Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(5), 66-70
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.165131

Hans汉斯

关于循环群的一些注记

付雪荣，张永达，秦美青

菏泽学院数学与统计学院，山东 菏泽

收稿日期：2026年4月2日；录用日期：2026年5月8日；发布日期：2026年5月25日

摘　要

循环群是群论中结构最简且性质明确的群类，其“存在生成元”的特征决定了阶与结构的强对应性。然而，$n!$阶群的结构并非唯一，对称群S_n作为典型的$n!$阶群，当$n \geq 3$时不具备循环群的特征。本文以群的阶、生成元与元素阶的关系为核心，通过证明$n!$阶对称群$S_n(n \geq 3)$的非交换性，说明“当$n \geq 3$时，$n!$阶对称群S_n不是循环群”，并进一步揭示群的阶与结构之间的非一一对应关系。为有限群的分类与结构研究提供基础参考。

关键词

循环群，对称群，群的阶，生成元，元素阶

Some Remarks on Cyclic Groups

Xuerong Fu, Yongda Zhang, Meiqing Qin

School of Mathematics and Statistics, Heze University, Heze Shandong

Received: April 2, 2026; accepted: May 8, 2026; published: May 25, 2026

Abstract

Cyclic groups are the simplest and most clearly defined group category in group theory. Their characteristic of having a “existence of generator” determines a strong correspondence between order and structure. However, the structure of groups of order $n!$ is not unique. The symmetric group S_n, as a typical group of order $n!$, does not possess the characteristics of a cyclic group when $n \geq 3$. This paper focuses on the relationship between the order of a group, the generators, and the order of elements. By proving the non-commutativity of $n!$ order symmetric groups $S_n(n \geq 3)$, it demonstrates that “at that time, $n!$ order symmetric groups S_n are not cyclic groups”, and further reveals the non-one-to-one correspondence between the order and the structure of groups. This provides a basic reference for the classification and structure study of finite groups.

文章引用: 付雪荣, 张永达, 秦美青. 关于循环群的一些注记[J]. 理论数学, 2026, 16(5): 66-70.
DOI: 10.12677/pm.2026.165131

Keywords

Cyclic Group, Symmetric Group, Order of a Group, Generator, Order of an Element

1. 引言

群论作为现代数学的核心分支之一，其研究对象是具有特定运算规则的代数结构，而循环群则是群论体系中最基础且最具代表性的研究模型。循环群的定义简洁而深刻：若一个群中存在单一生成元，使得群中所有元素均可表示为该生成元的幂次，则称该群为循环群，记为$\langle a\rangle$。循环群的核心性质在于其“阶唯一决定结构”，故同阶的循环群必然同构，这一特性让循环群在有限群的分类与结构研究中占据着基石地位，也成为初学者理解群论基本概念的重要切入点。

循环群的核心性质在于其“阶唯一决定结构”——同阶的循环群必然同构，这一特性让循环群在有限群的分类与结构研究中占据着基石地位，也成为初学者理解群论基本概念的重要切入点。然而，在群论的教学与研究实践中，我们发现一个关键的认知误区：许多学生容易将循环群的“阶与结构对应”特性推广到所有有限群，忽略了一般有限群的复杂性，即同一阶数的群可能具有完全不同的代数结构。对称群S_n作为$n!$阶群的典型代表，可以打破这一认知误区。对称群是刻画有限集合置换规律的核心数学对象，其元素为集合的双射变换，运算为置换的复合，在置换群理论、伽罗瓦理论、组合数学乃至密码学等领域都有着广泛且关键的应用。在教学过程中，笔者观察到学生对对称群的理解常常停留在“阶数为$n!$”的表面认知，未能深入把握其与循环群的本质差异。这种认知不足不仅会影响学生对群论后续内容的学习，也会限制其在相关学科中的应用能力。因此，系统探究对称群S_n的非循环性，不仅能理清循环群与对称群的结构边界，帮助学生深化对群论基本概念的理解，更能为群论教学提供清晰的逻辑框架与教学素材，丰富有限群结构的基础研究。

本文是在讲授文献[1]第三章第一节例题 3 的过程中，通过理论推导与实例验证结合的方式，证明当$n\ge 3$时，S_n是非交换的，并进一步分析其非循环性的本质。

2. S_n 的非循环性

2.1. 循环群与对称群

根据文献[2]知，有限集合$X=\{1,2,\cdots,n\}$到自身的双射变换称为置换。X上全体置换关于置换复合构成的群是阶为$n!$的对称群，记为S_n。

定义 1 [2] 设G是一个群，若存在$a\in G$，使得$G=\{a^k \mid k\in Z\}$，则称G为循环群，记为$G=\langle a\rangle$，a为生成元。

定义 2 [3] 设G是一个群，e是其单位元。对于任意元素$a\in G$，如果存在最小正整数n，使得$a^n=e$，则称a的阶为n，记作$o(a)=n$。否则，称a为无限阶元素，记作$o(a)=\infty$。

性质 1 [4] (1) 循环群一定是交换群。

(2) 有限循环群都与模n剩余类加群同构。

(3) 无限循环群都与整数加群同构。

(4) 无限循环群生成元仅 a， a^{-1}。

(5) n 阶循环群生成元有 $\varphi(n)$ 个，其中 $\varphi(n)$ 为欧拉函数。

(6) 循环群的子群仍为循环群。

(7) 4 阶群 G 若不是循环群，则一定与克莱因四元群同构。

为方便主要结果证明，下面给出文献[1]的第三章第一节的例题 3 作为本文的引理。

引理 1 若群 G 的每个元素都满足 $x^2=e$，则 G 一定为交换群。

证明 任取两个元素 $a,b\in G$，则 $(ab)^2=e$，即 $(ab)^2=(ab)(ab)=abab=e$。对等式 $abab=e$ 左右两边分别左乘 a 右乘 b，有

$$a(abab)b=aeb,$$

$$(a^2)ba(b^2)=ab,$$

$$ebae=ba=ab.$$

故群 G 一定为交换群。

引理 2 设 6 阶群 G 不是循环群。证明：$G\cong S_3$。

证明 因为 G 不是循环群，故 G 没有 6 阶元。从而由拉格朗日定理知，G 一定有 2 阶元或者 3 阶元。

除 e 外 G 中元素不能都是 2 阶元：否则，由引理 1 知，G 为交换群，则在 G 中任取互异的 2 阶元 a,b，则易知 $N=\{e,a,b,ab\}\le G$。这与拉格朗日定理矛盾。且除 e 外 G 中元素不能都是 3 阶元：否则，在 G 中可取 3 阶元 a,b，则 G 有子群 $H=\{e,a,a^2\}$， $K=\{e,b,b^2\}$，其中 $b\notin H$，且 $H\cap K=\{e\}$。于是

$$|HK|=\frac{|H||K|}{|H\cap K|}=9.$$

这与 $|G|=6$ 矛盾。

因此，G 必有 2 阶元 a 和 3 阶元 b。由此可知， $G=\{e,a,b,b^2,ab,ab^2\}$，且

$$\varphi:e\to(1),\ a\to(12),\ b\to(123),\ ab\to(23),\ b^2\to(132),\ ab^2\to(13)$$

是 G 到对称群 S_3 的一个同构映射，故 $G\cong S_3$。

2.2. 主要结果

定理 1 当 $n\ge3$ 时， n 次对称群 S_n 为非交换群。

证明 当 $n=3$ 时，3 次对称群 S_3 中的元素有：(1)、(12)、(13)、(23)、(123)、(132)。取元素(12)、(13)，计算有：

$$(12)(13)=(132)\ne(13)(12)=(123).$$

因此，当 $n=3$ 时，3 次对称群 S_3 非交换。

对于任意 $n\ge3$， n 次对称群 S_n 都包含一个与 S_3 同构的子群，故 S_n 也必为非交换群。

定理 2 $n!$ 阶的循环群，其生成元的阶为 $n!$。

证明 若 G 是 $n!$ 阶循环群，则一定存在元素 $a\in G$，使得

$$G=\{a^0,a^1,a^2,a^3,\cdots,a^{n!-1}\}.$$

根据元素阶的定义，元素 a 的阶是满足 $a^k=e$ 的最小正整数 k。因为 G 中恰有 $n!$ 个互不相同的元素，故由定义 2 知，满足 $a^k=e$ 的最小正整数必为 $n!$，即生成元 a 的阶等于群的阶。

注记 1 在 n 次对称群 S_n 中不存在阶为 $n!$ 的元素。

以 S_4 为例，$|S_4| = 24$，但 S_4 中的元素的最大阶仅为 4。

注记 2 由性质 1 (1)和定理 1，或定理 2 与注记 1 易知，n 次对称群 S_n 不是循环群。

注记 3 存在一个 $n!$ 阶非循环群 G，使得 $G \cong S_n$。

当 $n = 3$ 时，由引理 2 知，结论显然成立。

当 $n \ge 4$ 时，$n!$ 对称群 S_n 包含至少 3 个及以上的元素。取任意两个不相交的对换 $\sigma = (12)$，$\tau = (34)$，且满足 $\sigma\tau = \tau\sigma$ 。但若取对换 $\sigma = (12)$，$\tau = (134)$，则

$$\sigma\tau = (12)(134) = (1342),\ \tau\sigma = (134)(12) = (1234).$$

即 S_n 中一定存在不交换的元素，不满足循环群的交换性。

不妨假设 S_n 是循环群，则存在单一元素 a，使得 $S_n = \langle a \rangle$。但 S_n 中包含不同阶数的元素，比如对换，3-循环，4-循环等，而生成元 a 的阶为 $n!$，其幂次只能生成阶数为 $n!$ 约数的元素，无法覆盖所有不同阶数的元素，因此假设不成立，S_n 不是循环群。

3. 基于学情，展开教学实践

针对笔者学校为地方本科院校，学生数学基础偏弱、抽象概念接受慢、知识碎片化严重的学情，本节结合本文核心结论，融入课程知识图谱构建开展分层教学设计，实现理论成果与课堂教学的深度融合。

教学开篇阶段，依托课程知识图谱搭建基础框架：先在图谱主节点标注循环群、对称群核心定义，延伸子节点补充生成元、交换性、群阶、同构等前置关联知识点，帮助基础薄弱学生快速理清概念从属关系，告别零散记忆，建立结构化认知起点。随后放缓节奏，结合图谱逐点回顾概念，降低抽象入门难度，适配学生认知水平。

定理讲授环节，将本文两个引理与核心定理嵌入知识图谱逻辑链：以“循环群判定条件”为图谱前置节点，在核心定理的证明推导环节，首先清晰呈现循环群的核心性质：交换性、存在阶等于群阶的生成元、元素阶均整除群阶；同时同步关联前置知识点，在图谱中对应呈现 n 次对称群 S_n 的核心性质，明确标注其非交换性、元素最大阶远小于群阶 $n!$ 的特点，通过两类群在交换性和元素阶的性质对比中，凸显二者的本质区别。在此基础上串联引理推导过程，逐步延伸推导出当 $n \ge 3$ 时，对称群 S_n 非交换的核心结论，并在图谱分支标注该结论的本质成因，同时增补拓展节点，说明存在 n 阶非循环群与 n 次对称群同构。学生可顺着知识图谱的逻辑脉络直观理清推理思路，借助两类群的性质差异理解本节课的核心结论。

课后巩固与能力提升阶段，依托完善后的知识图谱引导学生自主复盘：让学生对照图谱自查概念关联、定理适用范围与结构差异；教师基于图谱设计分层基础习题，只用小阶数对称群实例验证非循环性，规避复杂抽象推演。通过知识图谱贯穿课前铺垫、课中推导、课后复盘全流程，既贴合地方本科学生基础薄弱的学情，又帮助学生学会结构化学习方法，夯实群论基础，真正实现理论研究结论向课堂教学的落地应用。

4. 结束语

基于山东省一流本科课程建设要求、2025 年度代数类一流本科课程建设研讨会报告启发，以及笔者对近世代数课程近年来积累的教学研究与教学反思，本文针对 6 阶非循环群与 3 次对称群同构进行了探讨与研究，得到存在 $n!$ 阶非循环群与 n 次对称群同构，并基于笔者学校学情，分析了本节从理论到教学实践过程。课程建设永无止境，需要每一教学周期进行不断丰富发展、补充完善、更新创造。衷心感谢审稿专家对本文提出的宝贵修改意见。

基金项目

第三批山东省一流本科课程建设课题；2024 年菏泽学院教学改革研究一般项目(JG202425/JG202435)。

参考文献

[1] 杨子胥. 近世代数(第四版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2020.

[2] 冯克勤, 李尚志, 章璞. 近世代数引论(第 4 版) [M]. 中国科学技术大学出版社, 2009.

[3] Grillet, P.A. (2011) Abstract Algebra. Springer.

[4] 刘绍学. 近世代数基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.