{[e^{-S^*(T)} + 1]^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(nT) \\ V(nT) \end{pmatrix} \triangleq B(nT) \begin{pmatrix} U(nT) \\ V(nT) \end{pmatrix},$$

此时, 若单值矩阵

$$M \triangleq B(T)\Phi(T) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{p_1 [S^*(T) e^{-S^*(T)} + e^{-S^*(T)} + 1]}{[e^{-S^*(T)} + 1]^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-bT} & * \\ 0 & e^{\int_0^T (\beta S^*(t) - \gamma - b) dt} \end{pmatrix},$$

其中两个特征值的模小于 1, 则表明  $(S^*(t), 0)$  是局部渐近稳定性的, 且矩阵  $M$  的两个特征乘子分别为

$$\lambda_1 = \left(1 - \frac{p_1 [S^*(T) e^{-S^*(T)} + e^{-S^*(T)} + 1]}{[e^{-S^*(T)} + 1]^2}\right) e^{-bT}, \quad \lambda_2 = e^{\int_0^T (\beta S^*(t) - \gamma - b) dt}, \quad (18)$$

这里,  $0 < \lambda_1 < 1$ 。因此,  $(S^*(t), 0)$  的稳定性由特征乘子  $\lambda_2$  的大小决定, 而  $\lambda_2 < 1$  等价于  $\int_0^T (\beta S^*(t) - \gamma - b) dt < 0$ 。根据(16)式可知

$$S^*(t) = (\tilde{S} - 1) e^{-b(t-nT)} + 1, \quad nT < t \leq (n+1)T.$$

故取  $n=0$  时, 则  $S^*(t) = (\tilde{S} - 1) e^{-bt} + 1$ 。对  $S^*(t)$  在  $[0, T]$  范围内积分可得

$$\int_0^T S^*(t) dt = \int_0^T [(\tilde{S} - 1) e^{-bt} + 1] dt = \frac{(\tilde{S} - 1)(1 - e^{-bT})}{b} + T. \quad (19)$$

根据(19)式, 有

$$\frac{1}{T} \int_0^T S^*(t) dt = \frac{(\tilde{S}-1)(1-e^{-bT}) + bT}{bT},$$

故

$$\frac{1}{T} \int_0^T S^*(t) dt = \frac{(\tilde{S}-1)(1-e^{-bT}) + bT}{bT} < \frac{\gamma+b}{\beta},$$

即

$$\frac{\beta [(\tilde{S}-1)(1-e^{-bT}) + bT]}{bT(\gamma+b)} < 1. \quad (20)$$

也就是说, 当  $\mathcal{R}_0^1 < 1$  时,  $(S^*(t), 0)$  是局部渐近稳定的。接下来, 将证明  $(S^*(t), 0)$  是全局吸引的。由于  $\mathcal{R}_0^1 < 1$ , 因此对充分小的  $\varepsilon_1 > 0$ , 有

$$\frac{1}{T} \int_0^T (S^*(t) + \varepsilon_1) dt < \frac{\gamma+b}{\beta}, \quad (21)$$

由模型(3)可得

$$\begin{cases} \dot{S}(t) < b - bS(t), & t \neq nT, \\ S(t^+) = \left(1 - \frac{p_1}{1 + e^{-S(t)}}\right) S(t), & t = nT, \end{cases}$$

再考虑模型(3)的比较方程

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) < b - bZ(t), & t \neq nT, \\ Z(t^+) = \left(1 - \frac{p_1}{1 + e^{-Z(t)}}\right) Z(t), & t = nT, \end{cases}$$

易得  $S(t) \leq Z(t)$ , 且当  $t \rightarrow +\infty$  时有  $Z(t) \rightarrow S^*(t)$ , 所以存在充分小的  $\varepsilon_1 > 0$  和充分大的  $t_1 > 0$ , 使得当  $t \geq t_1$  时, 有

$$S(t) \leq Z(t) < S^*(t) + \varepsilon_1, \quad (22)$$

当  $t > t_1$  时, 联立(3)和(22)式有

$$\dot{I}(t) \leq \left( \frac{\beta [S^*(t) + \varepsilon_1]}{1 + kI(t)} - \gamma - b \right) I(t).$$

进一步, 考虑比较方程

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = \left( \frac{\beta [S^*(t) + \varepsilon_1]}{1 + ky_1(t)} - \gamma - b \right) y_1(t), & t \neq nT, \\ y_1(t^+) = y_1(t), & t = nT, \end{cases} \quad (23)$$

对方程关于区间  $[nT, (n+1)T]$  求积分

$$\ln \frac{y_1((n+1)T)}{y_1(nT)} = \int_{nT}^{(n+1)T} \left( \frac{\beta [S^*(t) + \varepsilon_1]}{1 + ky_1(t)} - \gamma - b \right) dt,$$

将两边化简

$$\frac{y_1((n+1)T)}{y_1(nT)} = e^{\int_{nT}^{(n+1)T} \left( \frac{\beta[S^*(t)+\varepsilon_1]}{1+k\gamma_1(t)} - \gamma - b \right) dt},$$

$$y_1((n+1)T) = y_1(nT) e^{\int_{nT}^{(n+1)T} \left( \frac{\beta[S^*(t)+\varepsilon_1]}{1+k\gamma_1(t)} - \gamma - b \right) dt} = y_1(nT) e^{\int_0^T \left( \frac{\beta[S^*(t)+\varepsilon_1]}{1+k\gamma_1(t)} - \gamma - b \right) dt},$$

通过数学归纳法可得

$$y_1(nT) = y_1((n-1)T) e^{\int_0^T \left( \frac{\beta[S^*(t)+\varepsilon_1]}{1+k\gamma_1(t)} - \gamma - b \right) dt}$$

$$= y_1((n-2)T) e^{2 \int_0^T \left( \frac{\beta[S^*(t)+\varepsilon_1]}{1+k\gamma_1(t)} - \gamma - b \right) dt}$$

$$= y_1(0) e^{n \int_0^T \left( \frac{\beta[S^*(t)+\varepsilon_1]}{1+k\gamma_1(t)} - \gamma - b \right) dt},$$

其中  $y_1(0) = y_1(0^+) > 0$ , 由(23)知  $\int_0^T [S^*(t) + \varepsilon_1] dt < (\gamma + b)T/\beta$ , 则

$$(\gamma + b)T/\beta = \int_0^T (\gamma + b)/\beta dt, \quad \int_0^T [\beta(S^*(t) + \varepsilon_1) - \gamma - b] dt < 0,$$

进而当  $n \rightarrow +\infty$  时  $e^{n \int_0^T [\beta(S^*(t) + \varepsilon_1) - \gamma - b] dt} = 0$ , 根据上式可得

$$e^{n \int_0^T \left( \frac{\beta[S^*(t)+\varepsilon_1]}{1+k\gamma_1(t)} - \gamma - b \right) dt} = 0, \quad (24)$$

将(24)代入到  $y_1(nT)$  中, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_1(nT) = 0$ 。同时, 由比较方程(23)可得

$$y_1(t) = y_1(nT) e^{\int_{nT}^t \left( \frac{\beta[S^*(t)+\varepsilon_1]}{1+k\gamma_1(t)} - \gamma - b \right) dt}, \quad t \in [nT, (n+1)T], \quad (25)$$

且根据

$$e^{\int_{nT}^t \left( \frac{\beta[S^*(t)+\varepsilon_1]}{1+k\gamma_1(t)} - \gamma - b \right) dt}$$

的有界性可推出  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0$ 。设  $(S(t), I(t))$  是模型(3)初值为  $(S_0, I_0)$  的一般解, 其中

$$S_0 = S(0^+) > 0, \quad I_0 = I(0^+) = y_1(0) > 0,$$

由比较定理可得  $\limsup_{t \rightarrow \infty} I(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0$ 。考虑到  $I(t)$  的正性, 有  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ 。相应地, 存在充分大的  $t_2 > t_1 > 0$  和充分小的  $\varepsilon_2 > 0$ , 使得当  $t \geq t_2$  时有  $0 < I(t) \leq \varepsilon_2$  成立, 进而对所有的  $t > t_2$  有

$$b - \left( \frac{\beta \varepsilon_2}{1 + k \varepsilon_2} + b \right) S(t) \leq \frac{dS(t)}{dt} \leq b - bS(t),$$

再考虑如下方程

$$\begin{cases} \dot{y}_2(t) = b - \left( \frac{\beta \varepsilon_2}{1 + k \varepsilon_2} + b \right) y_2(t), & t \neq nT. \\ y_2(t^+) = \left( 1 - \frac{p_1}{1 + e^{-y_2(t)}} \right) y_2(t), & t = nT, \end{cases} \quad (26)$$

由模型(26)中第一个公式可得

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = b - \left( \frac{\beta \varepsilon_2}{1 + k \varepsilon_2} + b \right) y_2(t),$$

将上式两边同时积分可得

$$\int_{nT}^t \frac{dy_2(t)}{b - \left( \frac{\beta \varepsilon_2}{1 + k \varepsilon_2} + b \right) y_2(t)} = \int_{nT}^t dt,$$

故

$$\frac{\ln \left( b - \left( \frac{\beta \varepsilon_2}{1 + k \varepsilon_2} + b \right) y_2(t) \right)}{- \left( \frac{\beta \varepsilon_2}{1 + k \varepsilon_2} + b \right)} \Bigg|_{nT}^t = t \Big|_{nT}^t, \quad \ln \left( b - \left( \frac{\beta \varepsilon_2}{1 + k \varepsilon_2} + b \right) y_2(t) \right) \Bigg|_{nT}^t = - \left( \frac{\beta \varepsilon_2}{1 + k \varepsilon_2} + b \right) t \Bigg|_{nT}^t,$$

因此

$$\ln \frac{b - \left( \frac{\beta \varepsilon_2}{1 + k \varepsilon_2} + b \right) y_2(t)}{b - \left( \frac{\beta \varepsilon_2}{1 + k \varepsilon_2} + b \right) y_2(nT)} = - \left( \frac{\beta \varepsilon_2}{1 + k \varepsilon_2} + b \right) (t - nT),$$

将两边同时化简

$$b - \left( \frac{\beta \varepsilon_2}{1 + k \varepsilon_2} + b \right) y_2(t) = \left( b - \left( \frac{\beta \varepsilon_2}{1 + k \varepsilon_2} + b \right) y_2(nT) \right) e^{- \left( \frac{\beta \varepsilon_2}{1 + k \varepsilon_2} + b \right) (t - nT)},$$

从而

$$y_2(t) = \left[ y_2(nT) \frac{b(1 + k \varepsilon_2)}{\beta \varepsilon_2 + b(1 + k \varepsilon_2)} \right] e^{- \left( \frac{\beta \varepsilon_2}{1 + k \varepsilon_2} + b \right) (t - nT)} + \frac{b(1 + k \varepsilon_2)}{\beta \varepsilon_2 + b(1 + k \varepsilon_2)},$$

模型(26)在  $[nT, (n+1)T]$  上的解为

$$y_2(t) = \left[ y_2(nT^+) - \frac{b(1 + k \varepsilon_2)}{\beta \varepsilon_2 + b(1 + k \varepsilon_2)} \right] e^{- \left( \frac{\beta \varepsilon_2}{1 + k \varepsilon_2} + b \right) (t - nT)} + \frac{b(1 + k \varepsilon_2)}{\beta \varepsilon_2 + b(1 + k \varepsilon_2)}. \quad (27)$$

将  $y_2((n+1)T^+)$  分别带入上式和子系统中的第二个公式, 可得

$$\begin{cases} y_2((n+1)T) = \left[ y_2(nT^+) \frac{b(1 + k \varepsilon_2)}{\beta \varepsilon_2 + b(1 + k \varepsilon_2)} \right] e^{- \left( \frac{\beta \varepsilon_2}{1 + k \varepsilon_2} + b \right) T} + \frac{b(1 + k \varepsilon_2)}{\beta \varepsilon_2 + b(1 + k \varepsilon_2)}, \\ y_2((n+1)T^+) = \left( 1 - \frac{p_1}{1 + e^{-y_2((n+1)T)}} \right) y_2((n+1)T) \end{cases} \quad (28)$$

再将(28)中得第一式代入第二式, 易得

$$y_2((n+1)T^+) = \frac{(e^{-\gamma_2((n+1)T)} + 1 - p_1)y_2((n+1)T)}{e^{-\gamma_2((n+1)T)} + 1}, \quad (29)$$

记  $y_2(nT^+) = y_2^n$ , 则

$$y_2((n+1)T) = \left[ y_2^n - \frac{b(1+k\varepsilon_2)}{\beta\varepsilon_2 + b(1+k\varepsilon_2)} \right] e^{-\left(\frac{\beta\varepsilon_2}{1+k\varepsilon_2} + b\right)T} + \frac{b(1+k\varepsilon_2)}{\beta\varepsilon_2 + b(1+k\varepsilon_2)}, \quad (30)$$

将(29)和(30)联立, 可建立如下的频闪映射

$$y_2^{n+1} = \frac{(e^{-\gamma_2^n((n+1)T)} + 1 - p_1)y_2^n((n+1)T)}{e^{-\gamma_2^n((n+1)T)} + 1} \triangleq f(y_2^n), \quad (31)$$

同理也可得到在频闪映射中只存在唯一不动点  $\tilde{y}_2$ , 使得  $f(\tilde{y}_2) = \tilde{y}_2$ . 同时, 可推导出模型存在一个全局渐近稳定的正周期解

$$y_2^*(t) = \left[ \tilde{y}_2 - \frac{b(1+k\varepsilon_2)}{\beta\varepsilon_2 + b(1+k\varepsilon_2)} \right] e^{-\left(\frac{\beta\varepsilon_2}{1+k\varepsilon_2} + b\right)(t-nT)} + \frac{b(1+k\varepsilon_2)}{\beta\varepsilon_2 + b(1+k\varepsilon_2)}, \quad t \in [nT, (n+1)T],$$

其中不动点  $\tilde{y}_2$  由上述频闪映射得到, 且  $y_2(t) \leq S(t) \leq Z(t)$ . 此外, 当  $t \rightarrow +\infty$  时, 有

$$y_2(t) \rightarrow y_2^{(t)} \text{ 和 } Z(t) \rightarrow S^*(t).$$

所以, 存在充分大的  $t_3 \geq t_2 > 0$  和充分小的  $\varepsilon_3 > 0$ , 使得当  $t > t_3$  时, 有

$$y_2^*(t) - \varepsilon_3 < S(t) < S^*(t) + \varepsilon_3,$$

且当  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  时, 有  $S^*(t) - \varepsilon_3 < S(t) < S^*(t) + \varepsilon_3$ . 因此, 当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $S(t) \rightarrow S^*(t)$ , 这样就证明了当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时, 模型(2.6)的疾病根除周期解  $(S^*(t), 0)$  是全局渐近稳定的。

## 4. 基本再生数及数值模拟

### 4.1. 基本再生数

基本再生数  $\mathcal{R}_0^1$  是确定疾病是否会广泛传播的阈值。为了研究  $T$  是如何影响  $\mathcal{R}_0^1$  的变化, 需对模型(3)的参数进行讨论。但是经过比较, 本文需着重研究的参数是接种周期  $T$ 、最大接种率  $p_1$ 。故将阈值  $\mathcal{R}_0^1$  关于  $T$  求极限可得

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mathcal{R}_0^1 = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\beta \left[ (\tilde{S} - 1)(1 - e^{-bT}) + bT \right]}{bT(\gamma + b)} = 0, \quad (32)$$

这表明脉冲周期  $T$  缩短到足够小时, 阈值  $\mathcal{R}_0^1$  会逐渐趋 0, 此时感染者人口数量减少直至疾病根除, 有利于相关部门对传染病的防控, 这也意味着接种疫苗的频率对传染病的防控有着非常重要的影响。紧接着, 采用数值方法研究模型中  $T$  和  $p_1$  等因素变化对阈值  $\mathcal{R}_0^1$  造成的影响。然而, 由于对  $\mathcal{R}_0^1$  的理论研究过于困难, 我们不能分析出  $\mathcal{R}_0^1$  的具体值, 只能获得最为接近实际  $\mathcal{R}_0^1$  脉冲周期的最大值  $T_{\max}$ 。针对模型(3), 假设提高免疫接种的频率可使得对所有的  $t > 0$  都存在  $\dot{I}(t) \leq 0$ , 那么此时感染者人口数量将会单调下降, 根据非线性模型(3)中的第二个方程可得

$$\dot{I}(t) = \left[ \frac{\beta S(t)}{(1+kI(t))^2} - \gamma - b \right] I(t) \leq 0, \quad S(t) \leq S_c \triangleq \frac{(b+\gamma)(1+kI(t))^2}{\beta},$$

即当易感者  $S(t)$  达到阈值  $S_c$  时就实施一次脉冲接种。由模型(3)的第一个方程可知  $\dot{S}(t) \leq b - bS(t)$ ，考虑如下比较方程

$$\dot{x}(t) = b - bx(t), \quad x(0) = \left( 1 - \frac{p_1}{1+e^{-S_c}} \right) S_c, \quad (33)$$

即可得

$$x(t) = 1 + \left[ \frac{(1+e^{-S_c} - p_1)S_c}{1+e^{-S_c}} - 1 \right] e^{-bt}.$$

因此

$$S(t) \leq x(t) = 1 + \left[ \frac{(1+e^{-S_c} - p_1)S_c}{1+e^{-S_c}} - 1 \right] e^{-bt} \leq S_c,$$

而上述中提到当  $S(t) \geq S_c$ ，易感者才实施一次脉冲接种，此时

$$S(t) \geq x(t) = 1 + \left[ \frac{(1+e^{-S_c} - p_1)S_c}{1+e^{-S_c}} - 1 \right] e^{-bt} \geq S_c,$$

再关于  $t$  求解上述不等式

$$0 < t \leq \frac{1}{b} \ln \left[ 1 + \frac{p_1 S_c}{(1+e^{-S_c})(1-S_c)} \right], \quad (34)$$

进而

$$T_{\max}^{p_1} < \frac{1}{b} \ln \left[ 1 + \frac{p_1 S_c}{(1+e^{-S_c})(1-S_c)} \right]. \quad (35)$$

当接种周期小于  $T_{\max}^{p_1}$ ，染病者将逐渐减少直至彻底根除。根据 Sigmoid 函数中对最大接种率  $p_1$  的定义， $0 \leq p_1 \leq 1$ 。在这种情况下，最大的脉冲周期  $T_{\max}^{p_1}$  不超过

$$T_{\max}^1 = \frac{1}{b} \ln \left[ 1 + \frac{S_c}{(1+e^{-S_c})(1-S_c)} \right],$$

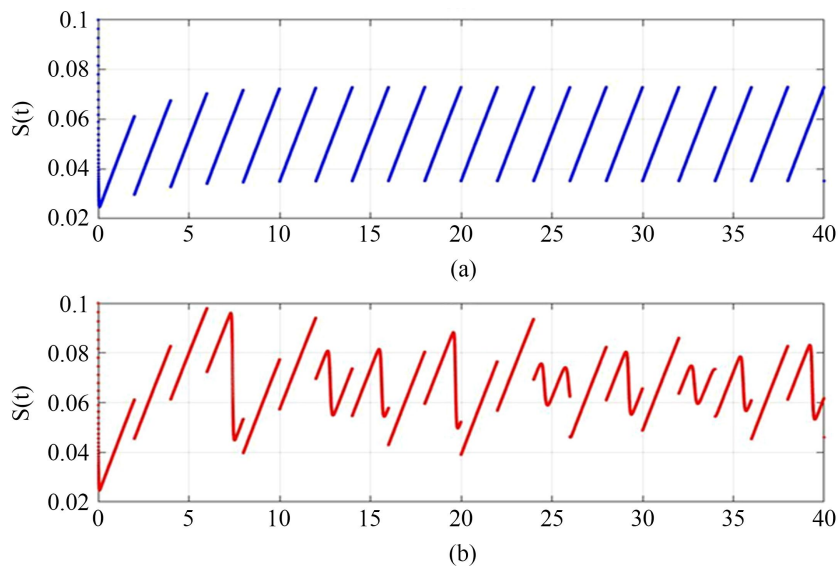
并且  $T_{\max}^{p_1}$  作为一个单调递增的函数，确定  $T_{\max}^{p_1} \leq T_{\max}^1$ 。因此，当  $t \leq T_{\max}^1$  时，染病者的数量就将逐渐减少直至传染病被彻底根除。上述不等式从一方面说明由于非线性因素  $p_1$  的影响，根除传染病的难度将变大，同时从另一方面也说明疫苗接种对传染病控制的重要性。

## 4.2. 数值模拟

利用 Matlab 软件对非线性脉冲控制接种模型(3)进行数值模拟，分析资源有限对模型(3)动力学行为的影响，为非线性传染病模型的研究及传染病传播实施控制提供策略。

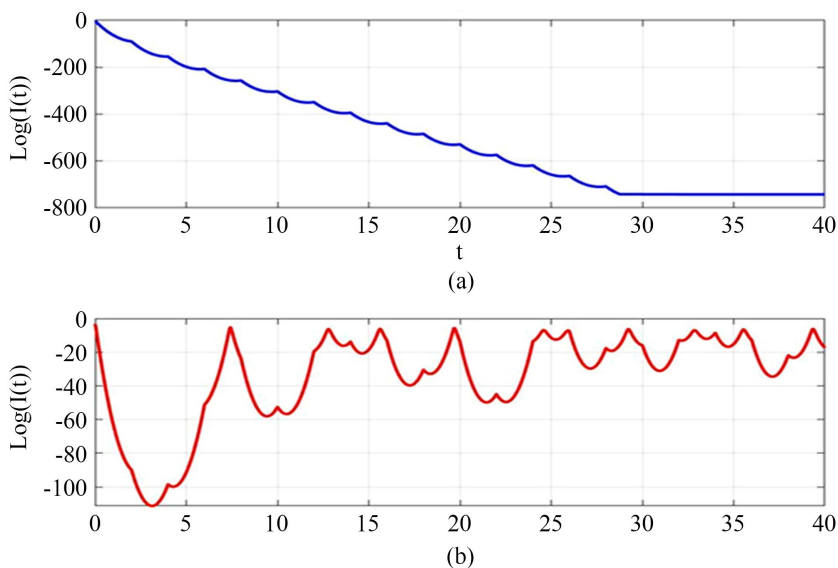
图 2 描述的是资源有限对模型(3)中易感者  $S(t)$  动力学行为的影响。从图 2(a)可以看出易感者在资源

不受限制情况下, 呈一个较为稳定的周期性震荡; 从图 2(b)可看出的是易感者在资源有限条件下, 呈现的是一个起伏较大的震荡。这说明资源有限条件下制定的非线性脉冲控制策略使得模型(3)的动力学行为变得更加复杂, 有限的医疗资源给传染病的防控和治疗带来一系列挑战。



**Figure 2.** Impact of resource limitation on the dynamic behavior of  $S(t)$  in model (6). Parameters:  $b=0.02$ ,  $\beta=1800$ ,  $\gamma=120$ ,  $T=2$ ,  $k=0.01$ . (a)  $p_1=1$ ; (b)  $p_1=0.5$

**图 2.** 资源有限对模型(6)  $S(t)$  动力学行为的影响。参数:  $b=0.02$ ,  $\beta=1800$ ,  $\gamma=120$ ,  $T=2$ ,  $k=0.01$ 。(a)  $p_1=1$ ; (b)  $p_1=0.5$



**Figure 3.** Impact of resource limitation on the dynamic behavior of the infected population  $I(t)$  in Model (6). Here,  $b=0.02$ ,  $\beta=1800$ ,  $\gamma=120$ ,  $T=2$ ,  $k=0.01$ . (A)  $p_1=1$ ; (B)  $p_1=0.5$

**图 3.** 资源有限对模型(6)中  $I(t)$  动力学行为的影响。其中  $b=0.02$ ,  $\beta=1800$ ,  $\gamma=120$ ,  $T=2$ ,  $k=0.01$ 。(A)  $p_1=1$ ; (B)  $p_1=0.5$

图3中利用了 $\log(I(t))$ 间接描述了资源有限对模型(3)中感染者 $I(t)$ 动力学行为的影响。图3(a)表示在医疗资源不受限制的条件下,感染者最后会趋于0,传染病将会得到控制并根除;图3(b)则表示在医疗资源有限条件下,由于医疗条件比较落后且贫穷,政府无法长时间连续供应医疗资源,此时疫苗接种免疫率只能达到一个相对较低的数值,最后导致的就是当地人群感染传染病的机率增大,感染人口数量增多。故当疾病爆发后,医疗资源的数量与感染者人口数量息息相关。

因此,为了应对有限资源条件下疫苗接种的压力,政府和公共卫生组织需要提前制定好具体全面的计划并实施,争取让更多人能进行接种工作,最终通过疫苗接种达成群体免疫。只有疫苗接种率越高,国家建立的免疫屏障才越加坚实,才能在最短时间内更有效率的去控制传染病。此时,即便病毒发生了变异,相关部门的防控措施也将更加完善。如果传染病爆发到不能控制的地步,那么病毒变异后留给相关卫生部门采取措施的时间也会变少,最终感染风险将会大大增加,所以疫苗接种也是在与病毒变异比拼谁的发展速度更快。同时,相关部门也应做好宣传,树立防疫意识,从每一件小事做起。当传染病来袭之时,做好防范措施,更好地助力于公共部门对传染病的控制和研究。

敏感性分析有助于揭示模型参数对基本再生数 $R_0^1$ 及传染病传播过程的影响,同时识别对疾病传播起关键作用的敏感参数。在归一化前向敏感性分析方法[16]中,基本再生数 $R_0^1$ 的敏感性指数取决于各参数的变化,其表达式为

$$\rho_i^{R_0^1} = \frac{\partial R_0^1}{\partial i} \times \frac{i}{R_0^1},$$

其中 $i$ 表 $R_0^1$ 中的任意参数,各参数 $i$ 的敏感性指数已进行可视化展示,如图4所示。由图可知,传染率 $\beta$ 和疫苗接种时间间隔 $T$ 的增大会导致基本再生数 $R_0^1$ 增大,从而提高疾病传播风险,而参数 $p_1$ ,  $b$ 和 $\gamma$ 的增加则会降低 $R_0^1$ ,对疾病传播起到抑制作用。值得注意的是,参数 $\beta$ 和 $\gamma$ 对传染病传播的影响最为显著。因此,在疾病防控过程中,可以通过采取隔离措施、佩戴口罩、接种疫苗等手段降低传播率,同时加大医疗资源投入以提高恢复率,从而有效控制传染病的传播。

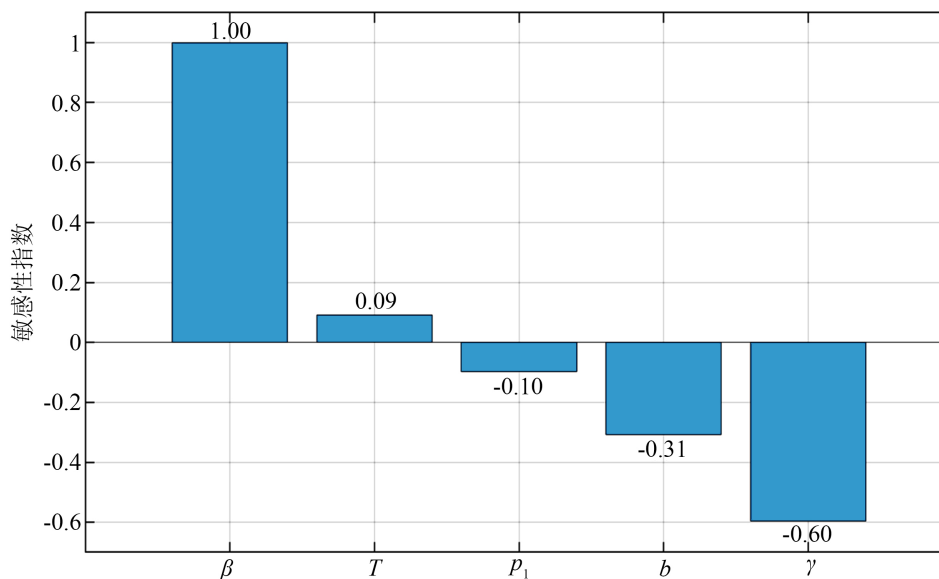


Figure 4. Sensitivity indices of the basic reproduction number  $R_0^1$ , where  $b=0.2$ ,  $\beta=0.8$ ,  $\gamma=0.3$ ,  $T=5$ ,  $p_1=0.4$

图4. 基本再生数 $R_0^1$ 的敏感性指数图,其中 $b=0.2$ ,  $\beta=0.8$ ,  $\gamma=0.3$ ,  $T=5$ ,  $p_1=0.4$

## 5. 总结

突发性传染病严重威胁人类健康, 长期以来一直备受关注。本文在资源有限的背景下, 建立了具有非线性脉冲的传染病模型, 探讨疫苗接种对传染病防控的影响。首先, 采用解析法与数值模拟相结合的方法分析了频闪映射不动点的稳定性和唯一性, 并借助不动点定理及 Lambert W 函数的性质, 研究了疾病根除周期解的存在条件。同时, 利用 Floquet 乘子理论和比较定理研究了模型的全局渐近稳定性。此外, 本文进一步讨论了决定疾病传播阈值的基本再生数, 并通过数值模拟分析了资源受限条件对模型动力学行为的影响。在此基础上, 采用归一化前向敏感性分析方法对基本再生数进行了系统分析。研究结果表明, 传染病传播率与恢复率是影响疾病传播的关键参数; 同时, 间歇性疫苗接种策略能够有效抑制疾病传播, 且随着接种间隔的缩短, 其防控效果逐步增强, 甚至有望实现疾病的根除。

然而, 本文假设疫苗接种在固定时间间隔内进行, 但实际上, 更为合理的做法是根据疾病的规模、传播速度以及资源的可用性来动态调整接种策略, 这将有助于更有效地利用有限资源, 避免资源浪费。同时, 在实际的传染病控制中, 防控手段不仅限于疫苗接种, 还包括隔离、社交距离、检测、治疗等多种手段, 这些措施可根据传染病发展情况灵活组合。在未来的研究中, 将进一步探索多种控制手段的联合应用, 并评估其对疾病控制效果的综合影响, 以期为实际防控策略的制定提供更加全面和精准的理论支持。

## 参考文献

- [1] 朱建平. 天花的世界流行[J]. 中华医史杂志, 2003, 33(3): 61.
- [2] Misra, A.K. and Maurya, J. (2026) A Multiobjective Optimal Control Problem for the Dynamics of an Infectious Disease with Limited Healthcare Facilities and Vaccination. *Journal of Mathematical Biology*, **92**, Article No. 25. <https://doi.org/10.1007/s00285-026-02342-0>
- [3] Wang, X. (2026) Bayesian Identifiability Analysis for Infectious Disease Models: Parameter Reduction and Model Selection. *Bulletin of Mathematical Biology*, **88**, Article No. 34. <https://doi.org/10.1007/s11538-026-01596-5>
- [4] Agaba, G.O., Kyrzychko, Y.N. and Blyuss, K.B. (2017) Mathematical Model for the Impact of Awareness on the Dynamics of Infectious Diseases. *Mathematical Biosciences*, **286**, 22-30. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2017.01.009>
- [5] Stone, L., Shulgin, B. and Agur, Z. (2000) Theoretical Examination of the Pulse Vaccination Policy in the SIR Epidemic Model. *Mathematical and Computer Modelling*, **31**, 207-215. [https://doi.org/10.1016/s0895-7177\(00\)00040-6](https://doi.org/10.1016/s0895-7177(00)00040-6)
- [6] Omori, R., Chemaitelly, H. and Abu-Raddad, L.J. (2025) Can the Prevalence of One STI Serve as a Predictor for Another? A Mathematical Modeling Analysis. *Infectious Disease Modelling*, **10**, 423-428. <https://doi.org/10.1016/j.idm.2024.12.008>
- [7] 马知恩, 周义仓, 王稳地. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [8] Li, M.Y., Graef, J.R., Wang, L. and Karsai, J. (1999) Global Dynamics of a SEIR Model with Varying Total Population Size. *Mathematical Biosciences*, **160**, 191-213. [https://doi.org/10.1016/s0025-5564\(99\)00030-9](https://doi.org/10.1016/s0025-5564(99)00030-9)
- [9] Hethcote, H.W. (2000) The Mathematics of Infectious Diseases. *SIAM Review*, **42**, 599-653. <https://doi.org/10.1137/s0036144500371907>
- [10] Kermack, W.O. and McKendrick, A.G. (1927) A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. Proceedings of the Royal Society of London. *Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, **115**, 700-721. <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>
- [11] Cao, F., Lü, X., Zhou, Y. and Cheng, X. (2023) Modified SEIAR Infectious Disease Model for Omicron Variants Spread Dynamics. *Nonlinear Dynamics*, **111**, 14597-14620. <https://doi.org/10.1007/s11071-023-08595-4>
- [12] Pedroza-Meza, I., Acuña-Zegarra, M.A. and Velasco-Hernández, J.X. (2026) Modeling Vaccine Failures and Behavioral Change: Effects on Disease Transmission Dynamics and Thresholds. *Mathematical Biosciences*, **393**, Article 109619. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2026.109619>
- [13] Assad, D.B.N., Cara, J. and Ortega-Mier, M. (2022) Comparing Short-Term Univariate and Multivariate Time-Series Forecasting Models in Infectious Disease Outbreak. *Bulletin of Mathematical Biology*, **85**, Article No. 9. <https://doi.org/10.1007/s11538-022-01112-5>

- 
- [14] 覃文杰. 有限资源下非光滑生物系统理论与应用研究[D]: [博士学位论文]. 西安: 陕西师范大学, 2015.
- [15] Gupta, S., Starr, M.K., Farahani, R.Z. and Asgari, N. (2022) OM Forum—Pandemics/Epidemics: Challenges and Opportunities for Operations Management Research. *Manufacturing & Service Operations Management*, **24**, 1-23. <https://doi.org/10.1287/msom.2021.0965>
- [16] Ndendya, J.Z., Mwasunda, J.A. and Mbare, N.S. (2025) Modeling the Effect of Vaccination, Treatment and Public Health Education on the Dynamics of Norovirus Disease. *Modeling Earth Systems and Environment*, **11**, Article No. 150. <https://doi.org/10.1007/s40808-025-02326-x>