Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(5), 71-79
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.165132

Hans汉斯

基于思维导图的二次型化标准形的3种方法及应用

吴小莉[1]，**张　萍**[2*]

[1]桂林学院信息工程学院，广西 桂林
[2]南宁学院人工智能学院，广西 南宁

收稿日期：2026年4月1日；录用日期：2026年5月8日；发布日期：2026年5月25日

摘　要

二次型化标准形是高等代数的核心内容之一，通过非退化线性替换消除交叉项，将其转化为仅含平方项的简洁形式。本文将二次型化标准形的3种方法及其特点利用思维导图的形式进行归纳总结，并结合实际案例进行一题多解具体分析，帮助学习者理清思路，突破难点，提升学习效率。一题多解蕴含着“多元统一”的辩证统一思想与严谨求实的科学精神，是课程思政的生动载体。

关键词

二次型，标准形，配方法，合同变换法，正交变换法

Three Methods and Applications of Reducing Quadratic Forms to Standard Form Based on Mind Maps

Xiaoli Wu[1], **Ping Zhang**[2*]

[1]College of Information Engineering, Guilin University, Guilin Guangxi
[2]College of Artificial Intelligence, Nanning University, Nanning Guangxi

Received: April 1, 2026; accepted: May 8, 2026; published: May 25, 2026

Abstract

Reducing quadratic forms to standard form is one of the core topics in advanced algebra. Through

[*]通讯作者。

文章引用: 吴小莉, 张萍. 基于思维导图的二次型化标准形的 3 种方法及应用[J]. 理论数学, 2026, 16(5): 71-79.
DOI: 10.12677/pm.2026.165132

non-degenerate linear substitutions, cross terms are eliminated, transforming the form into a concise form containing only square terms. This paper summarizes the three methods for reducing quadratic forms to canonical forms and their characteristics using mind maps, and analyzes them with specific examples, aiming to help learners clarify their thinking, overcome difficulties, and improve learning efficiency. Finding multiple solutions to one problem embodies the dialectical unity of "diversity in unity" and the scientific spirit of rigor and truth-seeking, serving as a vivid vehicle for curriculum-based ideological and political education.

Keywords

Quadratic Form, Standard Form, Method of Completing the Square, Congruence Transformation Method, Orthogonal Transformation Method

1. 引言

二次型是几何分析、工程优化及数据分析等众多领域的关键工具，意义重大。由于其计算的复杂性及方法的多样性，也成为了学习者学习的一个难点。为了帮助学习者系统把握 3 种化二次型为标准形方法的本质联系、操作步骤及适用场景，本文引入思维导图作为学习认知工具。思维导图通过图形化、层级化的方式，将抽象的数学思维转化为可视化的知识网络，其核心作用体现在 3 个层面：

(1) 可视化：将 3 种化二次型为标准形方法的过程，以节点、分支、箭头的形式直观呈现，降低认知负荷。

(2) 结构化：按照"目标→方法→步骤→决策"的逻辑关系，揭示 3 种方法的内在联系与外在区别，避免知识碎片化。

(3) 系统化：从单个方法的微观操作到综合对比的宏观决策，形成完整的知识闭环，帮助学习者构建完整而全面的认知体系。

2. 二次型化标准形的 3 种核心方法

下面基于二次型 $f = X^{\mathrm{T}}AX$ 按微观层依次介绍配方法、合同变换法与正交变换法的原理、操作步骤及方法特征，每种方法附有解题步骤思维导图，以可视化流程辅助理解。

(一) 配方法

1) 原理

基于完全平方公式，通过依次对变量进行配方，逐步消去交叉项。其本质是构造一个非退化线性替换 $X = CY$，其中 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$，$C$ 为非退化矩阵，从而将二次型化为平方和形式。

2) 步骤

根据配方法的原理，给出配方法的基本步骤(见图 1)。

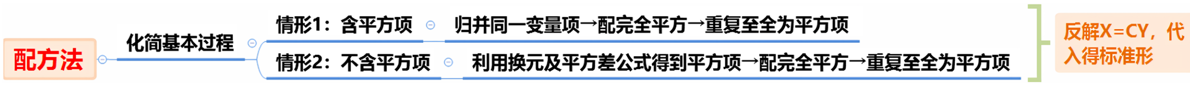

Figure 1. Process of completing the square
图 1. 配方法过程图

根据二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是否含平方项，分为 2 种情况讨论：

(1) 情形 1[1]：含平方项

① 如 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 含 x_1 的平方项，则将含 x_1 的所有项配成 x_1 的完全平方；

② 对剩余变量重复上述配方过程，直至所有项均为平方项；

③ 令各完全平方项为新变量 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，反解用 y_i 表示 x_i，并作非退化线性替换 $X=CY$，即可得到标准形 $f=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots d_ny_n^2$。

(2) 情形 2：不含平方项，但含 $x_ix_j\,(i\neq j)$

① 作非退化线性替换 $\begin{cases} x_i=y_i+y_j \\ x_j=y_i-y_j \\ \vdots \\ x_k=y_k,k\neq i,j \end{cases}$，则 f 构造出平方项；

② 重复情形 1 的步骤配方即可。

3) 特点

(1) 优点：原理直观，操作简单易懂，无需矩阵特征值与特征向量计算，特别适用于低阶(2、3 阶)二次型。

(2) 缺点：所得线性替换及标准形系数不唯一，依赖于配方顺序；对于高阶二次型，过程繁琐且变换不具备几何保形性。

(二) 合同变换法

1) 原理

基于矩阵合同的定义：如果存在数域 P 上的 n 阶可逆矩阵 C，使 $D=C^{\mathrm{T}}AC$，则称 A 与 D 合同。由矩阵 A 到矩阵 D 的变换称为矩阵的一个合同变换[2]。

2) 化简步骤

根据合同变换的原理，给出合同变换化二次型为标准形的基本步骤(见图 2)。

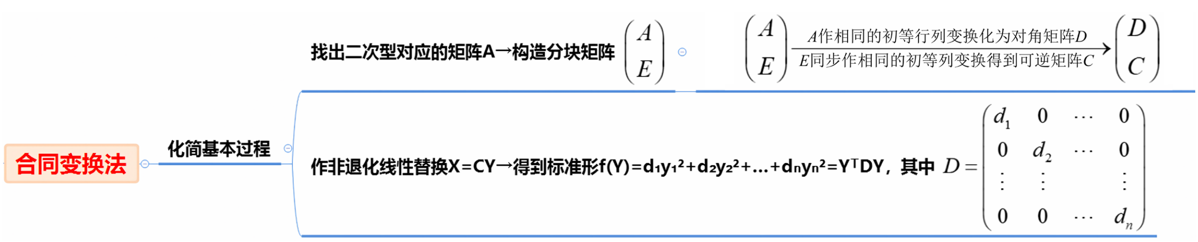

Figure 2. Process of contractive transformation
图 2. 合同变换法过程图

(1) 找到二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对应的对称矩阵 A；

(2) 构造分块矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$；

(3) 作合同变换 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow[E\text{ 同步作相同的初等列变换得到可逆矩阵 }C]{A\text{ 作相同的初等行/列变换化为对角矩阵 }D} \begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix}$，其中 $D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$；

(4) 作非退化线性替换 $X=CY$，二次型化为标准形 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$。

3) 特点

(1) 优点：步骤固定、便捷，适合处理高阶($n\geq3$)二次型；可同步得到非退化矩阵 C 与对角矩阵 D，无需额外推导。

(2) 缺点：初等变换过程中易出错，需熟练掌握矩阵初等变换；标准形系数依赖于变换顺序和计算习惯，不唯一。

(三) 正交变换法

1) 原理

对于实二次型，其对应的矩阵 A 为实对称矩阵，利用其性质：对于任意一个 n 阶实对称矩阵 A，都存在一个 n 阶正交矩阵 T，使 $T^{\mathrm{T}}AT=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$，其中 λ_i 为 A 的特征值，T 的列向量为对应的正交单位特征向量。

2) 步骤

根据正交变换的原理，给出正交变换化二次型为标准形的基本步骤(见图 3)。

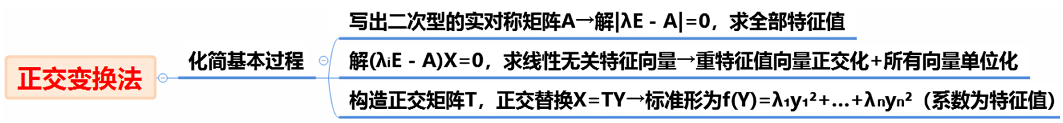

Figure 3. Process of orthogonal transformation
图 3. 正交变换法过程图

(1) 找到实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对应的实对称矩阵 A；

(2) 求解特征方程 $|\lambda E-A|=0$，得全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；

(3) 对每个不同的特征值 λ_i，求解齐次线性方程组 $(\lambda_iE-A)X=0$，求得对应的线性无关特征向量；

(4) 若特征值为重根，对其对应的线性无关特征向量进行施密特正交化；

(5) 将所有正交特征向量进行单位化，得到标准正交向量组 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$；

(6) 以上述标准正交向量组 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 为列，令正交矩阵 $T=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$；

(7) 作正交线性替换 $X=TY$，二次型化为标准形 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$。

3) 特点

(1) 优点：① 正交变换保持几何形状不变，如保持距离、角度不变，是几何应用的首选；② 标准形系数由特征值唯一确定(不计顺序)；③ 可直接根据特征值的符号判断二次型的正定性和负定性。

(2) 缺点：计算复杂度较高，需求解特征方程、特征向量，并进行正交化与单位化，考验学习者的计算能力；**主要适用于实二次型**。

(四) 惯性定理

定理 1 [3] 设有 n 元实二次型 $f=X^{\mathrm{T}}AX$，则存在可逆线性变换 $X=C_1Y$，$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 及 $X=C_2Z$，$Z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)^{\mathrm{T}}$，使得

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2 \text{ 及 } f=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_k^2-y_{k+1}^2-\cdots-y_r^2,$$

则 $p=k$，其中 r 为实对称矩阵 A 的秩。即实二次型的标准形中正/负平方项个数是唯一的[4]。

3. 基于思维导图的系统化归纳与对比

根据教学过程中发现的易错点、记忆难点及知识点易混淆等问题，基于思维导图串联二次型化标准形的相关知识及方法步骤，可将数学思维可视化、结构化、系统化。它能帮助学习者构建完整知识体系、强化逻辑理解，从而突破学习难点，提高学习效率。系统整理 3 种常用化二次型为标准形的方法，并做方法比较和适应场景分析。下面从综合对比的宏观层做方法对比分析(见图 4)。

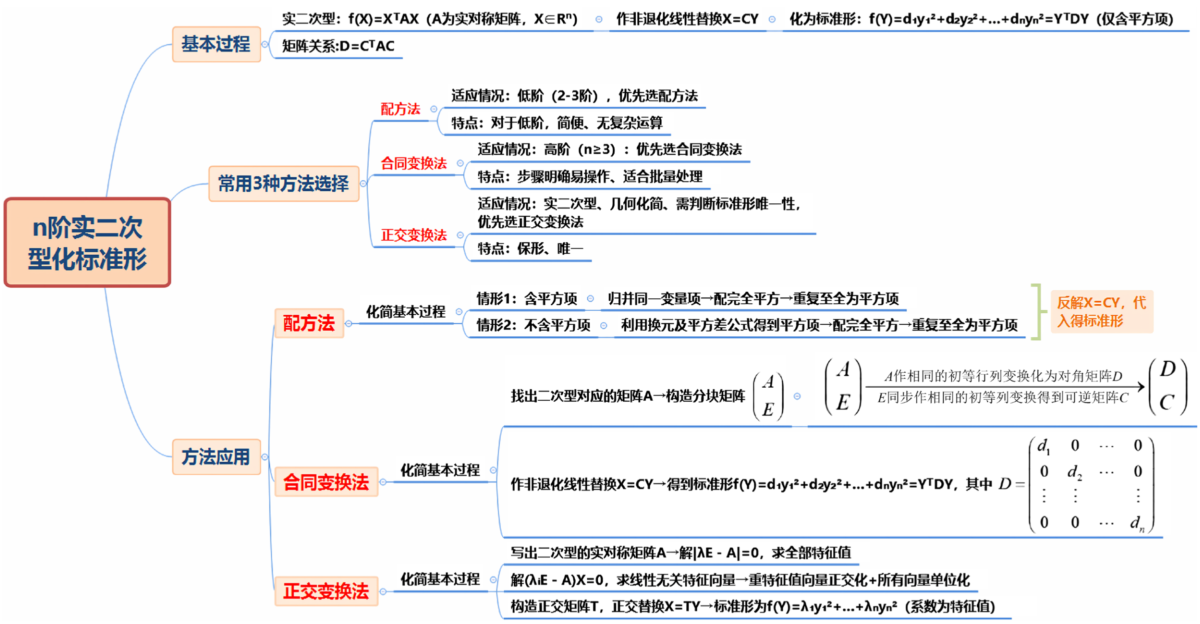

Figure 4. Comparative analysis of three methods for reducing quadratic forms to canonical forms
图 4. 3 种方法化二次型为标准形对比分析图

4. 利用 3 种方法化二次型为标准形

基于以上对 3 种化二次型为标准形方法的讨论及总结，下面给出实际的案例进行一题多解，并做对比分析。

化简二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 为标准形。

解：下面利用 3 种方法化二次型为标准形。

解法 1 配方法

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3\\&=(x_1-2x_2)^2-2x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3\ ,\\&=(x_1-2x_2)^2-2(x_2+x_3)^2+5x_3^2\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1-2x_2\\y_2=x_2+x_3\\y_3=x_3\end{cases}$，则做非退化线性替换 $\begin{cases}x_1=y_1+2y_2-2y_3\\x_2=y_2-y_3\\x_3=y_3\end{cases}$，使得二次型化为标准形为 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-2y_2^2+5y_3^2$。

解法 2 合同变换法

二次型所对应的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$，对矩阵$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}$施以合同变换，即

$$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2+2c_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&3\\1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_3-c_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&5\\1&2&-2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D\\C\end{pmatrix},$$

$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$为对角矩阵，则作非退化线性替换$X=CY$，其中$C=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$，使得二次型化为标准形为$f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-2y_2^2+5y_3^2$。

解法3 正交变换法

二次型所对应的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$，令$|\lambda E-A|=0$，解得特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=5$，$\lambda_3=-1$，求得对应的特征向量分别为

$$\alpha_1=(2,-1,-2)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,-2,2)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(2,2,1)^{\mathrm{T}},$$

对向量进行单位化得

$$\beta_1=\left(\frac{2}{3},\frac{-1}{3},\frac{-2}{3}\right)^{\mathrm{T}},\beta_2=\left(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}},\beta_3=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}},$$

故作正交变换$X=TY$，其中$T=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，使得二次型化为标准形为$f(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2+5y_2^2-y_3^2$。

小结：本题的二次型为3元二次型，3种方法均适用。由于化简方法不一样，得出的标准形可能不一样，但是由惯性定理可知惯性指数唯一。在计算过程中发现，由于阶数较低，配方法和合同变换法均较为简单直接，正交变换法由于需要计算特征值与特征向量，计算相对繁琐。因此，在实际化简过程中，如果没有保形的需求，建议使用配方法或合同变换法。

例2. 考虑如下四维空间中的二次超曲面方程：$2x_1x_2+2x_3x_4=1$，判断其几何类型。

解：需先将二次型化为标准形，再根据标准形的惯性指数确定曲面类别。接下来化简二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_3x_4$为标准形。

解法1 配方法

令$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3+y_4\\x_4=y_3-y_4\end{cases}$，则
$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3,x_4)&=2x_1x_2+2x_3x_4\\&=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+2(y_3+y_4)(y_3-y_4)\\&=2y_1^2-2y_2^2+2y_3^2-2y_4^2\end{aligned}$$
，即经过非退化线性替换

$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 + y_4 \\ x_4 = y_3 - y_4 \end{cases}$，二次型化标准形为 $2y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_4^2$。

解法 2 合同变换法

二次型所对应的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，对矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$ 施以合同变换，即

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_1+c_2]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2-\frac{1}{2}c_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+c_4]{r_3+r_4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4-\frac{1}{2}c_3]{r_4-\frac{1}{2}r_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2c_2 \\ 2c_4}]{\substack{2r_2 \\ 2r_4}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix},$$

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 为对角矩阵，则作非退化线性替换 $X = CY$，其中 $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，使得二次型化为标准形 $f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_4^2$。

解法 3 正交变换法

二次型所对应的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，令 $|\lambda E - A| = 0$，解得特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = \lambda_4 = -1$，

求得 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 对应的线性无关特征向量为

$$\alpha_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}，\quad \alpha_2=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}，\text{且}(\alpha_1,\alpha_2)=0，$$

$\lambda_3=\lambda_4=-1$ 对应的线性无关特征向量为

$$\alpha_3=(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}，\quad \alpha_4=(0,0,1,-1)^{\mathrm{T}}，\text{且}(\alpha_3,\alpha_4)=0。$$

对向量组进行单位化得

$$\beta_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)^{\mathrm{T}},\beta_2=\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},\beta_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0,0\right)^{\mathrm{T}},\beta_4=\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

故作正交变换 $X=TY$，其中 $T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，使得二次型化为标准形

$f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$。

因此得到该二次型的正惯性指数为 2，负惯性指数为 2。在四维空间中，这是一个双曲型超曲面。

小结：由于本题是通过化二次型为标准形判断图形的性质，因此选择合同变换法最严谨。3 种化简方法得出的标准形不一样，但是由惯性定理可知惯性指数唯一。二次型只含交叉项，利用配方法前需要先换元凑平方，因此发现配方法看起来简单但依赖技巧。合同变换法规范但计算过程矩阵元素较多易错，计算过程注意确认好每一步。正交变换法虽然计算量最大，但是具有保持形状不变的性质。对于判断形状最合适。实际应用时，应根据问题规模、对变换性质的要求以及是否需利用特征值信息，选择最合适的方法。

5. 3 种方法对比讨论

结合以上方法介绍及案例对比分析，3 种化二次型为标准形的方法各有所长，其所经历的非退化线性替换的矩阵各有特点(见表 1)。虽然化简后得到的标准形可能会不一样，但由惯性定理可知，正/负惯性指数唯一。

Table 1. Similarities and differences of three methods for reducing quadratic forms to canonical forms
表 1. 3 种化二次型为标准形方法异同点

方法	简便性	变换矩阵	矩阵性质	几何意义
配方法	★★★★★最简	C	可逆矩阵	仿射变换，如拉伸/剪切，不保长、不保角，但保持双曲型本质
合同变换法	★★★☆☆中等	C	可逆矩阵	同上为仿射变换
正交变换法	★★☆☆☆繁琐	T	正交矩阵	刚体旋转/反射，保长、保角，保持几何形状不变

6. 结论与展望

二次型化为标准形的 3 种方法各有侧重：配方法以直观简洁见长，适于低阶问题的快速求解，遇到高阶时更需要技巧；合同变换法步骤固定简洁，低阶、高阶均适用，需要细致计算过程；正交变换法则以几何保形性与结果的唯一性为优势，但是计算繁琐。二次型是几何分析、工程优化及数据分析等领域的关键工具，基于思维导图，归纳二次型化为标准形方法的特点及其本质：均为对称矩阵的合同对角化，在实际应用中应根据问题的阶数、计算精度要求及具体应用场景进行综合选择。同时，在案例分析中采用一题多解。一题多解的探究过程，不仅培养了学生的发散思维与创新意识，更彰显了“多元统一”的辩证统一思想[5]，蕴含了深刻的课程思政内涵。

基金项目

2025 年广西高等教育本科教学改革工程项目“高等代数课程与思政元素的有机融合与创新教学实践”(项目编号 2025JGB519)；

桂林学院 2024 年校级课程思政专项教改项目“高等代数课程与思政元素的融合与实践”。

参考文献

[1] 韩建邦. 二次型化标准形的方法探究[J]. 科技风, 2024(16): 157-159.

[2] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数(第六版) [M]. 高等教育出版社, 2025.

[3] 杜美华, 高发玲. 惯性定理的几何意义[J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 2020, 36(2): 7-10.

[4] 时彬彬, 李仁所, 沈有建. 关于实对称矩阵惯性定理的新证明[J]. 海南师范大学学报: 自然科学版, 2012, 25(1): 26-27.

[5] 杜妮, 阮诗佺, 林鹭. 高等代数课程思政探索与实践[J]. 大学数学, 2025, 41(3): 17-20.