Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(5), 140-148
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.165137

弱OL-代数的研究

殷鹤来

西安工程大学理学院，陕西 西安

收稿日期：2026年3月24日；录用日期：2026年4月25日；发布日期：2026年5月26日

摘　要

本文以在OL-代数的基础上对其公理进行弱化，提出弱OL-代数概念并探究其与有界弱OL-代数上正交理想的相关性质。文章先梳理偏序集、格、L-代数、OL-代数等预备知识，明确各类代数的定义与关联；随后给出弱OL-代数和有界弱OL-代数的定义，证明OL-代数必为弱OL-代数，通过幂集结构、特定集合构造等实例，说明并非所有L-代数、MV-代数都是弱OL-代数，且部分弱OL-代数可构造为正交模格。此外，文章定义了有界弱OL-代数上的正交理想，指出其与L-代数中正交理想的集性差异，通过实例验证正交理想的构造方式，并证明了有界弱OL-代数上正交理想集合满足特定条件时的相关结论。本研究推广了OL-代数理论，丰富了L-代数体系，为量子逻辑与代数结构研究提供了新视角。

关键词

弱OL-代数，有界弱OL-代数，正交理想

Research on Weak OL-Algebras

Helai Yin

School of Science, Xi’an Polytechnic University, Xi’an Shaanxi

Received: March 24, 2026; accepted: April 25, 2026; published: May 26, 2026

Abstract

This paper is based on the OL-algebra and weakens its conditions. It proposes the concept of weak OL-algebra and explores its related properties with orthogonal ideals on bounded weak OL-algebras. The paper first reviews the preliminary knowledge such as partially ordered sets, lattices, L-algebras, and OL-algebras, clarifying the definitions and relationships of various algebras. Then, it gives the definitions of weak OL-algebras and bounded weak OL-algebras, proves that OL-algebras must be weak OL-algebras, and through examples such as power set structures and specific sets constructions, it shows that not all L-algebras and MV-algebras are weak OL-algebras, and some weak OL-algebras can be constructed as orthogonal modular lattices. Additionally, the paper defines

文章引用: 殷鹤来. 弱 OL-代数的研究[J]. 理论数学, 2026, 16(5): 140-148.
DOI: 10.12677/pm.2026.165137

orthogonal ideals on bounded weak OL-algebras, points out the differences in the set nature of orthogonal ideals compared to those in L-algebras, verifies the construction method of orthogonal ideals through examples, and proves the relevant conclusions when the set of orthogonal ideals on bounded weak OL-algebras satisfies certain conditions. This research extends the theory of OL-algebras, enriches the L-algebra system, and provides a new perspective for the study of quantum logic and algebraic structures.

Keywords

Weak OL-Algebra, Bounded Weak OL-Algebra, Orthogonal Ideal

1. 引言

非经典逻辑在现代科学领域中发挥着举足轻重的作用，尤其是在应对不确定性信息时。L-代数具备了非经典逻辑的特性，在非经典逻辑中涉及多个方面，特别是在代数逻辑和量子逻辑等领域，弱 OL-代数作为一种特殊的 L-代数，其结构性质与相关拓展研究具有重要的理论价值。2019 年 Rump 提出了 0L-代数的概念[1]，OL-代数是对 L-代数引入正交性后的重要推广，而弱 OL-代数进一步放宽了正交性条件，使得更多具有类似结构但未必满足严格正交性的代数系统可以被统一纳入研究框架。这种弱化为理解 L-代数、正交模格、MV-代数等结构之间的内在联系提供了新的视角。弱 OL-代数虽然不属于模糊逻辑，但其结构中仍保留部分逻辑代数特性，在未来可作为模糊逻辑与量子逻辑之间的桥梁，有助于构建更统一的非经典逻辑代数框架。

2. 预备知识

定义 2.1 [2]设 P 是一个非空集合，设 $\le$ 是 P 上的一个二元关系，如果 $\le$ 满足以下条件：

(1) $\forall x\in P, x\le x$,

(2) $\forall x,y\in P, x\le y, y\le x\Rightarrow x=y$,

(3) $\forall x,y,z\in P, x\le y, y\le z\Rightarrow x\le z$.

则 $\le$ 是 P 上的一个偏序关系，并且 $(P,\le)$ 是一个偏序集，记作 P。

定义 2.2 [2]如果 $X\subseteq P$，我们定义 $\uparrow X=\{y\in P \mid \exists x\in X, x\le y\}$ 以及 $\downarrow X=\{y\in P \mid \exists x\in X, x\ge y\}$。特别地，记 $\uparrow\{x\}=\uparrow x$ 以及 $\downarrow\{x\}=\downarrow x$。如果 $\uparrow X=X$ （$\downarrow X=X$），则称 X 是 P 的上集(下集)。

命题 2.3 [2]设 $(P,\le)$ 是一个偏序集， X 是 P 的非空子集。

(1) 若 $\forall a,b\in X$，存在 $c\in X$ 使得 $a\le c, b\le c$，则称 X 是 P 的定向集。

(2) 若 $\forall a,b\in X$，存在 $c\in X$ 使得 $c\le a, c\le b$，则称 X 是 P 的可滤集。

用 $\uparrow X$ 和 $\downarrow X$ 分别表示 X 的定向集和可滤集。

命题 2.4 [3]设 P 是一个非空的有序集，如果 $x\vee y$ 和 $x\wedge y$ 对任意的 $x,y\in X$ 都存在，则 P 被称为一个格。一个 P 的非空子集 I 被称为理想如果：

(1) $x,y\in I$ 意味着 $x\vee y\in I$；

(2) $x\in P, y\in I$ 并且 $x\le y$ 意味着 $x\in I$。

一个对偶理想称为滤子。具体的说，一个 P 的非空子集 F 被称为滤子如果：

(1) $x,y\in F$ 意味着 $x\wedge y\in F$；

(2) $x\in P,y\in F$ 并且 $x\geq y$ 意味着 $x\in F$。

用 $Id(P)$ 和 $Filt(P)$ 分别表示 P 的理想和滤子的全体。

定义 2.5 [4] [5]设 X 是一个集合并且 $1\in X$。在 X 有一个二元运算 $\to$，并且对于任意的 $x,y,z\in X$，满足以下条件：

(1) $x\to x=x\to 1=1$，以及 $1\to x=x$；

(2) $(x\to y)\to(x\to z)=(y\to x)\to(y\to z)$；

(3) $x\to y=1$，$y\to x=1\Rightarrow x=y$。

则称 $(X,\to,1)$ 是一个 L-代数。如果 X 有最小元素 0，则称它为有界 L-代数。

命题 2.6 [4]设 $(X,\to,1)$ 是一个 L-代数。如果 X 满足公式：

$$x\to(y\to x)=1 \tag{2.1}$$

则称 X 是一个 KL-代数。一个 CL-代数是一个 L-代数 $(X,\to,1)$ 满足：

$$(x\to(y\to z))\to(y\to(x\to z))=1\,. \tag{2.2}$$

命题 2.7 [4]设 $(X,\to,1)$ 是一个 L-代数。那么我们有：

(1) 设 $(X,\to,1)$ 是一个 CL-代数，那么 $(X,\to,1)$ 是个 KL-代数；

(2) 如果 $(X,\to,1)$ 满足公式(2.1)，那么：

$$x\to((x\to y)\to y)=1\,.$$

命题 2.8 [4]任意的 CL-代数都是 KL 代数

证明 令 $z:=x$ 在 $(y\to(x\to z)\to x\to(y\to z))=1$，我们得到 $x\to(y\to x)=1$，对于任意 $x,y\in X$，这就是公式(2-2)。

命题 2.9 [6]在 L-代数 X 中，对于任意的 $x,y,z\in X$，如果 $x\leq y$，那么我们可以得出 $z\to x\leq z\to y$。

命题 2.10 [6]在 L-代数 X 中，以下结论是等价的：

(1) $x\leq y\to x$，对于任意的 $x,y\in X$；

(2) $x\leq y\Rightarrow y\to z\leq x\to z$，对于任意的 $x,y,z\in X$；

(3) $((x\to y)\to z)\to((y\to x)\to z)\leq((x\to y)\to z)\to z$，对于任意的 $x,y,z\in X$。

定义 2.11 [4]**设** $(X,\to,1)$ 是一个 L-代数。我们称 $I\subset X$ 是 X 的一个理想当且仅当它满足下面条件：

(1) $1\in I$；

(2) $x\to y\in I$ 可以推出 $y\in I$；

(3) $x\in I$ 可以推出 $(x\to y)\to y\in I$；

(4) $x\in I$ 可以推出 $y\to x,y\to(x\to y)\in I$。

推论 2.12 [4]**设** $(X,\to,1)$ 是一个 L-代数，并且 $I\in ID(X)$。

(1) 如果 X 满足公式(2.1)，定义 2.2.8(4)可以被省略。实际上，如果满足公式(2.1)，并且 $x\in I$，那么通过定义 2.2.8(2) $(x\to(y\to x))=1\in I$ 可以推出 $y\to x\in I$。不仅如此，通过公式(2.1) $y\to(x\to y)=1\in I$，因此，定义 2.2.8(4)是满足的；

(2) 如果 X 满足条件 $x\to((x\to y)\to y)=1$，定义 2.2.8(3)可以被省略。实际上，如果 $x\in I$，因为满足条件 $x\to((x\to y)\to y)=1\in I$，因此通过定义 2.2.8(2)可以推出 $(x\to y)\to y\in I$；

(3) 如果 X 满足条件(C)，那么定义 2.2.8(3)和定义 2.2.8(4)是可以被省略的。实际上，因为公式(2.2)

能够推出公式(2.1)以及条件 $x\to((x\to y)\to y)=1$，通过(1)和(2)，定义 2.2.8(3)和定义 2.2.8(4)是可以被省略的。

定义 2.13 [7]正交模格是一个结构 $(X,\le,',0,1)$，其中最小值为 0，最大值为 1，X 是一个集合，$\le$ 是偏序关系，$'$ 是 X 上的二元运算，该结构满足下面的条件：

(1) 对任意 $x,y\in X$，最小上界($x\vee y$)和最大下界($x\wedge y$)是存在的；

(2) $x=x''$；

(3) $x\vee x'=1$ 以及 $x\wedge x'=0$；

(4)对于任意 $x,y\in X$，如果 $x\le y$，那么 $y=x\vee(x'\wedge y)$。

则称 $(X,\le,',0,1)$ 是一个正交模格。

定义 2.14 [8]一个 MV-代数 $(A,\oplus,\neg,0)$ 是一个集合 A 带有二元运算 $\oplus$ 和一元运算 $\neg$ 以及常数 0，并且满足下面条件：

(1) $x\oplus(y\oplus z)=(x\oplus y)\oplus z$;

(2) $x\oplus y=y\oplus x$;

(3) $x\oplus 0=x$;

(4) $\neg\neg x=x$;

(5) $x\oplus\neg 0=\neg 0$;

(6) $\neg(\neg x\oplus y)\oplus y=\neg(\neg y\oplus x)\oplus x$.

定义 2.15 [1]我们定义一个具有正交性的 L-代数简称为 OL-代数是一个 $\wedge$-封闭的 L-代数 $(X,\le,\to,1)$，对于任意的 $x,y,z\in X$，满足下列条件：

(1) 如果 $x\to z\le y$，有 $x\to y=y$，

(2) 如果 $x\le y$，存在一个唯一的 $z\ge x$ 满足 $z\to x=y$。

3. 主要内容

本章节中，我们在弱化 OL-代数的条件下给出了弱 OL-代数的概念，它是 OL-代数的一种推广形式。首先我们给出了弱 OL-代数的定义，并且将其与 OL-代数进行对比，得出了一些结论，并且通过例子说明并不是所有的 L-代数都是弱 OL-代数，而某些布尔代数和幂集结构满足弱 OL-代数公理。其次，讨论了弱 OL-代数与正交模格之间的联系，揭示了某些弱 OL-代数可以构造成正交模格，丰富了 L-代数的理论体系，为量子逻辑和代数结构的研究提供了新的视角，为进一步研究相关代数系统奠定了基础。

定义 3.1 设 $(X,\le,\to,1)$ 是一个 L-代数，对于任意的 $x,y,z\in X$，如果满足下列条件：

(1) 如果 $x\to z\le y$，那么 $x\to y=y$；

(2) 如果 $x\le y$，那么存在一个 $m\in X$，使得 $m\to x=y$。

那么我们称 $(X,\le,\to,1)$ 是一个弱 OL-代数。如果 $(X,\le,\to,1)$ 有最小元素 0，那么我们称 $(X,\le,\to,1)$ 是一个有界弱 OL-代数。

例 3.2 设 $\mathrm{P}(X)$ 表示集合 X 的幂集，对于任意的 $A,B\in\mathrm{P}(X)$，我们定义 $A\to B=A^C\cup B$。

我们知道对于任意的 $A,B\in\mathrm{P}(X)$：

(1) $(A^C)^C=A$;

(2) $A^C\subseteq B^C\Rightarrow B\subseteq A$;

(3) $A^C\subseteq B\Rightarrow A\to B=A^C\cup B=B$.

那么我们得出 $(\mathrm{P}(X),\subseteq,\to,^C)$ 是一个弱 OL-代数，同时它也是一个 OL-代数。

注 3.3 OL-代数一定是弱 OL-代数。

命题 3.4 设$\mathrm{P}(X)$表示集合X的幂集，对于任意的$A,B\in\mathrm{P}(X)$，我们定义$A\to B=A^C\cup B$。那么$\left(\mathrm{P}(X),\to,\cup,\cap,^C\right)$是一个正交模格。

证明 (1) 对于任意$A\in\mathrm{P}(X)$，$\left(A^C\right)^C=A$；

(2) 对于任意$A\in\mathrm{P}(X)$，条件：

$$A\cup A^C=1,\quad A\cap A^C=0$$

是满足的；

(3) 对于任意的$A,B\in\mathrm{P}(X)$，如果$A\subseteq B$，那么$A\cup\left(A^C\cap B\right)=B$。

因此我们证明了$\left(\mathrm{P}(X),\subseteq,\to,\cup,\cap,^C\right)$是一个正交模格。

例 3.5 设集合$X=\{0,a,b,c,d,1\}$，它上面的偏序关系如图 1 所示，二元运算$\to$如表 1 所示。

Table 1. The definition of the $\to$ operation in the set X = {0, *a*, *b*, *c*, *d*, 1} in example 3.5
表 1. 例 3.5 中集合 X = {0, *a*, *b*, *c*, *d*, 1}中$\to$运算的定义

$\to$	1	a	b	c	d	0
1	1	a	b	c	d	0
a	1	1	a	c	c	d
b	1	1	1	c	c	c
c	1	a	b	1	a	b
d	1	1	a	1	1	a
0	1	1	1	1	1	1

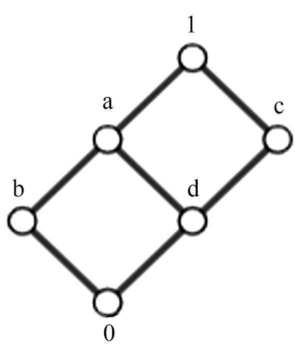

Figure 1. Hasse diagram of X = {0, *a*, *b*, *c*, *d*, 1} in example 3.5
图 1. 例 3.5 中 X = {0, *a*, *b*, *c*, *d*, 1}的哈斯图

通过表 1 我们很容易验证$(X,\le,\to,1)$是一个 L-代数。很明显对于任意$x,y\in X$，$x\to(y\to x)=1$这个条件是成立的，因此$(X,\le,\to,1)$还是一个 KL-代数。此外，从表 1 中，我们观察到对于任意$x,y\in X$，我们有$x\le(x\to y)\to y$。因此它也是一个 CL-代数。但是，根据图 1 给出的序关系，通过表 1 我们可以看出$a\to 0=d\le a$，此时$a\to a=1$不符合$a\to a=a$。因此$(X,\to,1)$是 L-代数但不是弱 OL-代数。

例 3.6 设集合$X=\{a,b,c,1\}$，它上面的偏序关系和二元运算$\to$如下所示。容易验证$(X,\le,\to,1)$是一个 L-代数，根据表 2 我们可以得出对于任意的$x,y\in X$，都满足$x\to z\le y\Rightarrow x\to y=y$，并且当$x\le y$时，存在$m\in X$使得$m\to x=y$。因此$(X,\to,1)$是 L-代数并且还是一个弱 OL-代数(图 2)。

Table 2. The definition of the → operation in the set X = {0, *a*, *b*, 1} in example 3.6
表 2. 例 3.6 中集合 X = {0, *a*, *b*, 1}中→运算的定义

$\to$	a	b	c	1
a	1	b	c	1
b	b	1	c	1
c	a	b	1	1
1	a	b	c	1

Figure 2. Hasse diagram of X = {0, *a*, *b*, *c*, *d*, 1} in example 3.6
图 2. 例 3.6 中 X = {0, *a*, *b*, 1}的哈斯图

注 3.7 从例子 3.5 和例子 3.6 中，我们可以得出一个明确的基本结论：并不是所有的 L-代数都是弱 OL-代数。

命题 3.8 设$(X,\le,\to,1)$是一个有界弱 OL-代数，其中：$x':=x\to 0$，那么对于任意的$x,y,z\in X$，满足以下条件：

(1) $x\le y\Rightarrow z\to x\le z\to y$；

(2) $x\to y=y\Rightarrow x'\le y$；

(3) 如果$x'\le y$，那么$x\to y=y$；

(4) 如果$x\le y$，$x''=x$，以及$(x'\to y)\to x=1$，那么$x=y$。

证明：(1) 如果$x\le y$，那么$x\to y=1$并且$(x\to z)\to(x\to y)=1$，因为$(X,\to')$是一个 OL-代数，所以$(x\to z)\to(x\to y)=(z\to x)\to(z\to y)=1$。因此$(z\to x)\le(z\to y)$；

(2) 基于上述结论，对任意$x,y\in X$，$x'=x\to 0\le x\to y$，因此$x\to y=y\Rightarrow x'\le y$。

(3) 基于定义 4.1.1，对任意$x,y\in X$，如果$x'=x\to 0\le y$，那么$x\to y=y$因此，$x'\le y\Rightarrow x\to y=y$；

(4) 设$x,y\in X$，如果$x\le y$，那么$x''\le y$，基于(3)，$x'\to y=y$。因此我们知道如果$(x'\to y)\to x=1$，那么$(x'\to y)\to x=y\to x=1$，这意味着$y\le x$，因此$x=y$。

例 3.9 设$(X,\oplus,',0)$是一个 MV-代数。则$(X,\le,\to,1)$是一个 L-代数，并且满足$x\to y=x'\oplus y$。将实际的单位区间$[0,1]=\{x\in R\,|\,0\le x\le 1\}$与运算$x\oplus y=\min\{1,x+y\}$以及$x'=1-x$。则$([0,1],\oplus,',0)$是一个 MV-代数。定义$x\to y=x'\oplus y=\min\{1,x+y\}$对任意的$x,y\in X$，则$([0,1],\oplus,',0)$是一个有界的 MV-代数。设$x=0.6$以及$y=0.5$，$x'=1-0.6=0.4<0.5=y$，$x\to y=0.6'\oplus 0.5=\min\{1,0.4+0.5\}=0.9\ne y$。基于定义 3.1，它不是弱 OL-代数。

注 3.10 MV-代数是许多模糊逻辑代数的特例，但 MV-代数不一定是弱 OL-代数，这说明弱 OL-代数属于量子逻辑而不属于模糊逻辑，例子 4.1.2 证明了在弱 OL-代数中，有一些弱 OL-代数可以满足公式(2.1)，从而成为 CL-代数，这表明虽然 OL-代数不属于模糊逻辑的范畴，但仍满足逻辑代数的某些性质，作为模糊逻辑和量子逻辑的交叉融合，弱 OL-代数既保留了模糊逻辑的某些特征，又承载了量子逻辑的背景。

定义 3.11 设 $(X,\le,\to,1)$ 是一个有界的弱 OL-代数，$I\subseteq X$，如果 I 满足下面的条件：

(1) $\downarrow I=I$；

(2) 对于任意 $x,y\in X$，$((x\to y)\to x')'\in I$。

我们称 I 是 X 上的正交理想。

注 3.12 有界弱 OL-代数中的正交理想与 L-代数中的正交理想不同，有界弱 OL-代数中的正交理想是下集，而 L-代数中的理想是上集。

例 3.13 设集合 $X=\{0,a,b,1\}$，它上面的偏序关系如图 3 所示，二元运算→如表 3 所示。

Table 3. The definition of the → operation in the set X = {0, *a*, *b*, 1} in example 3.13
表 3. 例 3.13 中集合 X = {0, *a*, *b*, 1}中→运算的定义

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	b	1
b	a	a	1	1
1	0	a	b	1

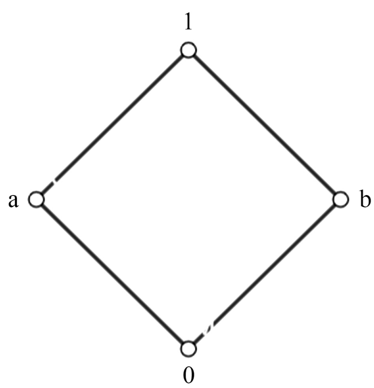

Figure 3. Hasse diagram of X = {0, *a*, *b*, 1} in example 3.13
图 3. 例 3.13 中 X = {0, *a*, *b*, 1}的哈斯图

我们可以验证 $(X,\le,\to,1)$ 是一个 L-代数，并且还是一个有界的弱 OL-代数，通过表 3 我们可以验证 $\downarrow\{a\}$ 是 $(X,\le,\to,1)$ 上的一个正交理想。

例 3.14 设 $\mathrm{P}(X)$ 表示集合 X 上的幂集。定义 $A\to B=A^C\cup B$ 对于任意的 $A,B\in\mathrm{P}(X)$。那么 $(\mathrm{P}(X),\subseteq,\to,',1)$ 是一个有界弱 OL-代数。我们可以证明 $I_1=\downarrow\{\varnothing\}$，$I_2=\downarrow A$，$A\in\mathrm{P}(X)$ 是正交理想。

注 3.15 例子 3.13 和例子 3.14 的正交理想构造直接依赖于经典代数中的补运算和偏序关系，说明弱 OL-代数中正交理想的本质是经典代数结构在弱 OL-公理系统下的自然推广。

命题 3.16 设$(X,\le,\to,1)$是一个有界弱 OL-代数，$Id(X)$表示X上所有正交理想的集合，对于任意的$x,y\in X$，如果下列条件：

(1) $x''=x$；

(2) $x'\le y'\Rightarrow y\le x$；

(3) $x\le y\Rightarrow x'\to y'=y\to x$.

是满足的，那么下面的结论是成立的：

(1) 如果$I_1,I_2\in Id(X)$，那么$I_1\cup I_2$也是X上的正交理想；

(2) 如果$\{I_i\}(i\in I)\subseteq Id(X)$。那么$\bigcap_{i\in I} I_I$是$X$上的正交理想；

(3) $\downarrow((x\to y)\to x')'\subseteq\downarrow x\cap\downarrow y$；

(4) 如果$x\in X$，那么$\downarrow x$是X上的正交理想。

证明：(1) 设$x\in I_1\cup I_2$并且$y\le x$。如果$x\in I_1$，因为$I_1\in Id(X)$，所以$\downarrow I_1=I_1$，并且$y\in I_1\subseteq I_1\cup I_2$；同理，如果$x\in I_2$，那么$y\in I_2\subseteq I_1\cup I_2$，因此$I_1\cup I_2$是下集。当$x,y\in I_1$或者$x,y\in I_2$时，根据上述正交理想的定义可知$((x\to y)\to x')'\in I$。对于$x\in I_1,y\in I_2$，或者$x\in I_2,y\in I_1$，我们有：

$$x'\le x\to y\Rightarrow(x\to y)\to x'=x\to(x\to y)'$$
$$\Rightarrow x'\le x\to(x\to y)'=(x\to y)\to x'$$
$$\Rightarrow((x\to y)\to x')'\le x.$$

因此，$I_1\cup I_2$也是X上的正交理想。

(2) 如果$x\in\bigcap_{i\in I} I_I$，并且$y\le x$，那么对于任意的$i\in I,x\in I$。因为每一个I_i都是下集，

那么$y\in I$对于任意的$i\in I$都是成立的，也就是说$y\in\bigcap_{i\in I} I_i$，因此$\bigcap_{i\in I} I_i$是下集。对于任意的$x,y\in X$，$((x\to y)\to x')'\in I$对于任意的$i\in I$都是成立的，$\bigcap_{i\in I} I_I$是X上的正交理想；

(3) 对于任意的$x,y\in I$，我们有：

$$x'\le x\to y\Rightarrow(x\to y)\to x'=x\to(x\to y)'$$
$$\Rightarrow x'\le x\to(x\to y)'=(x\to y)\to x'$$
$$\Rightarrow((x\to y)\to x')'\le x.$$

同样地，我们可以得出$((x\to y)\to x')'\le y$的结论。因此我们可以得到$((x\to y)\to x')'\subseteq\downarrow x\cap\downarrow y$。

(4) 对于任意$y,z\in\downarrow x$，我们需要证明$((y\to z)\to z')'\in\downarrow x$，基于条件$x\le y\Rightarrow x'\to y'=y\to x$我们知道：

$$z\le x\Rightarrow(y\to x)'\le(y\to z)'$$
$$\Rightarrow y\to(y\to x)'\le y\to(y\to z)'$$

然后基于条件对于任意的$y\in X$，我们有$y''=y$，再根据条件$x\le y\Rightarrow x'\to y'=y\to x$有

$y'=y\to 0\le y\to x\Rightarrow(y')'\to(y\to x)'=(y\to x)\to y'$，

$y'=y\to 0\le y\to z\Rightarrow(y')'\to(y\to z)'=(y\to z)\to y'$。因此：

$$y\to(y\to x)'\le y\to(y\to z)'$$
$$\Rightarrow y\to(y\to x)'\le(y\to z)\to y'$$
$$\Rightarrow(y\to x)\to y'\le(y\to z)\to y'$$

因为$y\in\downarrow x$，所以$y\le x$并且$y\to x=1$，因此：

$$\begin{aligned}&(y\to x)\to y'\le (y\to z)\to y'\\ &\Rightarrow y'\le (y\to z)\to y'\\ &\Rightarrow ((y\to z)\to y')'\le y\\ &\Rightarrow ((y\to z)\to y')'\le x.\end{aligned}$$

根据上述弱 OL-代数上的正交理想的定义，我们可以证明$\downarrow x$ 是 X 上的正交理想。

4. 总结与展望

本文对 OL-代数的公理进行弱化，得到了弱 OL-代数的概念，并对其性质进行了研究。证明了 OL-代数一定是弱 OL-代数，而弱 OL-代数不一定是 L-代数，通过举例证明了弱 OL-代数的存在性，明确了弱 OL-代数的量子逻辑属性。在弱 OL-代数中引入了正交理想的概念，证明了有界弱 OL-代数上正交理想的集合对交和并运算封闭。完成了 OL-代数拓展结构的初步研究，丰富了 OL-代数的理论外延。

本文得到了一些有意义的结果，但仍有一些问题有待研究：

1) 研究弱 OL-代数与剩余格、BL-代数、EQ-代数等其他逻辑代数之间的关系；

2) 在弱 OL-代数的基础上，可进一步调整弱 OL-代数的公理条件，构造更多 OL-代数的拓展形式。

参考文献

[1] Dietzel, C., Rump, W. and Zhang, X. (2019) One-Sided Orthogonality, Orthomodular Spaces, Quantum Sets, and a Class of Garside Groups. *Journal of Algebra*, **526**, 51-80. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.02.012

[2] Nation, J.B. (1998) Notes on Lattice Theory. University of Hawaii, 1998.

[3] Davey, B.A. and Priestley, H.A. (2002) Introduction to Lattices and Order. 2nd Edition, Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9780511809088

[4] Ciungu, L.C. (2021) Results in L-Algebras. *Algebra universalis*, **82**, Article No. 7. https://doi.org/10.1007/s00012-020-00695-1

[5] Saidi Goraghani, S. and Borzooei, R.A. (2024) L-Modules. *Bulletin of the Section of Logic*, **53**, 125-144.

[6] Rump, W. and Yang, Y. (2012) Intervals in L-Groups as L-Algebras. *Algebra universalis*, **67**, 121-130. https://doi.org/10.1007/s00012-012-0172-5

[7] Rump, W. (2018) Von Neumann Algebras, *L*-Algebras, Baer*-Monoids, and Garside Groups. *Forum Mathematicum*, **30**, 973-995. https://doi.org/10.1515/forum-2017-0108

[8] Georgescu, G. and Iorgulescu, A. (2001) Pseudo-MV Algebras. *Multiple-Valued Logic*, **6**, 95-135.