

“无界圆盘”上 H^∞ 商空间的范数可达性

张馨月

重庆理工大学数学科学学院, 重庆

收稿日期: 2026年4月8日; 录用日期: 2026年5月12日; 发布日期: 2026年5月25日

摘要

交换子提升是算子理论的核心问题, 由Sarason率先提出。其经典工作成功实现了单位圆周上Hardy空间 H^2 的子空间——模型空间上保持范数的交换子提升。借鉴Sarason的方法框架, 证明“无界圆盘”边界 \mathbb{T}_0 上交换子提升的范数保持性, 需要验证 H^∞ 空间的如下性质: 商空间 $H^\infty(\mathbb{T}_0)/\psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0)$ 的每个陪集, 均包含一个在 $H^\infty(\mathbb{T}_0)$ 中范数达到陪集范数的函数。本文首先介绍“无界圆盘”上Hardy空间的基础知识, 随后给出该性质的完整证明。

关键词

无界圆盘, Hardy空间, 陪集范数

The Norm-Attaining Property of the H^∞ Quotient Space over the “Unbounded Disk”

Xinyue Zhang

School of Mathematical Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: April 8, 2026; accepted: May 12, 2026; published: May 25, 2026

Abstract

Commutant lifting is a core problem in operator theory, first proposed by Sarason. His classic work successfully realized the norm-preserving commutant lifting on model spaces, which are subspaces of the Hardy space H^2 over the unit circle. Drawing on Sarason's framework, to prove the norm-preserving property of commutant lifting on the boundary \mathbb{T}_0 of the “unbounded disk”, the following

property of the H^∞ space needs to be verified: every coset in the quotient space $H^\infty(\mathbb{T}_0)/\psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0)$ contains a function whose norm in $H^\infty(\mathbb{T}_0)$ achieves the coset norm. This paper first introduces the preliminaries of Hardy spaces over the “unbounded disk”, and then presents a complete proof of this property.

Keywords

Unbounded Disk, Hardy Space, Coset Norm

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

交换子提升问题是算子理论的核心研究课题之一，它为诸多经典插值问题提供了统一的分析框架。该问题最早于 20 世纪 60 年代由 Sarason [1] 提出，其对交换子提升的处理方式及在 Nevanlinna-Pick 插值中的直接应用，与函数论和算子理论中的若干经典问题紧密关联，相关研究在过去数十年间持续推进。研究者们自然地将交换子提升与插值问题推广至 \mathbb{C}^N ($N \geq 1$) 中一般再生核 Hilbert 空间框架下，更多细节可参见文献[2]-[4]。Sarason 所研究的交换子提升，是定义在单位圆周 \mathbb{T} 上 Hardy 空间 H^2 的子空间(模型空间 K)上的：将 K 中与 $S = PU|_K$ 交换的算子，提升至 $L^2(\mathbb{T}_0)$ 上并保持范数不变，其中 P 是 $L^2(\mathbb{T}_0)$ 到 K 的正交投影， U 是 $L^2(\mathbb{T}_0)$ 上的移位算子。由此引申出一个核心问题：能否借助 Sarason 在单位圆盘上的经典方法框架，证明“无界圆盘”上的交换子提升同样成立？而证明该提升保持范数依赖于 H^∞ 空间的如下性质：商空间 $H^\infty(\mathbb{T}_0)/\psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0)$ 的每个陪集，均包含一个在 $H^\infty(\mathbb{T}_0)$ 中范数达到陪集范数的函数。有界区域算子理论已发展成熟，而“无界圆盘”具有特殊非紧几何结构，其函数空间与算子谱性质尚未完善。同时，无界域模型广泛关联无穷维系统、 H^∞ 控制与物理散射问题，开展相关研究可补充非紧域算子理论，兼具理论价值与应用意义。本文的核心目标，正是证明“无界圆盘”上 H^∞ 空间的这一关键性质。本文结构安排如下：第二节介绍“无界圆盘”上 Hardy 空间的基础知识；第三节给出上述性质的完整证明过程。

2. 预备知识

设 R 为小于 1 的正实数，记复平面 \mathbb{C} 上的单位圆盘为 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ， \mathbb{T} 为复平面 \mathbb{C} 上的单位圆周；记“无界圆盘”为 $\mathbb{D}_0 = \{z \in \mathbb{C} : R < |z|\}$ ，其边界为 $\mathbb{T}_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ 。令 μ_0 表示 \mathbb{T}_0 上的勒贝格测度。对 $1 \leq p < \infty$ ，令 $L^p(\mathbb{T}_0)$ 为 \mathbb{T}_0 上关于勒贝格测度 p 次可积的复值可测函数构成的 Banach 空间，其中范数定义为

$$\|f\|_{p, \mathbb{T}_0} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

空间 $H^p(\mathbb{T}_0)$ 由 $L^p(\mathbb{T}_0)$ 中所有非负向傅里叶系数为零的函数构成。 $H^p(\mathbb{D}_0)$ 由所有在 \mathbb{D}_0 上解析且满足

$$\|f\|_{p, \mathbb{D}_0} = \lim_{r \rightarrow R^+} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

的函数构成。 $L^\infty(\mathbb{T}_0)$ 由 \mathbb{T}_0 上满足

$$\|f\|_{\infty, \mathbb{T}_0} = \operatorname{ess\,sup}_{z \in \mathbb{T}_0} |f(z)| < \infty$$

的复值可测函数组成。 $H^\infty(\mathbb{D}_0)$ 是 \mathbb{D}_0 上所有有界解析函数的集合, 其中

$$\|f\|_{\infty, \mathbb{D}_0} = \sup_{|z| > R} |f(z)|.$$

定义 $H^\infty(\mathbb{T}_0) = H^2(\mathbb{T}_0) \cap L^\infty(\mathbb{T}_0)$ 。设 ψ_0 为一个非常值内函数, 则 $\psi_0 \in H^\infty(\mathbb{T}_0)$, 且在 \mathbb{T}_0 上几乎处处有 $|\psi_0(z)| = 1$ 。根据Fatou定理及其推论[5], $H^2(\mathbb{T}_0)$ 是 $H^2(\mathbb{D}_0)$ 中函数在边界上的径向极限, 而 $H^2(\mathbb{D}_0)$ 是 $H^2(\mathbb{T}_0)$ 在 \mathbb{D}_0 上的解析延拓。 $H^2(\mathbb{D}_0)$ 与 $H^2(\mathbb{T}_0)$ 之间存在对应关系, 因此二者并无本质区别。对于“无界圆盘” \mathbb{D}_0 的情形, 也可得到类似的结果。

定义 2.1 对于 $p=1, 2, \infty$, 我们定义Hardy空间 $H_0^p(\mathbb{T}_0)$ 为

$$H_0^p(\mathbb{T}_0) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}_0) : \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) e^{-int} dt = 0, n=1, 2, \dots \right\}.$$

该定义说明空间 $H_0^p(\mathbb{T}_0)$ 由 $L^p(\mathbb{T}_0)$ 中所有正向傅里叶系数为零的函数构成。

定义 2.2 ([6]) 设 X 是(复)线性空间, M 是 X 的子空间。给定 $x \in X$, 其陪集为

$$[x] = x + M = \{x + z : z \in M\}.$$

X 中所有元的陪集做成的集合, 记为商空间 X/M 。

定义 2.3 ([6]) 如果 X 是赋范线性空间, M 是 X 的子空间, 商空间 X/M 也可以赋以范数使之成为赋范线性空间。定义

$$\|[x]\| = \inf \{ \|y\|, \forall y \in [x] \}.$$

引理 2.4 ([7]) 设 m 为集合 X 上子集构成的 δ 代数上的概率测度, 函数 $\varphi \in L^\infty(X)$ 可自然诱导出线性泛函 $\hat{\varphi}$, 即对任意 $f \in L^1(X)$, 有 $\hat{\varphi}(f) = \int_X f \varphi dm$ 。由此建立的映射 $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ 是从 $L^\infty(X)$ 到 $[L^1(X)]^*$ 的等距同构。

定义 2.5 ([6]) 对Banach空间 X , 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*$, $f \in X^*$ 。如果对任意 $x \in X$, 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

则称序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 弱*收敛到 f , 记作 $f_n \xrightarrow{w^*} f$ 。

定义 2.6 ([6]) 设 X 为Banach空间, 点集 $A \subset X^*$ 。如果 A 中任何序列都有弱*收敛的子序列, 则称 A 是弱*列紧的。

定义 2.7 ([8]) 设 X 是Banach空间, M 是 X 的子空间, N 是 X^* 的子空间。 M 和 N 都不是闭的。它们的零化子定义如下:

$$M^0 = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = x^*(x) = 0, \forall x \in M\},$$

$${}^0N = \{x \in X : \langle x, x^* \rangle = x^*(x) = 0, \forall x^* \in N\}.$$

显然 M^0 和 0N 都是向量空间。下面的引理描述了这两种零化子之间的对偶性。

引理 2.8 ([8]) (1) ${}^0(M^0)$ 是 M 在 X 中的范数闭包;

(2) $({}^0N)^0$ 是 N 在 X^* 中的弱*闭包。

定义 2.9 ([9]) 设 $f(x) : (x_0 - a, x_0) \cup (x_0, x_0 + a)$ 为有界函数, $a > 0$ 。对任意 $0 < r < a$, 令

$$g(r) = \sup \{f(x) : 0 < |x - x_0| < r\},$$

$$h(r) = \inf \{f(x) : 0 < |x - x_0| < r\},$$

则 g 在 $(0, a)$ 为单增函数, h 在 $(0, a)$ 为单减函数。于是有

(1) $\lim_{r \rightarrow 0^+} g(r)$ 存在, 记为 $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 或 $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 称为当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 处的上极限。

(2) $\lim_{r \rightarrow 0^+} h(r)$ 存在, 记为 $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 或 $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 称为当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 处的下极限。

定义 2.10 ([9]) 设 $f(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ 。

(1) 如果 $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处上半连续;

(2) 如果 $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处下半连续。

3. $H^\infty(\mathbb{T}_0)/\psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0)$ 的范数可达性

引理 3.1 (Banach-Alaoglu 定理) ([10]) 设 X 为 Banach 空间, 则 X^* 中的闭单位球

$$B_1 = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$$

是弱*紧的。

在实际应用中可以将“闭单位球”推广到“任意闭球”, 本质是因为: 任意闭球和闭单位球之间存在简单的线性变换关系, 而弱*紧性在这种变换下保持不变。下面是 Banach-Alaoglu 定理的推论。

引理 3.2 ([10]) 如果 $f_n \xrightarrow{w^*} f$, 那么 $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$ 。

定理 3.3 商空间 $H^\infty(\mathbb{T}_0)/\psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0)$ 中的每个陪集都包含一个 $H^\infty(\mathbb{T}_0)$ 范数达到陪集范数的函数。

证明 由商空间的定义知, $H^\infty(\mathbb{T}_0)/\psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0)$ 是 $H^\infty(\mathbb{T}_0)$ 中所有元的陪集做成的集合。对任意 $f \in H^\infty(\mathbb{T}_0)$, 其陪集为

$$[f] = f + \psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0) = \{f + \psi_0 h : h \in H^\infty(\mathbb{T}_0)\}.$$

由陪集范数的定义得

$$\|[f]\|_{H^\infty(\mathbb{T}_0)/\psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0)} = \inf_{h \in H^\infty(\mathbb{T}_0)} \|f + \psi_0 h\|_{\mathbb{T}_0, \infty}.$$

首先, 构造“逼近陪集范数”的序列。

设 $\|[f]\|_{H^\infty(\mathbb{T}_0)/\psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0)} = \alpha$ 。根据下确界的定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $f' \in f + \psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0)$, 使得 $\|f'\|_{\mathbb{T}_0, \infty} < \alpha + \varepsilon$ 。这等价于对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$, 存在 $h_n \in H^\infty(\mathbb{T}_0)$, 使得 $f_n = f + \psi_0 h_n$, 满足 $\|f_n\|_{\mathbb{T}_0, \infty} < \alpha + \frac{1}{n}$ 。这样就得到了一个序列 $\{f_n\}$, 其中每个 $f_n \in [f]$ 。且因为当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\alpha + \frac{1}{n} \rightarrow \alpha$, 所以 $\|f_n\|_{\mathbb{T}_0, \infty}$ 越来越接近 α 。

其次, 利用弱*紧性找收敛子序列。

对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$, $\|f_n\|_{\mathbb{T}_0, \infty} < \alpha + 1$, 故 $\{f_n\}$ 满足一致有界性。因此 $\{f_n\}$ 包含在 $H^\infty(\mathbb{T}_0)$ 的闭球

$$B = \{h \in H^\infty(\mathbb{T}_0) : \|h\|_{\mathbb{T}_0, \infty} \leq \alpha + 1\}$$

中。已知 $[L^1(\mathbb{T}_0)/H_0^1(\mathbb{T}_0)]^* = H^\infty(\mathbb{T}_0)$, 再根据引理 3.1 得闭球 B 是弱*紧的。因此, $\{f_n\}$ 存在一个子序列 $\{f_{n_k}\}$, 它弱*收敛到某个函数 $f_0 \in B$ (即 $f_0 \in H^\infty(\mathbb{T}_0)$ 且 $\|f_0\|_{\mathbb{T}_0, \infty} \leq \alpha + 1$)。

接着, 验证 f_0 属于陪集 $[f]$, 也就是说, 证明 $f_0 - f \in \psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0)$ 。

已知 $L^1(\mathbb{T}_0)/H_0^1(\mathbb{T}_0)$ 是 Banach 空间, $[L^1(\mathbb{T}_0)/H_0^1(\mathbb{T}_0)]^* = H^\infty(\mathbb{T}_0)$, 且 $\psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0)$ 是 $H^\infty(\mathbb{T}_0)$ 的子空间, 故

$$\begin{aligned} \text{Ann}_{L^1(\mathbb{T}_0)} \psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0) &= \overline{\psi_0 H_0^1(\mathbb{T}_0)}, \\ \text{Ann}_{L^1(\mathbb{T}_0)/H_0^1(\mathbb{T}_0)} \psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0) &= \overline{\psi_0 H_0^1(\mathbb{T}_0)} / H_0^1(\mathbb{T}_0), \\ \text{Ann}_{H^\infty(\mathbb{T}_0)} \overline{\psi_0 H_0^1(\mathbb{T}_0)} / H_0^1(\mathbb{T}_0) &= \psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0). \end{aligned}$$

因此,

$$\left[{}^0(\psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0)) \right]^0 = \psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0).$$

再由引理 2.7 得, $\left[{}^0(\psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0)) \right]^0$ 是 $\psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0)$ 在 $H^\infty(\mathbb{T}_0)$ 中的弱*闭包, 故 $\psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0)$ 是弱*闭子空间。由 f_{n_k} 得定义得, $f_{n_k} - f = \psi_0 h_{n_k} \in \psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0)$ 。又因为弱*收敛保持线性运算, 所以 $\{f_{n_k} - f\}$ 弱*收敛到 $f_0 - f$ 。因为弱*闭子空间包含其弱*收敛序列的极限, 所以 $f_0 - f \in \psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0)$, 即 $f_0 \in [f]$ 。

最后, 验证 f_0 的范数等于陪集范数 α 。

因为 $f_0 \in [f] = \{f + \psi_0 h : h \in H^\infty(\mathbb{T}_0)\}$ 且 $\alpha = \inf_{h \in H^\infty(\mathbb{T}_0)} \|f + \psi_0 h\|_{\mathbb{T}_0, \infty}$, 所以

$$\|f_0\|_{\mathbb{T}_0, \infty} \geq \alpha.$$

由前面的结果 $f_{n_k} \xrightarrow{w^*} f_0$ 和引理 3.2 得, $\|f_0\|_{\mathbb{T}_0, \infty} \leq \underline{\lim} \|f_{n_k}\|_{\mathbb{T}_0, \infty}$ 。根据下极限的定义有

$\underline{\lim} \|f_{n_k}\|_{\mathbb{T}_0, \infty} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k}\|_{\mathbb{T}_0, \infty}$ 。前面还得出一个结果 $\|f_{n_k}\|_{\mathbb{T}_0, \infty} < \alpha + \frac{1}{n_k}$ 。因为 $\|f_{n_k}\|_{\mathbb{T}_0, \infty}$ 的下确界 $\inf \|f_{n_k}\|_{\mathbb{T}_0, \infty}$ 小于等于其上确 $\alpha + \frac{1}{n_k}$, 所以

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k}\|_{\mathbb{T}_0, \infty} &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha + \frac{1}{n_k} \\ \underline{\lim} \|f_{n_k}\|_{\mathbb{T}_0, \infty} &\leq \alpha \\ \|f_0\|_{\mathbb{T}_0, \infty} &\leq \alpha \end{aligned}$$

因此, $\|f_0\|_{\mathbb{T}_0, \infty} = \alpha$, 即 $\|f_0\|_{\mathbb{T}_0, \infty} = \|[f]\|_{H^\infty(\mathbb{T}_0)/\psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0)}$ 。

综上所述, 存在 $f_0 \in [f]$ 使得 $\|f_0\|_{\mathbb{T}_0, \infty} = \|[f]\|_{H^\infty(\mathbb{T}_0)/\psi_0 H^\infty(\mathbb{T}_0)}$ 。证明已完成。

基金项目

重庆理工大学研究生创新项目资助(校级项目)(gzlxcx20253352)。

参考文献

- [1] Sarason, D. (1967) Generalized Interpolation in H^∞ . *Transactions of the American Mathematical Society*, **127**, 179-203. <https://doi.org/10.2307/1994641>
- [2] Ball, J.A. and Bolotnikov, V. (2017) Contractive Multipliers from Hardy Space to Weighted Hardy Space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **145**, 2411-2425. <https://doi.org/10.1090/proc/13549>
- [3] Eschmeier, J. and Putinar, M. (2002) Spherical Contractions and Interpolation Problems on the Unit Ball. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **542**, 219-236. <https://doi.org/10.1515/crll.2002.007>
- [4] Davidson, K.R. and Le, T. (2010) Commutant Lifting for Commuting Row Contractions. *Bulletin of the London*

Mathematical Society, **42**, 506-516. <https://doi.org/10.1112/blms/bdq01>

- [5] Hoffman, K. (1962) *Banach Spaces of Analytic Functions*. Prentice-Hall Inc.
- [6] 江泽坚, 孙善利. 泛函分析[M]. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2005.
- [7] Douglas, R.G. (1988) *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*. 2nd Edition, Springer.
- [8] 沃尔特·鲁丁. 泛函分析[M]. 刘培德, 译. 北京: 机械工业出版社, 2020.
- [9] 陈玉清, 陈学松. 数学分析[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2024.
- [10] 郭坤宇. 算子理论基础[M]. 第2版. 上海: 复旦大学出版社, 2022.