Pure Mathematics **理论数学, 2026, 16(4), 36-45**
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.164089

n维Riordan阵列的相关性质

王亚丽，王　靖*

内蒙古师范大学数学科学学院，内蒙古　呼和浩特

收稿日期：2026年3月1日；录用日期：2026年4月8日；发布日期：2026年4月15日

摘　要

n维Riordan阵列是一类广义的Riordan阵列。本文系统研究n维Riordan阵列的相关性质。首先针对三维Riordan阵列，探讨满足特定条件的元素分解问题。其次，利用广义巴纳赫不动点定理将三维Riordan阵列推广至高维，构造n维Riordan群上的双射，建立n维与$n-1$维Riordan群的关联。最后，通过该双射将对合性与伪对合性从$n-1$维推广到n维Riordan阵列，构造具有特定性质的n维Riordan群。

关键词

Riordan阵列，双射，对合矩阵，伪对合矩阵

The Relevant Properties of n-Dimensional Riordan Arrays

Yali Wang, Jing Wang*

College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot Inner Mongolia

Received: March 1, 2026; accepted: April 8, 2026; published: April 15, 2026

Abstract

An n-dimensional Riordan array is a generalization of the classical Riordan array. This paper systematically investigates the properties of n-dimensional Riordan arrays. First, for the 3-dimensional Riordan array, we discuss the element decomposition under certain conditions. Next, using the generalized Banach fixed-point theorem, we extend the 3-dimensional Riordan array to higher dimensions, construct a bijection on the n-dimensional Riordan group, and establish a connection between the n-dimensional and $(n-1)$-dimensional Riordan groups. Finally, via this bijection, we extend the

*通讯作者。

文章引用：王亚丽，王靖. n维 Riordan 阵列的相关性质[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 36-45.
DOI: 10.12677/pm.2026.164089

involution and pseudo-involution properties from $(n-1)$-dimensional to n-dimensional Riordan arrays, and construct an n-dimensional Riordan group with specific properties.

Keywords

Riordan Arrays, Bijection, Involutions, Pseudo-Involutions

1. 引言

组合矩阵是组合数学的重要研究对象。1991 年，Shapiro 等人首次引入了 Riordan 群的概念[1]，并且利用 Riordan 阵列证明了几个经典的组合恒等式。1997 年，Merlini 用 Riordan 矩阵的 A-序列和 Z-序列对 Riordan 阵列进行了刻画。

近年来，Riordan 阵列及其应用研究持续深入。2005 年，Cameron 推广了 Pascal 三角和 RNA 三角，并证明以上矩阵均为伪对合矩阵[2]。2008 年，Cheon 在 Riordan 群上研究了对合矩阵的构造及性质[3]。2009 年，Cheon 等人研究了 Riordan 群伪对合矩阵与特殊序列的关系[4]，并计算了该序列。2014 年，Luzón 研究了 Riordan 阵列的互补阵列的性质并研究了它们和 Riordan 阵列的逆矩阵的关系[5]，并推导出几个递归矩阵元素的显式表达式。2017 年，Luzón 等人利用泛函方程讨论了 Riordan 群中对合矩阵的情况[6]。同年，Cheon 等人引入了 n 维 Riordan 阵列的概念[7]，证明了 n 维 Riordan 阵列具有群结构，并研究了三维 Riordan 阵列在组合和式中的应用。2021 年，Burstein 研究了 Riordan 群中，那些第一列的生成函数满足回文或近回文函数方程的阵列的伪对合的情况[8]。

Riordan 阵列 $\mathcal{R}=\left[r_{n,k}\right]_{n,k\in\mathbb{N}}$ 是组合数学中一种常见的无限矩阵，它是由一对形式幂级数 $\left(g(t),f(t)\right)$ 定义的，其中 $g(t)=\sum_{n\ge0}g_nt^n$，$f(t)=\sum_{n\ge0}f_nt^n$，规定 $g_0\ne0$，$f_0=0$，$f_1\ne0$。该矩阵第 k 列的发生函数为 $g(t)f^k(t)$。Riordan 阵列 $\left(g(t),f(t)\right)$ 可以由序列 $(a_n)_{n\ge0}$ 和 $(z_n)_{n\ge0}$ 来刻画，序列 $(a_n)_{n\ge0}$ 和序列 $(z_n)_{n\ge0}$ 与矩阵 $\mathcal{R}$ 的一般元 $r_{n,k}$ 的关系为

$$r_{0,0}=1,\ r_{n+1,0}=\sum_{j\ge0}z_jr_{n,j},\ r_{n+1,k+1}=\sum_{j\ge0}a_jr_{n,k+j},\ n,k\ge0.$$

Riordan 阵列的每个元素可由其上一行元素的线性组合表示。序列 $(a_n)_{n\ge0}$ 和 $(z_n)_{n\ge0}$ 分别为该 Riordan 阵列的 A-序列和 Z-序列。记 A-序列和 Z-序列的发生函数分别为 $A(t)$ 和 $Z(t)$，那么 $A(t)$ 和 $Z(t)$ 可以由 $g(t)$ 和 $f(t)$ 表示为

$$A(t)=\frac{t}{\bar{f}(t)},Z(t)=\frac{1}{\bar{f}(t)}\left(1-\frac{g_0}{g\left(\bar{f}(t)\right)}\right),$$

其中 $\bar{f}(t)$ 是 $f(t)$ 的复合逆，即 $f\left(\bar{f}(t)\right)=\bar{f}\left(f(t)\right)=t$。

n 维 Riordan 阵列 $\left[r_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\right]_{i_1,i_2,\cdots,i_n\in\mathbb{N}}$ 是由 n 个形式幂级数

$$\mathcal{R}^{\langle n\rangle}=\left(g_1(t),f(t),g_2(t),g_3(t),\cdots,g_{n-1}(t)\right)$$

定义的无限数组，其中 $r_{i_1,i_2,\cdots,i_n}=\left[t^{i_1}\right]g_1(t)f^{i_2}(t)g_2^{i_3}(t)\cdots g_{n-1}^{i_n}(t)$，$g_1(0),\cdots,g_{n-1}(0)\ne0$，$f(0)=0$，

$f'(0)\neq 0$。

例 1.1. 三维 Pascal 矩阵 $\left(\frac{1}{1-t},\frac{t}{1-t},\frac{1}{1-t}\right)$ 的前五行为

$$\text{第零层}\begin{pmatrix}1&&&&\\1&1&&&\\1&2&1&&\\1&3&3&1&\\1&4&6&4&1\end{pmatrix}\quad\text{第一层}\begin{pmatrix}1&&&&\\2&1&&&\\3&3&1&&\\4&6&4&1&\\5&10&10&5&1\end{pmatrix}\quad\text{第二层}\begin{pmatrix}1&&&&\\3&1&&&\\6&4&1&&\\10&10&5&1&\\15&20&15&6&1\end{pmatrix}\quad\text{第三层}\begin{pmatrix}1&&&&\\4&1&&&\\10&5&1&&\\20&15&6&1&\\35&35&21&7&1\end{pmatrix}$$

n 维 Riordan 阵列满足乘法规则：

$$\begin{aligned}&\left(g_1(t),f(t),g_2(t),g_3(t),\cdots,g_{n-1}(t)\right)\cdot\left(G_1(t),F(t),G_2(t),G_3(t),\cdots,G_{n-1}(t)\right)\\&=\left(g_1(t)G_1(f(t)),F(f(t)),g_2(t)G_2(f(t)),g_3(t)G_3(f(t)),\cdots,g_{n-1}(t)G_{n-1}(f(t))\right).\end{aligned}$$

n 维 Riordan 阵列在上述乘法意义下构成 n 维 Riordan 群。n 维 Riordan 群的单位元是 $(1,t,1,\cdots,1)$，$\left(g_1(t),f(t),g_2(t),\cdots,g_{n-1}(t)\right)$ 的逆元是

$$\left(\frac{1}{g_1(\bar{f}(t))},\bar{f}(t),\frac{1}{g_2(\bar{f}(t))},\cdots,\frac{1}{g_{n-1}(\bar{f}(t))}\right).$$

2. 一类三维 Riordan 阵列的分解

引理 2.1. [6] 设 Riordan 阵列 $(d(t),h(t))$ 是对合矩阵，其中 $d(t)=\sum_{n\geq 0}d_nt^n$，$h(t)=\sum_{n\geq 1}h_nt^n$，$d_0=1$，$h_1=-1$，那么 $(d(t),h(t))=I_\alpha^+I_\beta^+I_\gamma^+$，其中 $I_\alpha^+=(\delta_1(t),\omega_1(t))$，$I_\beta^+=(\delta_2(t),\omega_2(t))$，$I_\gamma^+=(\delta_3(t),\omega_3(t))$，且满足 $(I_\alpha^+)^2=(I_\beta^+)^2=(I_\gamma^+)^2=(1,t)$。

定理 2.2. 设三维 Riordan 阵列 $(f(t),g(t),h(t))$ 满足

$$(f(t),g(t),h(t))^2=(1,t,1),$$

其中 $f(t)=\sum_{n\geq 0}f_nt^n$，$g(t)=\sum_{n\geq 1}g_nt^n$，$h(t)=\sum_{n\geq 0}h_nt^n$，$f_0=h_0=1$，$g_1=-1$，那么 $(f(t),g(t),h(t))=I_\alpha^+I_\beta^+I_\gamma^+$，其中

$$I_\alpha^+=(\delta_1(t),\omega_1(t),\mu_1(t)),I_\beta^+=(\delta_2(t),\omega_2(t),\mu_2(t)),I_\gamma^+=(\delta_3(t),\omega_3(t),\mu_3(t)),$$

并且满足 $(I_\alpha^+)^2=(I_\beta^+)^2=(I_\gamma^+)^2=(1,t,1)$。

证明. 这个定理的证明等价于下列泛函方程组有解。

$$f(t)=\delta_1(t)\delta_2(\omega_1(t))\delta_3(\omega_2(\omega_1(t))),$$

$$h(t)=\mu_1(t)\mu_2(\omega_1(t))\mu_3(\omega_2(\omega_1(t))),$$

$$g(t)=\omega_3(\omega_2(\omega_1(t))).$$

上述方程组的解为 $I_\alpha^+=(\delta_1(t),\omega_1(t),\mu_1(t))$，$I_\beta^+=(\delta_2(t),\omega_2(t),\mu_2(t))$，$I_\gamma^+=(\delta_3(t),\omega_3(t),\mu_3(t))$。也就是说，上述泛函方程组等价于下面的这个方程组

$$(1,\omega_1(t))g(t)=(1,\omega_2(t))\omega_3(t),$$

$$(\delta_1(t),\omega_1(t))f(t)=(\delta_2(t),\omega_2(t))(1),$$

$$(\mu_1(t),\omega_1(t))h(t)=(\mu_2(t),\omega_2(t))(1).$$

根据引理 2.1 可知，上述方程组的解满足

$$(f(t),g(t))=O_\alpha^+O_\beta^+O_\gamma^+,(h(t),g(t))=P_\alpha^+P_\beta^+P_\gamma^+,$$

其中

$$O_\alpha^+=(\delta_1(t),\omega_1(t)),O_\beta^+=(\delta_2(t),\omega_2(t)),O_\gamma^+=(\delta_3(t),\omega_3(t)),$$

$$P_\alpha^+=(\mu_1(t),\omega_1(t)),P_\beta^+=(\mu_2(t),\omega_2(t)),P_\gamma^+=(\mu_3(t),\omega_3(t)),$$

并且 $(O_\alpha^+)^2=(O_\beta^+)^2=(O_\gamma^+)^2=(P_\alpha^+)^2=(P_\beta^+)^2=(P_\gamma^+)^2=(1,t)$。

综上所述，存在

$$I_\alpha^+=(\delta_1(t),\omega_1(t),\mu_1(t)),I_\beta^+=(\delta_2(t),\omega_2(t),\mu_2(t)),I_\gamma^+=(\delta_3(t),\omega_3(t),\mu_3(t)),$$

且 $(I_\alpha^+)^2=(I_\beta^+)^2=(I_\gamma^+)^2=(1,t,1)$，使得满足 $(f(t),g(t),h(t))^2=(1,t,1)$ 的三维 Riordan 阵列 $(f(t),g(t),h(t))$ 可分解为 $(f(t),g(t),h(t))=I_\alpha^+I_\beta^+I_\gamma^+$。

例 2.3. 三维 Riordan 阵列 $\left(\frac{1}{1-t},\frac{-t}{1-t},\frac{1}{1-t}\right)$ 的前五行为

$$\begin{pmatrix}1&&&&\\1&-1&&&\\1&-2&1&&\\1&-3&3&-1&\\1&-4&6&-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&&\\2&-1&&&\\3&-3&1&&\\4&-6&4&-1&\\5&-10&10&-5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&&\\3&-1&&&\\6&-4&1&&\\10&-10&5&-1&\\15&-20&15&-6&1\end{pmatrix}$$

它可以进行如下分解

$$\left(\frac{1}{1-t},\frac{-t}{1-t},\frac{1}{1-t}\right)=\left(\frac{1}{1-t},\frac{-t}{1-t},\frac{1}{1-t}\right)\cdot(1,-t,1)^2,$$

其中

$$\left(\frac{1}{1-t},\frac{-t}{1-t},\frac{1}{1-t}\right)^2=(1,-t,1)^2=(1,t,1).$$

3. 拓扑结构下的三维 Riordan 阵列

本节将利用广义巴纳赫不动点定理对三维 Riordan 阵列进行推广。

广义巴拿赫不动点定理[9] 令 X 是一个完备度量空间。设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}:X\to X$ 是一个具有相同收缩常数 α 的收缩映射序列，且 $(f_n)\to f$ (点到点)，那么 f 是 α-收缩的，且对于任意的点 $z\in X$，序列 $(f_n\circ\cdots\circ f_1(z))\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0$，其中 x_0 是 f 的唯一不动点。

记 $f(t)=\sum_{n\ge0}a_nt^n$，$g(t)=\sum_{n\ge0}b_nt^n$，$h(t)=\sum_{n\ge0}c_nt^n$，其中 $b_0\ne0$，$c_0\ne0$。接下来构造三维阵列 $T(f(t)\,|\,g(t),h(t))=[r_{i,j,k}]_{i,j,k\in\mathbb{N}_+}$，其中该阵列的第一列第一层的发生函数为 $\frac{f(t)}{g(t)h(t)}$，第 j 列第 k 层的发生函数为 $\frac{f(t)t^{j+k-2}}{g^j(t)h^k(t)}$。该阵列的第 j 列第 k 层($j,k\ge2$)的发生函数，可利用广义巴纳赫不动点定理，用下面的 $\frac{1}{2}$-等收缩序列去构造。

$$W_m(S)=T_m\left(\frac{g(0)-g(t)}{g(0)}\right)S+tT_{m-1,j-1}\left(\frac{f(t)t^{j+k-3}}{g(0)g^{j-1}(t)h^k(t)}\right),$$

其中 $T_{m-1,j}(t)$ 表示 $\frac{t^{j-1}}{(1-t)^j}$ 的 $m-1$ 阶泰勒多项式，$(W_m(t))\to W(t)$ (点到点)，$W(S)=\left(\frac{g(0)-g(t)}{g(0)}\right)S+t\left(\frac{f(t)t^{j+k-3}}{g(0)g^{j-1}(t)h^k(t)}\right)$，那么 $W(t)$ 是 $\frac{1}{2}$-收缩的且它的不动点为 $\frac{f(t)t^{j+k-2}}{g^j(t)h^k(t)}$，即为该三维阵列第 j 列第 k 层的发生函数。

记阵列 $T(f(t)\,|\,g(t),h(t))=[r_{i,j,k}]_{i,j,k\in\mathbb{N}_+}$，那么有

$$\frac{f(t)t^{j+k-2}}{g^j(t)h^k(t)}=\sum_{i=1}^{+\infty}r_{i,j,k}t^{i-1}.$$

因此 $T(f(t)\,|\,g(t),h(t))$ 是一个三维 Riordan 阵列。

引理 3.1. [9] 记 $f(t)=\sum_{n\ge0}a_nt^n$，$g(t)=\sum_{n\ge0}b_nt^n$，其中 $b_0\ne0$，对于阵列 $T(f(t)\,|\,g(t))=[r_{i,j}]_{i,j\in\mathbb{N}_+}$ 满足 $\frac{t^{j-1}f(t)}{g^j(t)}=\sum_{i=1}^{+\infty}r_{i,j}t^{i-1}$，因此 $T(f(t)\,|\,g(t))$ 是一个 Riordan 阵列。

命题 3.2. $f(t),g(t),h(t)$ 为形式幂级数，其中 $g(0)h(0)\ne0$。那么有

$$T(f(t)\,|\,g(t),h(t))\cdot T(F(t)\,|\,G(t))=T\left(\frac{f(t)F\left(\frac{t}{g(t)}\right)}{t}\,\middle|\,\frac{h(t)G\left(\frac{t}{g(t)}\right)}{\frac{t}{g(t)}}\right).$$

证明. 利用三维 Riordan 阵列的基本定理可得

$$
\begin{aligned}
&T\left(f(t)\mid g(t),h(t)\right)\cdot T\left(F(t)\mid G(t)\right)\\
&=\left(\frac{f(t)}{g(t)h(t)},\frac{t}{g(t)},\frac{t}{h(t)}\right)\cdot\left(\frac{F(t)}{G(t)},\frac{t}{G(t)}\right)\\
&=\left(\frac{f(t)F\left(\frac{t}{g(t)}\right)}{g(t)h(t)G\left(\frac{t}{g(t)}\right)},\frac{t\cdot\frac{t}{g(t)}}{h(t)G\left(\frac{t}{g(t)}\right)}\right)\\
&=T\left(\frac{f(t)F\left(\frac{t}{g(t)}\right)}{t}\middle|\frac{h(t)G\left(\frac{t}{g(t)}\right)}{\frac{t}{g(t)}}\right),
\end{aligned}
$$

得证。

这里用 $\mathbb{K}[\![t]\!]$ 表示系数取自域 $\mathbb{K}$，以 t 为变量的形式幂级数环，$\left(\mathbb{K}[\![t]\!],d\right)$ 表示在形式幂级数环上赋予了一个度量空间结构，$\mathbb{K}[\![t]\!]\backslash t\mathbb{K}[\![t]\!]$ 表示形式幂级数环 $\mathbb{K}[\![t]\!]$ 对理想 $t\mathbb{K}[\![t]\!]$ 取商环。

命题 3.3. 若 $f_i(t)\in\mathbb{K}[\![t]\!],g_i(t),h_i(t)\in\mathbb{K}[\![t]\!]\backslash t\mathbb{K}[\![t]\!]$，其中 $i=1,2$，则

$$
\begin{aligned}
&T\left(f_1(t)\mid g_1(t),h_1(t)\right)\cdot T\left(f_2(t)\mid g_2(t),h_2(t)\right)\\
&=T\left(g_1(t)f_1(t)f_2\left(\frac{t}{g_1(t)}\right)\middle|g_1(t)g_2\left(\frac{t}{g_1(t)}\right),g_1(t)h_1(t)h_2\left(\frac{t}{g_1(t)}\right)\right).
\end{aligned}
$$

证明. 考虑 $T\left(f_1(t)\mid g_1(t),h_1(t)\right)$ 和 $T\left(f_2(t)\mid g_2(t),h_2(t)\right)$，其中 $g_i(0)h_i(0)\neq 0$，$i=1,2$，则

$$
\begin{aligned}
&\left(T\left(f_1(t)\mid g_1(t),h_1(t)\right)\cdot T\left(f_2(t)\mid g_2(t),h_2(t)\right)\right)\cdot T\left(F(t)\mid G(t)\right)\\
&=T\left(f_1(t)\mid g_1(t),h_1(t)\right)\cdot T\left(\frac{f_2(t)F\left(\frac{t}{g_2(t)}\right)}{t}\middle|\frac{h_2(t)G\left(\frac{t}{g_2(t)}\right)}{\frac{t}{g_2(t)}}\right)\\
&=T\left(\frac{g_1(t)f_1(t)f_2\left(\frac{t}{g_2(t)}\right)F\left(t/\left(g_1(t)g_2\left(\frac{t}{g_1(t)}\right)\right)\right)}{t}\middle|\frac{g_1(t)h_1(t)h_2\left(\frac{t}{g_1(t)}\right)G\left(t/\left(g_1(t)g_2\left(\frac{t}{g_1(t)}\right)\right)\right)}{t/\left(g_1(t)g_2\left(\frac{t}{g_1(t)}\right)\right)}\right),
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&T\left(f_1(t)\mid g_1(t),h_1(t)\right)\cdot T\left(f_2(t)\mid g_2(t),h_2(t)\right)\\
&=T\left(g_1(t)f_1(t)f_2\left(\frac{t}{g_1(t)}\right)\middle|g_1(t)g_2\left(\frac{t}{g_1(t)}\right),g_1(t)h_1(t)h_2\left(\frac{t}{g_1(t)}\right)\right),
\end{aligned}
$$

得证。

命题 3.4. 记 $W\left(\mathbb{K}[\![t]\!]\right)=\left\{T\left(f(t)\mid g(t),h(t)\right),f(t),g(t),h(t)\in\mathbb{K}[\![t]\!]\backslash t\mathbb{K}[\![t]\!]\right\}$，那么 $\left(W\left(\mathbb{K}[\![t]\!]\right),\cdot\right)$ ($\cdot$ 是矩阵普通乘法规则)构成一个群。

证明. 设 $f(t),g(t),h(t)\in\mathbb{K}[\![t]\!]\backslash t\mathbb{K}[\![t]\!]$，则 $T\left(f(t)\mid g(t),h(t)\right)$ 是线性等距的(可逆情况下)。记

$u(t)=\dfrac{1}{g(t)\left(\dfrac{1}{g(t)}\right)f(t)\left(\dfrac{1}{g(t)}\right)}$，$v(t)=\dfrac{t}{\left(\dfrac{1}{g(t)}\right)}$，$w(t)=\dfrac{1}{g(t)\left(\dfrac{1}{g(t)}\right)h(t)\left(\dfrac{1}{g(t)}\right)}$，则

$$\begin{aligned}&\left(T\left(f(t)\,|\,g(t),h(t)\right)\cdot T\left(u(t)\,|\,v(t),w(t)\right)\right)b(t)\\&=\left(T\left(u(t)\,|\,v(t),w(t)\right)\cdot T\left(f(t)\,|\,g(t),h(t)\right)\right)b(t)=b(t).\end{aligned}$$

同样地，计算得到单位元为 $I=T(1|1,1)$。根据命题 3.3 可知，若 $f_1(t),f_2(t),g_1(t),g_2(t),h_1(t),h_2(t)\in\mathbb{K}[\![t]\!]\setminus t\mathbb{K}[\![t]\!]$，则

$$\left(T\left(f(t)\,|\,g(t),h(t)\right)\cdot T\left(f(t)\,|\,g(t),h(t)\right)\right)^{-1}\in W\left(\mathbb{K}[\![t]\!]\right).$$

所以 $W\left(\mathbb{K}[\![x]\!]\right)$ 是 $\left(\mathbb{K}[\![x]\!],d\right)$ 的等距群的一个子群。

4. *n* 维 Riordan 群上的双射

定理 4.1. 记 $n-1$ 维 Riordan 群的子群 $\mathcal{A}^{\langle n-1\rangle}=\left\{\left(g(t),t,1,\cdots,1\right)\,|\,g(0)\neq 0\right\}$，$n$ 维 Riordan 群为 $\mathcal{R}^{\langle n\rangle}$，则有如下双射：对于任意的 $\alpha\in\mathcal{A}^{\langle n-1\rangle}$，$\beta\in\mathcal{R}^{\langle n-1\rangle}$，$\mathcal{A}^{\langle n-1\rangle}\times\mathcal{R}^{\langle n-1\rangle}\to\mathcal{R}^{\langle n\rangle}$，$\varphi$：$\alpha\beta\to\left[\alpha^0\beta\,|\,\alpha^1\beta\,|\cdots\right]^{\mathrm{T}}$，$\varphi(\alpha\beta)\in\mathcal{R}^{\langle n\rangle}$，其中 $\alpha^i\beta$ 可视作 $\varphi(\alpha\beta)$ 的第 i 层，且对于任意的 $\gamma\in\mathcal{R}^{\langle n\rangle}$，有唯一的 $\alpha\in\mathcal{A}^{\langle n-1\rangle}$，$\beta\in\mathcal{R}^{\langle n-1\rangle}$ 使得 $\varphi(\alpha\beta)=\gamma$。

证明. 首先证明 φ 是单射。令 $\alpha_1=\left(g_{n-1}(t),t,1,\cdots,1\right)$，$\alpha_2=\left(G_{n-1}(t),t,1,\cdots,1\right)\in\mathcal{A}^{\langle n-1\rangle}$，$\beta_2=\left(g_1(t),f(t),g_2(t),\cdots,g_{n-2}(t)\right)$，$\beta_2=\left(G_1(t),F(t),G_2(t),\cdots,G_{n-2}(t)\right)\in\mathcal{R}^{\langle n-1\rangle}$。若 $\varphi(\alpha_1\beta_1)=\varphi(\alpha_2\beta_2)$，可得

$$g_{n-1}^m(t)g_1(t)=G_{n-1}^m(t)G_1(t),f(t)=F(t),g_i(t)=G_i(t),m\in\mathbb{N},i\geq 2.$$

当 $m=0$ 时，有 $g_1(t)=G_1(t)$，

$$\alpha_1^k\beta_1=\left(g_1(t)g_{n-1}^k(t),f(t),g_2(t),\cdots,g_{n-2}(t)\right),$$

$$\alpha_2^k\beta_2=\left(G_1(t)G_{n-1}^k(t),F(t),G_2(t),\cdots,G_{n-2}(t)\right).$$

由于 $g_1(t)\neq 0,g_2(t)\neq 0$，可得 $g_{n-1}(t)=G_{n-1}(t)$，所以 $\alpha_1=\alpha_2$，$\beta_1=\beta_2$。

接下来证明 φ 是满射。令 $\gamma=\left(g_1(t),f(t),g_2(t),\cdots,g_{n-2}(t),g_{n-1}(t)\right)\in\mathcal{R}^{\langle n\rangle}$，有 $\alpha=\left(g_{n-1}(t),t,1,\cdots,1\right)\in\mathcal{A}^{\langle n-1\rangle}$，并且 $\beta=\left(g_1(t),f(t),g_2(t),\cdots,g_{n-2}(t)\right)\in\mathcal{R}^{\langle n-1\rangle}$，那么

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha\beta)&=\left[\alpha^0\beta\,|\,\alpha^1\beta\,|\,\alpha^2\beta\,|\cdots\right]^{\mathrm{T}}\\&=\left(g_1(t),f(t),g_2(t),\cdots,g_{n-1}(t)\right)=\gamma.\end{aligned}$$

故证明了 ϕ 是双射。

推论 4.2. 记 Appell 群为 $\mathcal{A}$，Riordan 群为 $\mathcal{R}$，三维 Riordan 群为 $\mathcal{R}^{\langle 3\rangle}$，那么存在如下双射：对于任意的 $\alpha\in\mathcal{A}$，$\beta\in\mathcal{R}$，都有 $\mathcal{A}\times\mathcal{R}\to\mathcal{R}^{\langle 3\rangle}$，$\varphi$：$\alpha\beta\to\left[\alpha^0\beta\,|\,\alpha^1\beta\,|\cdots\right]^{\mathrm{T}}$，使得 $\varphi(\alpha\beta)\in\mathcal{R}^{\langle 3\rangle}$，且对于任意的 $\gamma\in\mathcal{R}^{\langle 3\rangle}$，都有唯一的 $\alpha\in\mathcal{A}$，$\beta\in\mathcal{R}$ 使得 $\varphi(\alpha\beta)=\gamma$。

5. 对合和伪对合在 *n* 维 Riordan 阵列中的推广

Riordan 群中的元素 $\left(g(t),f(t)\right)$ 是对合的充要条件为 $\left(g(t),f(t)\right)^2=I$。令 $M=(1,-t)$，那么 Riordan 群中的元素 $\left(g(t),f(t)\right)$ 是伪对合的(*PI*)充要条件为 $\left(g(t),f(t)\right)\cdot M$ 或 $M\cdot\left(g(t),f(t)\right)$ 是对合的。下面是一

些在 Riordan 群中构造对合和伪对合的结论。

引理 5.1. [10] 对于幂级数 $g(t)=1+\sum_{n\geq 1} g_n t^n$ 来说，若存在 $k\in\mathbb{N}$，使得 $g(t)=1+tg^k(t)$。那么有 $\left(g(t),-tg^{2k-1}(t)\right)^2=I$。

引理 5.2. [8] 令 $g=g(t)$，且该函数满足 $g=1+t\gamma(g)$，那么 $\left(g(t),f(t)\right)$ 是伪对合的充要条件为 $f(t)=\dfrac{t\gamma(g)}{g\gamma\left(\dfrac{1}{g}\right)}$。

根据上述结论，由 $n-1$ 维 Riordan 阵列的性质推出 n 维的 Riordan 阵列的性质。

定理 5.3. 若存在一个 i 使得多项式 $g_i(t)$ 满足 $g_i(0)=1$，并存在 $k\in\mathbb{N}$，满足 $g_i(t)=1+tg_i^k(t)$，那么 n 维 Riordan 阵列 $\left(g_{i,1}(t),-tg_i^{2k-1}(t),g_{i,2}(t),\cdots,g_{i,n-1}(t)\right)^2=I=(1,t,1,1,\cdots,1)$，其中当 $i=j$ 时，$g_{i,j}(t)=g_j$，当 $i\neq j$ 时，$g_{i,j}(t)=1$。

证明. 根据 n 维 Riordan 阵列的乘法规则，可以得到

$$\begin{aligned}&\left(g_1(t),f(t),g_2(t),\cdots,g_{n-1}(t)\right)\cdot\left(g_1(t),f(t),g_2(t),\cdots,g_{n-1}(t)\right)\\ n&\left(g_1(t)g_1\left(f(t)\right),f\left(f(t)\right),g_2(t)g_2\left(f(t)\right),\cdots,g_{n-1}(t)g_{n-1}\left(f(t)\right)\right).\end{aligned}$$

需要满足 $f\left(f(t)\right)=t$，$g_i(t)g_i\left(f(t)\right)=1$。对于 n 维 Riordan 阵列的情况，仅需要调整 $g_i(t)$ 的位置，然后令剩余的位置为 1。根据引理 5.1 可以得到结论。

接下来推广引理 5.2，其证明和定理 5.3 的过程类似，故省略。

定理 5.4. 若存在一个 i 使得 $g_i=g_i(t)$ 且 $g_i=1+t\gamma(g_i)$，令 $M=(1,-t,1,\cdots,1)\in\mathcal{R}^{\langle n\rangle}$，$A=\left(g_{i,1},f(t),g_{i,2},\cdots,g_{i,n-1}\right)$。$(AM)^2$ 或 $(MA)^2$ 是单位元 I 的充要条件为 $f(t)=\dfrac{t\gamma(g_i)}{g_i\gamma\left(\dfrac{1}{g_i}\right)}$，其中当 $i=j$ 时 $g_{i,j}=g_j$，当 $i\neq j$ 时 $g_{i,j}=1$。

例 5.5. 对于 $G_1=\left(\dfrac{1}{1-t},\dfrac{-t}{1-t},1\right)$ 和 $G_2=\left(1,\dfrac{-t}{1-t},\dfrac{1}{1-t}\right)$，有 $G_1^2=G_2^2=I$。G_1 和 G_2 的前五行分别为

$$\begin{pmatrix}1&&&&\\1&-1&&&\\1&-2&1&&\\1&-3&3&-1&\\1&-4&6&-4&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&&&&\\1&-1&&&\\1&-2&1&&\\1&-3&3&-1&\\1&-4&6&-4&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&&&&\\1&-1&&&\\1&-2&1&&\\1&-3&3&-1&\\1&-4&6&-4&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&&&&\\2&-1&&&\\3&-3&1&&\\4&-6&4&-1&\\5&-10&10&-5&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&&&&\\1&-1&&&\\1&-2&1&&\\1&-3&3&-1&\\1&-4&6&-4&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&&&&\\0&-1&&&\\0&-1&1&&\\0&-1&2&-1&\\0&-1&3&-3&1\end{pmatrix}$$

例 5.6. 令 $g=g(t)$ 且 g 满足方程 $g=1+t(bg-a)$，其中 a，b 为常数且 $a\neq b$。那么 $\gamma(t)=bt-a$ 且

$$g=\frac{1-at}{1-bt},$$

若 $\left(\left(g(t),f(t),1\right)\cdot(1,-t,1)\right)^2$ 且 $\left(\left(1,f(t),g(t)\right)\cdot(1,-t,1)\right)^2$ 是单位元 I，那么

$$f(t)=t\frac{bg(t)-a}{g\left(b/g(t)-a\right)}=t\frac{bg(t)-a}{b-ag(t)}=\frac{t}{1-(a+b)t}.$$

例如，取 $a=1$，$b=2$，得到

$$G_1=\left(\frac{1-t}{1-2t},\frac{t}{1-3t},1\right),G_2=\left(1,\frac{t}{1-3t},\frac{1-t}{1-2t}\right).$$

G_1 和 G_2 的前五行分别为

$$\begin{pmatrix}1&&&&\\1&1&&&\\2&4&1&&\\4&14&7&1&\\8&46&35&10&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&&&&\\1&1&&&\\2&4&1&&\\4&14&7&1&\\8&46&35&10&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&&&&\\1&1&&&\\2&4&1&&\\4&14&7&1&\\8&46&35&10&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&&&&\\2&1&&&\\5&5&1&&\\12&20&8&1&\\28&72&44&11&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&&&&\\1&1&&&\\2&4&1&&\\4&14&7&1&\\8&46&35&10&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&&&&\\0&1&&&\\0&3&1&&\\0&9&6&1&\\0&27&27&9&1\end{pmatrix}$$

推论 5.7. 记 $n-1$ 维 Riordan 群 $\mathcal{R}^{\langle n-1\rangle}$ 的子群为 $\mathcal{A}^{\langle n-1\rangle}=\left\{\left(g(t),t,1,\cdots,1\right)\right\}$，$n$ 维 Riordan 群为 $\mathcal{R}^{\langle n\rangle}$，其中 $g(0)\neq 0$。存在如下双射：对于任意的 $\alpha\in\mathcal{A}^{\langle n-1\rangle}$，$\beta\in\mathcal{R}^{\langle n-1\rangle}$，有 $\mathcal{A}^{\langle n-1\rangle}\times\mathcal{R}^{\langle n-1\rangle}\to\mathcal{R}^{\langle n\rangle}$，$\varphi$：$\alpha\beta\to\left[\alpha^0\beta\,|\,\alpha^1\beta\,|\cdots\right]^{\mathrm{T}}$。若存在一个 i 使得对于多项式 $g_i(t)$ 满足 $g_i(0)=1$，且存在 $k\in\mathbb{N}$，使得 $g_i(t)=1+tg_i(t)^k$，有

$$\beta^2=\left(g_{i,1},-tg_i^{2k-1},g_{i,2},\cdots,g_{i,n-2}\right)^2=I=(1,t,1,1,\cdots,1),$$

其中当 $i=j$ 时，$g_{i,j}=g_j(t)$，当 $i\neq j$ 时，$g_{i,j}=1$。

证明. 令 $\alpha=\left(g_{i,n-1},t,1,\cdots,1\right)\in\mathcal{A}$，通过该映射，可得

$$\varphi(\alpha\beta)=\left(g_{i,1},-tg_i^{2k-1},g_{i,2},\cdots,g_{i,n-2},g_{i,n-1}\right).$$

令 $i=1$，有

$$\varphi(\alpha\beta)=\left(g_1(t),-tg_1^{2k-1}(t),1,\cdots,1,1\right),$$

根据定理 5.3 可得 $\varphi(\alpha\beta)^2=I$。这一过程实际是在移动 i 的位置。得证。

上述结论给出了一种方法，即通过已知 $n-1$ 维 Riordan 群中由平方为单位元的某些元所构成的群，进而构造出 n 维 Riordan 群中具有相同性质的元所组成的集合。下面考虑类似的伪对合的情况。证明过程和推论 5.7 类似。

推论 5.8. 记 $n-1$ 维 Riordan 群 $\mathcal{R}^{\langle n-1\rangle}$ 的子群为 $\mathcal{A}^{\langle n-1\rangle}=\left\{\left(g(t),t,1,\cdots,1\right)\right\}$，$n$ 维 Riordan 群为 $\mathcal{R}^{\langle n\rangle}$，其

中 $g(0)\neq 0$。存在如下双射：对于任意的 $\alpha\in\mathcal{A}^{\langle n-1\rangle}$，$\beta\in\mathcal{R}^{\langle n-1\rangle}$，有 $\mathcal{A}^{\langle n-1\rangle}\times\mathcal{R}^{\langle n-1\rangle}\to\mathcal{R}^{\langle n\rangle}$，$\varphi$：$\alpha\beta\to\left[\alpha^0\beta\,|\,\alpha^1\beta\,|\cdots\right]^{\mathrm{T}}$。若存在一个 i 有 $g_i=g_i(t)$ 且满足 $g_i=1+t\gamma(g_i)$，$i\in[n-1]$。令 $\beta=\left(g_{i,1},f(t),g_{i,2},\cdots,g_{i,n-2}\right)$，$M_1=(1,-t,1,\cdots,1)\in\mathcal{R}^{\langle n-1\rangle}$，$M_2=(1,-t,1,\cdots,1)\in\mathcal{R}^{\langle n\rangle}$，$(\beta M_1)^2$ 或 $(M_1\beta)^2$ 为单位元 I 当且仅当 $f(t)=\dfrac{t\gamma(g_i)}{g_i\gamma\left(\dfrac{1}{g_i}\right)}$，其中当 $i=j$ 时，$g_{i,j}=g_j$，当 $i\neq j$ 时，$g_{i,j}=1$。进而得到 $\left(\varphi(\alpha\beta)M_2\right)^2$ 或 $\left(M_2\varphi(\alpha\beta)\right)^2$ 为单位元 I。

基金项目

本研究得到了内蒙古自然科学基金项目，组合序列的解析性质及其应用研究，2024MS01017 和内蒙古师范大学研究生科研创新基金项目，基于 idopNetwork 的空间生态网络研究，KYCXS2025030 的资助。

参考文献

[1] Shapiro, L.W., Getu, S., Woan, W. and Woodson, L.C. (1991) The Riordan Group. *Discrete Applied Mathematics*, **34**, 229-239. https://doi.org/10.1016/0166-218x(91)90088-e

[2] Cameron, N.T. and Nkwanta, A. (205) On Some (Pseudo) Involutions in the Riordan Group. *Journal of Integer Sequences*, **8**, Article 05.3.7.

[3] Cheon, G., Kim, H. and Shapiro, L.W. (2008) Riordan Group Involutions. *Linear Algebra and Its Applications*, **428**, 941-952. https://doi.org/10.1016/j.laa.2007.09.003

[4] Cheon, G., Jin, S., Kim, H. and Shapiro, L.W. (2009) Riordan Group Involutions and the δ-Sequence. *Discrete Applied Mathematics*, **157**, 1696-1701. https://doi.org/10.1016/j.dam.2009.01.012

[5] Luzón, A., Merlini, D., Morón, M.A. and Sprugnoli, R. (2014) Complementary Riordan Arrays. *Discrete Applied Mathematics*, **172**, 75-87. https://doi.org/10.1016/j.dam.2014.03.005

[6] Luzón, A., Morón, M.A. and Prieto-Martínez, L.F. (2017) A Formula to Construct All Involutions in Riordan Matrix Groups. *Linear Algebra and its Applications*, **533**, 397-417. https://doi.org/10.1016/j.laa.2017.07.033

[7] Cheon, G. and Jin, S. (2017) The Group of Multi-Dimensional Riordan Arrays. *Linear Algebra and Its Applications*, **524**, 263-277. https://doi.org/10.1016/j.laa.2017.03.010

[8] Barry, P. and Pantelidis, N. (2021) On Pseudo-Involutions, Involutions and Quasi-Involutions in the Group of Almost Riordan Arrays. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **54**, 399-423. https://doi.org/10.1007/s10801-020-00993-w

[9] Luzón, A. and Morón, M.A. (2008) Ultrametrics, Banach's Fixed Point Theorem and the Riordan Group. *Discrete Applied Mathematics*, **156**, 2620-2635. https://doi.org/10.1016/j.dam.2007.10.026

[10] Phulara, D. and Shapiro, L. (2017) Constructing Pseudo-Involutions in the Riordan Group. *Journal of Integer Sequences*, **20**, Article 17.4.7.