Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(6), 13-17
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.166151

Hans汉斯

度量、范数和内积定义的最简形式

冯育强，周吉良

武汉科技大学数学与系统科学学院，湖北 武汉

收稿日期：2026年4月8日；录用日期：2026年5月14日；发布日期：2026年6月15日

摘 要

简约是数学美的重要体现。在数学领域，度量、范数和内积等概念的一些简化定义早已为学界所知，这些定义在保持数学概念完整性与严谨性的前提下，通过去除冗余条件、优化表述方式，实现了更为简洁、直观的呈现。本文的贡献在于，对这些已知的最简形式定义进行系统性整理，深入剖析其内在逻辑与数学本质，并着重探讨它们在泛函分析教学中的具体应用价值，旨在为提升泛函分析的教学质量、培养学生的数学思维提供有益参考。

关键词

泛函分析，度量，范数，内积，最简形式

The Simplest Forms of Definitions for Metrics, Norms, and Inner Products

Yuqiang Feng, Jiliang Zhou

School of Mathematics and Systems Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan Hubei

Received: April 8, 2026; accepted: May 14, 2026; published: June 15, 2026

Abstract

Simplicity is a significant embodiment of mathematical beauty. In the field of mathematics, the simplest form definitions of concepts such as metrics, norms, and inner products have long been known to the academic community. These definitions, while maintaining the integrity and rigor of mathematical concepts, achieve a more concise and intuitive presentation by eliminating redundant conditions and optimizing expressions. The contribution of this paper lies in systematically organizing these well-established simplest form definitions, delving into their underlying logic and mathematical essence, and focusing on exploring their specific application values in the teaching of functional analysis. It aims to provide valuable references for enhancing the teaching quality of functional

文章引用: 冯育强, 周吉良. 度量、范数和内积定义的最简形式[J]. 理论数学, 2026, 16(6): 13-17.
DOI: 10.12677/pm.2026.166151

analysis and cultivating students' mathematical thinking.

Keywords

Functional Analysis, Metric, Norm, Inner Product, Simplest Form

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

本文对部分《泛函分析》教材的内容进行分析，指出度量、范数和内积等基本概念的定义可进一步简化。为提升数学概念的严谨性及教学的清晰度，本文系统性地整理这些知识，并探讨其在泛函分析教学中的应用价值，旨在帮助学生更清晰地理解并掌握泛函分析的核心内容，同时领略数学概念的简洁之美。

本文所指的“最简形式”定义，是指在保持数学概念完整性和严谨性的前提下，通过去除冗余条件或优化表述方式，使得定义更加简洁、易于理解和教学的形式。

2. 度量定义的最简形式

首先，我们回顾一下度量的定义(见参考文献[1]-[5])。

定义 2.1 非空集 X 上度量是一个函数 $d: X\times X\to\mathbb{R}$，对所有 $x, y, z\in X$，该函数满足以下性质：

1) 非负性：$d(x, y)\geq 0$；

2) 确定性：$d(x, y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

3) 对称性：$d(x, y)=d(y, x)$；

4) 三角不等式：$d(x, y)\leq d(x, z)+d(z, y)$。

定义了度量的集合称为一个度量空间。

我们直接给出度量定义的以下最简表述形式。

定义 2.2 非空集 X 上度量是一个函数 $d: X\times X\to\mathbb{R}$，对所有 $x, y, z\in X$，该函数满足以下性质：

1) 确定性：$d(x, y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

2) 三角不等式：$d(x, y)\leq d(x, z)+d(y, z)$。

定义了度量的集合称为一个度量空间。

接下来，我们将证明这两个定义是等价的。

证明： 不难看出，定义 2.1 蕴含着定义 2.2。我们现在继续证明定义 2.2 也蕴含着定义 2.1。

事实上，对所有的 $x, y, z\in X$，当定义 2.2 中的三角不等式成立时，即

$$d(x, y)\leq d(x, z)+d(y,z)$$

取 $z=x$，由确定性性质有

$$d(x, y)\leq d(x,x)+d(y,x)=d(y,x)$$

再令 $z=y$，我们可以得到

$$d(y,x)\leq d(y, y)+d(x,y)=d(x,y)$$

综上，我们可知定义 2.1 中的对称性成立，即对于所有 $x, y \in X$，

$$d(x, y) = d(y, x)$$

并且定义 2.1 中的三角不等式成立，即对于所有 $x, y, z \in X$，

$$d(x, y) \le d(x, z) + d(y, z) = d(x, z) + d(z, y)$$

此外，对所有 $x, y \in X$，根据三角不等式，可得出如下结论：

$$0 = d(x, x) \le d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y)$$

即知 $d(x, y) \ge 0$，这意味着定义 2.1 中的非负性成立。

3. 范数定义的最简形式

在几乎所有泛函分析教材(例如文献[1]-[6])中，范数的定义均表述如下：

定义 3.1 设 V 为数域 K 上的向量空间，范数是一个映射 $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$，其对所有 $v, w \in V$ 及 $\alpha \in K$ 满足以下性质：

1) 非负性：$\|v\| \ge 0$；
2) 确定性：$\|v\| = 0$ 当且仅当 $v = 0$；
3) 绝对齐次性：$\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$；
4) 三角不等式：$\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$。

赋予范数的向量空间称为赋范线性空间。

我们给出范数定义的最简表述形式如下。

定义 3.2 设 V 为数域 K 上的向量空间，范数是一个映射 $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$，其对所有 $v, w \in V$ 及 $\alpha \in K$ 满足以下性质：

1) 确定性：$\|v\| = 0$ 当且仅当 $v = 0$；
2) 绝对齐次性：$\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$；
3) 三角不等式：$\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$。

赋予范数的向量空间称为赋范线性空间。

接下来，我们来说明这两个定义是等价的。

证明：在已知定义 3.2 的前提下，我们仅需验证定义 3.1 中的非负性是否成立。事实上，对于任意的 $v \in V$，由确定性、绝对齐次性与三角不等式，我们可以得到

$$0 = \|0\| = \|v + (-v)\| \le \|v\| + \|-v\| = 2\|v\|$$

这表明 $\|v\| \ge 0$，$\forall v \in V$，即定义 3.1 中的非负性成立。

4. 内积定义的最简形式

在一些泛函分析教材(参见参考文献[1] [2])中，线性空间上的内积定义如下：

定义 4.1 设 V 为数域 K 上的向量空间。如果一个二元函数 $(\cdot,\cdot): V \times V \to K$ 对所有 $x, y, z \in V$ 及 $\alpha, \beta \in K$，满足以下性质：

1) 第一变元线性性质：$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$；
2) 第二变元共轭线性：$(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z)$；
3) 共轭对称性：$(x, y) = \overline{(y, x)}$；
4) 正定性：$(x, x) \ge 0$，且 $(x, x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$。

则称 $(\cdot,\cdot)$ 为线性空间 V 上的内积，并称 $(V,(\cdot,\cdot))$ 为一个内积空间。

注记 4.1 当 $K=\mathbb{R}$ 时，性质 3)称为对称性，即 $(x,y)=(y,x)$。

注记 4.2 在这个定义中，容易验证性质 1)、3)蕴含性质 2)。

事实上，对所有 $x,y,z\in V$ 以及 $\alpha,\beta\in K$ 我们由性质 1)、3)可以得到

$$(x,\alpha y+\beta z)=\overline{(\alpha y+\beta z,x)}=\overline{\alpha(y,x)+\beta(z,x)}=\bar{\alpha}\overline{(y,x)}+\bar{\beta}\overline{(z,x)}=\bar{\alpha}(x,y)+\bar{\beta}(x,z)$$

即性质 2)成立。于是内积的定义可以简化为以下形式。

定义 4.2 设 V 为数域 K 上的向量空间。如果一个二元函数 $(\cdot,\cdot):V\times V\to K$ 对所有 $x,y,z\in V$，$\alpha,\beta\in K$ 满足以下性质：

1) 第一变元线性性质：$(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$；
2) 共轭对称性：$(x,y)=\overline{(y,x)}$；
3) 正定性：$(x,x)\ge 0$，$(x,x)=0$ 当且仅当 $x=0$。

则称 $(\cdot,\cdot)$ 为线性空间 V 上的内积，并称 $(V,(\cdot,\cdot))$ 为一个内积空间。

绝大多数泛函分析教材均采用上述形式来定义内积。有趣的是，当 $K=\mathbb{C}$（复数域)时，内积存在另一种更简洁的表述形式。

定义 4.3 设 V 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的向量空间。如果一个二元函数 $(\cdot,\cdot):V\times V\to K$ 对所有 $x,y,z\in V$ 及 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$，满足以下性质：

1) 第一变元线性性质：$(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$；
2) 第二变元共轭线性：$(x,\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}(x,y)+\bar{\beta}(x,z)$；
3) 正定性：$(x,x)\ge 0$，$(x,x)=0$ 当且仅当 $x=0$；

则称 $(\cdot,\cdot)$ 为线性空间 V 上的内积，并称 $(V,(\cdot,\cdot))$ 为一个内积空间。

证明： 我们仅需验证定义 4.1 中的共轭对称性成立。事实上，由正定性性质 3)，对所有 $x,y\in V$，

$$(x+y,x+y)\ge 0$$

即 $(x+y,x+y)$ 为实数，这说明

$$(x+y,x+y)=\overline{(x+y,x+y)}$$

展开上式可以得到

$$(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)=\overline{(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)}$$

注意到 $(x,x)\ge 0$，$(y,y)\ge 0$，我们有

$$(x,y)+(y,x)=\overline{(x,y)}+\overline{(y,x)} \tag{1}$$

以 iy 代替 y，得到

$$(x,iy)+(iy,x)=\overline{(x,iy)}+\overline{(iy,x)}$$

给上式两边同乘以 i，有下式成立

$$(x,y)-(y,x)=-\overline{(x,y)}+\overline{(y,x)} \tag{2}$$

(1)、(2)两式相加得到

$$2(x,y)=2\overline{(y,x)}$$

于是知 $(x,y)=\overline{(y,x)}$，即定义 4.1 中的共轭对称性成立。

注记 4.3 必须指出的是 $K=\mathbb{R}$ 时，如果一个二元函数 $(\cdot,\cdot): V\times V\to\mathbb{R}$ 对所有 $x, y, z\in V$ 及 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，满足以下性质：

1) 第一变元线性性质：$(\alpha x+\beta y, z)=\alpha(x, z)+\beta(y, z)$；
2) 第二变元线性性质：$(x, \alpha y+\beta z)=\alpha(x, y)+\beta(x, z)$；
3) 正定性：$(x, x)\ge 0$，$(x, x)=0$ 当且仅当 $x=0$。

那么 $(\cdot,\cdot)$ 不一定是 V 上的内积。

例如，取 $V=\mathbb{R}^2$，$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 对所有 $x, y\in V$，定义

$$(x,y)=x^{\mathrm{T}}Ay$$

易验证性质 1)~3)都成立。但当我们取

$$x=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, y=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

就得到

$$(x,y)=x^{\mathrm{T}}Ay=2\ne(y,x)=y^{\mathrm{T}}Ax=1$$

这说明函数不满足对称性，所以此时 $(\cdot,\cdot)$ 不是 V 上的内积。

5. 讨论与总结

尽管度量、范数和内积的最简形式在数学上更为简洁，但传统定义在教学中仍被广泛采用，这主要有以下几方面原因。首先，传统定义往往更直观地反映了这些概念的物理或几何背景，有助于学生形成直观理解。其次，传统定义在历史上形成较早，积累了丰富的教学资源和案例，便于教师参考和学生自学。此外，对于某些特定应用场景，传统定义可能更为直接和方便。

然而，随着数学教育的不断发展和学生数学素养的提升，引入最简形式的公理化定义，做到脉络分明、简捷明了、易教易学，是可以实现的[7]。最简定义有助于培养学生的抽象思维和逻辑推理能力，为后续学习打下坚实基础。

致　谢

本研究受到武汉科技大学《泛函分析》核心课程建设项目资助。

参考文献

[1] Lax, P.D. (2002) Functional Analysis. Wiley-Interscience.

[2] Ciarlet, P.G. (2013) Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[3] Erwin, K. (1989) Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley.

[4] Rudin, W. (1991) Functional Analysis. 2nd Edition, McGraw-Hill Science/Engineering/Math.

[5] 孙炯, 王万义, 赫建文. 泛函分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[6] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义(上册) [M]. 第 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2021.

[7] 张肇炽. 线性代数: 从课程到教学的一些实践与思考[C]//首届大学数学课程报告论坛论文集. 北京: 高等教育出版社, 2005: 126-131.