Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(5), 183-191
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.165142

构造法思想与琴生不等式融合在高中不等式证明中的应用研究

尹天喜

北华大学数学与统计学院，吉林 吉林

收稿日期：2026年4月10日；录用日期：2026年5月12日；发布日期：2026年5月26日

摘 要

琴生不等式是高中数学中证明不等式的重要工具之一，其根据凸函数的核心性质，将复杂的不等式问题转化为较为简单的函数值与平均值的关系问题。而构造法是衔接待证不等式与琴生不等式的关键所在，根据高中不等式的结构特征构造合适的凸函数、权重系数，可快速满足琴生不等式的应用条件。本文以高中数学知识为背景，梳理凸函数、琴生不等式的基础内容，结合典型的高中不等式例题，分析构造法与琴生不等式融合的具体应用方法，总结解题规律，为高中数学中不等式的证明提供更高效思路。

关键词

构造法，琴生不等式，凸函数，高中数学，不等式证明

A Study on the Application of Construction Methods and the Qin-Sheng Inequality in the Proof of High School Inequalities

Tianxi Yin

School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin Jilin

Received: April 10, 2026; accepted: May 12, 2026; published: May 26, 2026

Abstract

The Quines-Schoenberg inequality is one of the key tools for proving inequalities in high school mathematics. Based on the core properties of convex functions, it transforms complex inequality problems into simpler problems involving the relationship between function values and their averages. The construction method is the key to linking the proof of inequalities with the Quines-Schoenberg

文章引用: 尹天喜. 构造法思想与琴生不等式融合在高中不等式证明中的应用研究[J]. 理论数学, 2026, 16(5): 183-191.
DOI: 10.12677/pm.2026.165142

inequality; by constructing appropriate convex functions and weighting coefficients based on the structural characteristics of high school inequalities, one can quickly satisfy the application conditions of the Quines-Schoenberg inequality. Against the backdrop of high school mathematics, this paper reviews the fundamentals of convex functions and the Kinesis inequality. By examining typical high school inequality problems, it analyzes specific application methods that integrate the construction method with the Kinesis inequality, summarizes problem-solving patterns, and provides a more efficient approach to proving inequalities in high school mathematics.

Keywords

Construction Method, Qin-Sheng Inequality, Convex Functions, High School Mathematics, Proof of Inequalities

1. 引言

不等式证明是高中数学中函数、导数、数列等板块的综合考点，题型灵活方法多变，而常规的作差法、作商法、综合法往往需要复杂的代数变形，直接导致解题效率降低。琴生不等式作为凸函数的重要推论，凭借“化繁为简”的特点，成为解决部分不等式证明问题的捷径。但高中阶段的待证不等式很少能直接呈现凸函数的特征，此时构造法思想的融入就变得尤为关键——通过构造符合琴生不等式应用条件的凸函数，将未知的不等式证明转化为已知的定理应用。本文以高中数学知识为基础，避开复杂的泛函分析、积分等内容，聚焦构造法与琴生不等式在离散型不等式证明中的融合应用，为高中数学学习和解题提供更加简捷的方法。

2. 高中数学背景下的预备知识

2.1. 函数的凹凸性

2.1.1. 凸函数的定义

凸函数是不等式证明中最核心的概念之一，其定义分为代数定义与几何定义，二者从抽象形式与直观图像两个维度刻画了凸函数的本质特征。

凸函数的代数定义为设函数 $f(x)$ 定义在区间 $I \subseteq R$ 上，若对任意的 $x_1, x_2 \in I$，以及任意的实数 $\lambda \in [0,1]$，恒有 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为区间 I 上的凸函数(也常称为下凸函数) [1]。

凸函数与严格凸函数也有区别，严格凸函数的定义是若将凸函数不等式中的不等号替换为严格小于号，即对 $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \ne x_2, \forall \lambda \in [0,1]$，有 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为区间 I 上的严格凸函数。在定义中 λ 可理解为加权系数，$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ 表示 x_1 与 x_2 的加权平均，凸函数的核心本质是“加权平均的函数值不超过函数值的加权平均”[1]。

2.1.2. 凹函数的定义

凹函数的定义为对任意的 $x_1, x_2 \in I$，以及任意的实数 $\lambda \in [0,1]$，恒有 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 为区间 I 上的凹函数。严格凹函数的定义则为，对

$\forall x_1,x_2\in I,x_1\neq x_2,\forall\lambda\in[0,1]$，有 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)>\lambda f(x)+(1-\lambda)f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为区间 I 上的严格凹函数[1]。

2.2. 琴生不等式的高中常用形式

琴生不等式在高中阶段仅考查离散型等权形式和简单非等权形式，均基于严格凸函数，核心结论如下：

1. 等权形式(核心) [2]：若 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数，对任意 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in I$，则有：$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$，等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立。而凹函数对应的等权琴生不等式形式为 $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$。

2. 简单非等权形式[3]：若 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数，对任意 $x_1,x_2\in I$，任意 $\lambda_1,\lambda_2>0$ 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$，则有：$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$，等号当且仅当 $x_1=x_2$ 时成立。

而凹函数对应的琴生不等式则为：若 $f(x)$ 为区间上的凹函数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in I,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\geq0$ 且 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，则有 $f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)\geq\sum_{i=1}^{n}\lambda_if(x_i)$，严格凹函数则对应严格大于号。

2.3. 构造法与琴生不等式融合的核心思路

高中阶段，二者融合的核心是“依式构造凸函数”：以待证不等式的结构为导向，通过取对数、恒等变形将不等式转化为琴生不等式的标准形式，进而构造出满足 $f''(x)>0$ 的凸函数，无需复杂的权重和变量构造，贴合高中数学的考查要求。

3. 构造法与琴生不等式融合在高中不等式证明中的具体应用

高中数学中，适合用“构造法 + 琴生不等式”证明的不等式主要为均值不等式类、幂函数类、对数指数类，以下结合典型例题，逐一分析具体解题方法，所有例题均基于高中导数、函数知识。

3.1. 构造凸函数证明均值不等式

均值不等式是高中数学的核心不等式，其常规证明需用数学归纳法，而通过构造凸函数，结合琴生不等式可一步证明，简洁高效。

例 1 证明：对任意正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有 $\sqrt{x_1x_2\cdots x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ (几何平均 ≤ 算术平均)，等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立。

在这里使用两种不同的证明方法，具体如下：

第一种方法：数学归纳法

当 $n=1$ 时，$x_1\geq x_1$，显然成立；

当 $n=2$ 时，由 $\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2\geq0$，展开得 $x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}\geq0$，即 $\frac{x_1+x_2}{2}\geq\sqrt{x_1x_2}$，成立。

假设 $n=2^k$ 时不等式成立，即 $A_{2^k}\geq G_{2^k}$；

对于 $n=2^{k+1}$，将 2^{k+1} 个数分成两组，每组 2^k 个：

$$\frac{x_1+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}=\frac{\frac{x_1+\cdots+x_{2^k}}{2^k}+\frac{x_1+\cdots+x_{2^k+1}}{2^k}}{2}$$

令 $A=\dfrac{x_1+\cdots+x_{2^k}}{2^k}$，$A'=\dfrac{x_{2^k+1}+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^k}$，$G=\sqrt[2^k]{x_1\cdots x_{2^k}}$，$G'=\sqrt[2^k]{x_{2^k+1}+\cdots+x_{2^{k+1}}}$

由均值不等式及假设归纳：

$$\frac{A+A'}{2}\ge\sqrt{AA'}\ge\sqrt{GG'}=\sqrt[2^{K+1}]{x_1\cdots x_{2^{k+1}}}$$

故 $n=2^{k+1}$ 成立。由数学归纳法，对所有 $n=2^m$ 成立。

假设对 $n=k$ 成立，证明对 $n=k-1$ 也成立。

设 $A_{k-1}=\dfrac{x_1+\cdots+x_{k-1}}{k-1}$，取 $x_k=A_{k-1}$

对 k 个数应用归纳假设：

$$\frac{x_1+\cdots+x_{k-1}+A_{k-1}}{k}\ge\sqrt[k]{x_1\cdots x_{k-1}\cdot A_{k-1}}$$

左边简化为 A_{k-1}，故：

$$A_{k-1}\ge\sqrt[k]{G_{k-1}^{k-1}\cdot A_{k-1}}\Rightarrow A_{k-1}^{k}\ge G_{k-1}^{k-1}\cdot A_{k-1}\Rightarrow A_{k-1}\ge G_{k-1}$$

因此，均值不等式对任意正整数 n 成立。

第二种方法：构造函数与琴生不等式结合

分析：待证不等式含“乘积开方”和“算术平均”，取自然对数可将乘积转化为和式，变形为琴生不等式的标准形式，构造凸函数 $f(x)=-\ln x$ （$x>0$，高中可通过求导验证凸性)。

证明：构造函数 $f(x)=-\ln x,(x>0)$，求导得：$f'(x)=-\dfrac{1}{x}$，$f''(x)=\dfrac{1}{x^2}$

由凸函数判定方法，$f(x)=-\ln x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数。

对任意正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，由琴生不等式等权形式得：

$$\sqrt{x_1x_2\cdots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

代入 $f(x)=-\ln x$，得：

$$-\ln\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\le-\frac{\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n}{n}$$

两边同乘−1 (不等号方向改变)，整理得：

$$\ln\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\ge\frac{\ln(x_1x_2\cdots x_n)}{n}=\ln\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

因为 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故：

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立。

数学归纳法核心是利用递推逻辑，适用于理论基础和大学数学中，拥有逻辑严谨、普适性强，适合系统推导。而琴生不等式法则是以函数的凹凸性以及导数为核心，适合在高中竞赛和导数大题中使用，其拥有步骤少、技巧性强，一眼看穿本质的特点。

3.2. 构造凸函数证明幂函数类不等式

幂函数类不等式(含 $x^2,x^3,\sqrt{x}$ 等)是高中数学知识考查重点，此类不等式可直接构造幂函数凸函数，结

合琴生不等式证明，无需复杂变形。

例 2 已知$a,b>0$，且$a+b=1$，求证：$a^2+b^2\ge\frac{1}{2}$。

分析：待证不等式含a^2+b^2，构造凸函数$f(x)=x^2\left(x\in R,f''(x)=2>0\right)$，直接应用琴生不等式等权形式($n=2$)。

证明：构造函数$f(x)=x^2\left(x\in R\right)$，求导得$f''(x)=2>0$，故$f(x)$是$R$上的凸函数。

已知$a,b>0$且$a+b=1$，由琴生不等式等权形式($n=2$)得：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

代入$f(x)=x^2$和$a+b=1$，得：$\left(\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2}$

整理得$a^2+b^2\ge\frac{1}{2}$，等号当且仅当$a=b=\frac{1}{2}$时成立。

拓展：若$a,b,c>0$且$a+b+c=1$，同理可证$a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}$，此结论可推广到$n$个正数的情况，是高中常考的不等式结论。

3.3. 构造凸函数证明对数指数类不等式

对数指数类不等式是高中不等式证明的难点，常规方法需多次求导判断单调性，而构造凸函数结合琴生不等式，可大幅简化步骤，核心是利用$-\ln x,\mathrm{e}^x$等高中常见凸函数。

例 3 已知$x_1,x_2,\cdots,x_n>0$，且$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，求证：$\ln\frac{1}{x_1}+\ln\frac{1}{x_2}+\cdots+\ln\frac{1}{x_n}\ge n\ln n$。

分析：将不等式左边整理为$-\left(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n\right)$，构造凸函数$f(x)=-\ln x(x>0)$，结合琴生不等式和$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$证明。

证明：构造函数$f(x)=-\ln x(x>0)$，由例 1 知$f(x)$是凸函数。

已知$x_1,x_2,\cdots,x_n>0$且$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，由琴生不等式等权形式得：

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\ge f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)$$

化简得：

$$\frac{-\ln x_1-\ln x_2-\cdots-\ln x_n}{n}\ge-\ln\frac{1}{n}$$

两边同乘n，整理得：

$$-\left(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n\right)\ge-n\ln\frac{1}{n}=n\ln n$$

得证。

3.4. 构造凸函数证明条件型不等式

高中阶段的条件型不等式(含$a+b+c=k$、$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$等条件)是压轴题常考题型，结合构造法和琴生不等式，可快速找到解题突破口。

例 4 已知$a,b,c>0$，且$a+b+c=3$，求证：$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le3$。

本题同样使用两种方法进行求解，将一般解法同凸函数琴生不等式求解法进行对照。

第一种方法：柯西不等式

解题思路是利用柯西不等式$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$，选取合适的$a_i$和$b_i$，将待证式中的根式与常数结合，通过平方展开后带入已知条件求解。证明过程如下：

根据柯西不等式的代数形式，对于任意正实数a,b,c与常数$1,1,1$，有：

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\le\left(1^2+1^2+1^2\right)\cdot\left[\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right]$$

将已知条件代入不等式右侧：

$$(1+1+1)\cdot(a+b+c)=3\times3=9$$

可得：$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\le9$

由于$a,b,c>0$，$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$均为正数，对不等式两边开平方，直接得到：

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le3$$

当且仅当$\frac{\sqrt{a}}{1}=\frac{\sqrt{b}}{1}=\frac{\sqrt{c}}{1}$，即$a=b=c=1$时，等号成立。

第二种方法：利用函数的琴生不等式

分析：待证不等式含$\sqrt{x}$，先判断$f(x)=\sqrt{x}$的凸性($f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}<0$，为凹函数)，利用凹函数的琴生不等式(不等号反向)证明，此为高中的常见变形。

证明：构造函数$f(x)=\sqrt{x}$，求导得：$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}<0$

故$f(x)=\sqrt{x}$是$(0,+\infty)$上的凹函数，凹函数的琴生不等式为：

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\ge\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

已知$a+b+c=3$，代入得：$\sqrt{\frac{a+b+c}{3}}\ge\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}$

整理得$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le3$，当且仅当$a=b=c=1$时成立。

以上两种方法存在差异性，第一种方法依赖柯西不等式，需要明确不等式的适用形式与取等条件，属于高中固定二级结论，但仅适配特定结构的不等式，推广性较弱。而琴生不等式法则依赖函数凹凸性判定与琴生不等式，需通过求导判断函数形态，核心是“构造函数 + 套公式”。适配对称型多元不等式，只要能构造出统一函数，可直接推广至n元场景，适用范围更广泛。

3.5. 非等权琴生不等式证明

例5 已知，正实数$a,b,c>0$，满足约束条件：$a+2b+3c=6$，证明不等式：

$$a^2+2b^2+3c^2\ge6$$

证明：选取幂函数$f(x)=x^2$，求二阶导数：$f'(x)=2x$，$f''(x)=2>0$，因此$f(x)=x^2$在$(0,+\infty)$上为凸函数，满足加权琴生不等式使用前提：对凸函数，有：

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}p_if(x_i)$$

其中权重 $p_i>0$，且 $\sum p_i=1$，仅当所有自变量相等时等号成立。

根据约束条件系数，设定非均等权重：$p_1=\frac{1}{6}$，$p_2=\frac{1}{3}$，$p_3=\frac{1}{2}$，权重和 $p_1+p_2+p_3=1$，完全符合加权琴生权重要求。

$f\left(p_1a+p_2b+p_3c\right)\le p_1f\left(a\right)+p_2f\left(b\right)+p_3f\left(c\right)$ 代入函数与权重展开：

$$\left(\frac{a+2b+3c}{6}\right)^2\le\frac{1}{6}a^2+\frac{2}{6}b^2+\frac{3}{6}c^2$$

化简得：$\left(\frac{a+2b+3c}{6}\right)^2\le\frac{a^2+2b^2+3c^2}{6}$

将已知代入得：$\left(\frac{6}{6}\right)^2=1\le\frac{a^2+2b^2+3c^2}{6}$

两边同乘 6 得：$a^2+2b^2+3c^2\ge6$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时，不等式取等号。

例 6 已知正实数 $x,y,z>0$，且满足 $x+y+z=3$ 证明：$x\ln x+y\ln y+z\ln z\ge0$

解题难点：无法直接套用琴生不等式，需要先识别函数形态、判定凹凸性，是典型的需要提前分析、精准构造的高阶题型。

证明：构造对数相关函数：$f\left(x\right)=x\ln x$，有 $f'\left(x\right)=\ln x+1$，$f''\left(x\right)=\frac{1}{x}>0\left(x>0\right)$

故 $f\left(x\right)=x\ln x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上为凸函数。

因三变量等价地位，故采用均等权重：$p_1=p_2=p_3=\frac{1}{3}$，$\sum p_i=1$

将已知代入琴生不等式 $f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\le\frac{f\left(x\right)+f\left(y\right)+f\left(z\right)}{3}$ 得：

$$0\le\frac{x\ln x+y\ln y+z\ln z}{3}$$

整理得：$x\ln x+y\ln y+z\ln z\ge0$。

当且仅当 $x=y=z=1$ 时，不等式取等号。

4. 加权琴生不等式的适用边界、局限性与辩证应用

4.1. 加权琴生不等式的适用优势与高效场景

加权琴生不等式依托函数凹凸性建立统一放缩逻辑，相较于传统初等不等式(均值不等式、柯西不等式等)，具备极强的体系化与通用性，在以下情形中优势显著：

(1) 非对称、非等权线性约束问题：当题干约束为加权线性和(如 $k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n=$ 定值)，变量地位不对等时，传统方法需要复杂的人工配凑、系数调整，技巧门槛极高；而加权琴生可直接按照约束系数匹配对应权重，解题范式固定，大幅简化推导过程。

(2) 多元高次与超越不等式证明：面对幂函数、对数函数、指数函数、三角函数、分式函数等复杂结构，仅需通过二阶导数判定凹凸性，无需记忆海量零散放缩结论，即可批量完成不等式证明，适配范围远超传统技巧。

(3) n 元一般性推广命题：琴生定理天然适配任意有限个变量，三元到 n 元的推广无需重构证明逻辑，非常适合通用普适性结论的严谨推导，学术延展性更强。

(4) 均值与函数和的最值类命题：对于“自变量加权和固定，求证对应函数加权和的下界/上界”的经典题型，加权琴生是最贴合模型、步骤最简的系统性解法。

4.2. 加权琴生不等式的局限性与失效情形

加权琴生不等式并非万能通用解法，有着严格的前置使用前提，不满足条件时强行套用会直接导致证明错误：

(1) 全局凹凸性不单一，绝对不可使用

琴生不等式的核心前提是：目标函数在全体变量的公共取值区间内，全程保持单一凸/单一凹。

若函数在区间内二阶导数正负交替、凹凸形态切换(如 $f(x)=\sin x$ 在 $(0,2\pi)$ 内凹凸反复变化)，全局凹凸性不复存在，不等号方向无法固定，此时无法应用琴生不等式。

(2) 难以构造统一母函数

当待证不等式结构混杂多种不同类型函数、拆分零散，无法提炼出单一可导母函数，或是母函数凹凸性判定极度繁琐时，构造成本急剧上升，相较换元法、调整法、拆分放缩法，不再具备效率优势，失去使用价值。

(3) 变量定义域分立、取值范围不统一

若不同变量带有独立的取值限制、无公共连续定义域，即便函数整体凹凸恒定，自变量的加权均值也可能脱离既定凹凸区间，定理的底层适用前提崩塌，推导过程丧失数学严谨性。

(4) 凹凸方向与待证命题相悖

加权琴生的不等号方向具备绝对固定性：

普通凸函数：$f\left(\sum p_i x_i\right) \le \sum p_i f\left(x_i\right)$；严格凸函数：变量不全相等时，严格满足 $f\left(\sum p_i x_i\right) < \sum p_i f\left(x_i\right)$，等号当且仅当所有自变量全部相等；凹函数：$f\left(\sum p_i x_i\right) \ge \sum p_i f\left(x_i\right)$

若凹凸函数判定颠倒、不等号方向误用，会直接推导出完全相反的错误结论；若待证不等式方向与函数凹凸天然矛盾，琴生不等式完全无法完成证明。

(5) 放缩紧度不足，无法触及精确边界

部分极值不等式的最值边界极度严苛，琴生全局放缩的精度偏宽松，仅能证明强弱大小关系，无法锁定精准最值，单独使用无法完成命题，必须搭配精细化局部放缩辅助。

(6) 离散整数场景适配能力弱

加权琴生的理论体系建立在实数连续区间之上，若题干严格限定变量为离散正整数，连续情形下的结论不能直接迁移，必须额外补充离散端点核验，证明流程大幅冗余

4.3. 辩证看待加权琴生不等式

加权琴生不等式是凸分析视角下，初等不等式进阶证明的强力工具，它跳出了传统不等式“一题一巧、碎片化凑配”的局限，用统一、严谨、标准化的逻辑解决了一大类复杂难题，大幅降低了高难度不等式的解题门槛。

但同时，我们也必须清晰认知其边界：它不是无前提、无限制的万能解法，绝不能盲目滥用。在解题与学术推导过程中，需坚持三步核验原则：

(1) 确认全体变量拥有统一、连续的公共定义域。

(2) 核验目标函数在定义域内全程保持单一凹凸性(区分普通凸与严格凸)。

(3) 核对凹凸性质与待证不等式的不等号方向完全匹配。

三项核验全部通过，再规范使用琴生完成推导；若任意前提不满足，及时切换适配解法，结合均值

不等式、柯西不等式、切线放缩、导数调整法等工具灵活互补，做到扬长避短。

唯有辩证、理性地看待加权琴生不等式的优势与短板，不神化、不滥用，才能在保证推导简洁高效的同时，坚守数学证明的绝对严谨性，建立科学全面的不等式解题思维体系。

5. 高中阶段的解题规律与技巧总结

结合上述例题，以高中数学为背景，构造法与琴生不等式融合证明不等式的过程可总结为“四步核心法”；第一步——析形式：分析待证不等式的结构，识别核心函数形式(如含 $x^2,-\ln x,x^k$ 等)，判断是否可转化为“函数值的平均”与“平均的函数值”的关系；第二步——构函数：根据不等式结构构造函数 $f(x)$，优先选择高中常见凸/凹函数($f(x)=x^2,f(x)=-\ln x,f(x)=\sqrt{x},f(x)=x^3$ 等)；第三步——验凸性：对构造的函数求二阶导数，判断是凸函数($f''(x)>0$)还是凹函数($f''(x)<0$)，确定琴生不等式的不等号方向；第四步——用定理：将已知条件(如 $a+b+c=3$ 、 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$)代入琴生不等式，通过简单代数变形推导出待证结论。同时，在解决实际问题中也可以遵循一些结题技巧；见乘积/开方，构造 $f(x)=-\ln x$，利用对数的运算性质，将乘积转化为和式，贴合琴生不等式的结构；见平方/高次幂($k\geq 2$)构造 $f(x)=\sqrt{x}$ (此类函数二阶导数恒正，为凸函数)，见平方根($\sqrt{x}$)，构造 $f(x)=\sqrt{x}$：(此类函数为凹函数，只需将琴生不等式的不等号反向即可)，见变量和为定值($x_1+x_2+\cdots+x_n=k$)，直接用等权琴生不等式，无需构造权重，更贴合高中考查要求。

6. 结语

在高中数学中，构造法思想与琴生不等式的融合，是解决一类不等式证明问题的高效解题策略，其核心优势在于避开了常规方法的复杂代数变形，将不等式证明转化为“构造函数－验证凸性－应用定理”的标准化步骤，贴合高中数学的考查规律和知识范围。

本文梳理的所有方法均基于高中导数、函数的基础内容，无超纲知识点，所构造的函数均为高中常见的幂函数、对数函数，所应用的琴生不等式均为简化的离散型形式。在实际解题中，只需熟练掌握“依式构造凸函数”的核心思路，结合二阶导数判断凸性，即可快速解决均值不等式类、幂函数类、对数指数类和条件型不等式的证明问题。同时，这种融合思路不仅能提升解题效率，还能培养学生的函数思想和构造思维，帮助学生建立“函数－不等式”的知识联系，符合高中数学核心素养的培养要求。

参考文献

[1] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析(上册) (第 5 版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[2] 人民教育出版社课程教材研究所. 高中数学选择性必修第二册(A 版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.

[3] 周晓晖. 凸函数的性质在不等式证明中的应用[J]. 牡丹江教育学院学报, 2014(6): 63-65.