

# 一类约束分拆函数的同余性质

许素雅

天津职业技术师范大学理学院, 天津

收稿日期: 2026年4月13日; 录用日期: 2026年5月13日; 发布日期: 2026年5月25日

## 摘要

利用 $q$ 级数中的dissection公式及Radu算法, 研究了一类特殊的overpartition函数 $\bar{\tau}^{(k)}(n)$ 的同余性质, 得到了 $\bar{\tau}(n)$ 模3及 $\bar{\tau}^{(3)}(n)$ 模2、模4、模8的同余式。此外, 得到了 $\bar{\tau}^{(8)}(n)$ 模3时与五角数的同余关系。

## 关键词

Overpartition, 同余式, 整数分拆, Radu算法

# Congruence Properties of a Class of Restricted Overpartition Functions

Suya Xu

School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: April 13, 2026; accepted: May 13, 2026; published: May 25, 2026

## Abstract

Using the dissection formula in  $q$ -series and Radu's algorithm, we investigate the congruence properties of a class of special overpartition functions  $\bar{\tau}^{(k)}(n)$ . We obtain congruences modulo 3 for  $\bar{\tau}(n)$ , and modulo 2, 4 and 8 for  $\bar{\tau}^{(3)}(n)$ . Moreover, we establish a congruence relation for  $\bar{\tau}^{(8)}(n)$  modulo 3 involving pentagonal numbers.

## Keywords

Overpartition, Congruence, Integer Partition, Radu's Algorithm



## 1. 引言

若一个弱递减正整数序列  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  的和为  $n$ , 则称该序列为  $n$  的一个分拆, 记作  $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$ 。此时, 称  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  为分拆  $\lambda$  的部分,  $k$  称为分拆  $\lambda$  的长度。分拆函数  $p(n)$  表示  $n$  的所有分拆的个数。规定  $p(0) = 1$ 。

例如,  $p(5) = 7$ , 对应的分拆为

$$5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1.$$

整数分拆的研究起始于 Euler, 他给出了  $p(n)$  的如下生成函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}.$$

Ramanujan [1] 开创了分拆函数同余性质的研究。例如, 他证明了对任意非负整数  $n$ , 有

$$\begin{aligned} p(5n+4) &\equiv 0 \pmod{5}, \\ p(7n+5) &\equiv 0 \pmod{7}, \\ p(11n+6) &\equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned}$$

自此之后, 相关学者对各类分拆函数的同余性质展开了大量研究。

对整数分拆的部分等添加一些条件得到的分拆称为约束分拆函数。例如, 正整数  $n$  的一个 overpartition 是  $n$  的一个分拆且要求每个初次出现的部分可以加上划线或者不加上划线。令  $\bar{p}(n)$  为  $n$  的 overpartition 的数目, 且规定  $\bar{p}(0) = 1$ 。

例如,  $\bar{p}(4) = 14$ , 对应的分拆为

$$4, \bar{4}, 3+1, 3+\bar{1}, \bar{3}+1, \bar{3}+\bar{1}, 2+2, \bar{2}+2, 2+1+1, \bar{2}+1+1, 2+\bar{1}+1, \bar{2}+\bar{1}+1, 1+1+1+1, \bar{1}+1+1+1.$$

Cortee 和 Lovejoy 得到了  $\bar{p}(n)$  的生成函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+q^n}{1-q^n}.$$

$\bar{p}(n)$  的同余性质已被广泛研究, 可见[2]-[4]。

在此基础上, Bringmann 等人[5]研究了如下一类特殊的 overpartition 函数。

**定义 1** 对于一个非负整数  $k \geq 2$ , 令  $\bar{t}^{(k)}(n)$  为满足以下两个限制的  $n$  的 overpartition 数目: (1) 若两个连续部分的差是  $k+1$  的倍数, 则较大部分加上上划线; (2) 若最小部分是  $k+1$  的倍数, 则该部分也加上上划线。

Bringmann 等人[5]也得到了相应的生成函数

$$\sum_{n \geq 0} \bar{t}^{(k)}(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^{n(k+1)}}{(1-q^n)(1-q^{nk})}. \tag{1.1}$$

当  $k = 2$  时,  $\bar{t}^{(2)}(n)$  简记作  $\bar{t}(n)$ 。

例如,  $k=2, n=5$  时, 满足上述条件的分拆有:

$$\bar{5}, \bar{4} + \bar{1}, \bar{3} + \bar{2}, \bar{3} + \bar{2}, 3 + 1 + \bar{1}, \bar{3} + 1 + \bar{1}, 2 + \bar{2} + \bar{1}, \bar{2} + 1 + 1 + \bar{1}, 1 + 1 + 1 + 1 + \bar{1}.$$

从而可得  $\bar{t}(5) = 9$ 。

对于  $\bar{t}^{(k)}(n)$ , Naika [6] 等人研究了  $k=3, 4, 7, 8$  时的同余性质, 得到了如下同余式

$$\bar{t}^{(3)}(4^n(4n+3)) \equiv 0 \pmod{2},$$

$$\bar{t}^{(4)}(8n+6) \equiv 0 \pmod{4},$$

$$\bar{t}^{(7)}(8n+7) \equiv 0 \pmod{4},$$

$$\bar{t}^{(8)}(4n+3) \equiv 0 \pmod{3}.$$

Lin、Chern 等学者也深入研究了  $\bar{t}^{(2)}(n)$  的同余性质, 并得到了相关结果, 可见[7] [8]。

本文研究了  $\bar{t}(n), \bar{t}^{(3)}(n), \bar{t}^{(8)}(n)$  的同余性质, 具体结论如下。

**定理 1** 对于任意的自然数  $n$ , 有

$$\bar{t}(9n+3) \equiv 0 \pmod{3}, \tag{1.2}$$

$$\bar{t}(12n+7) \equiv 0 \pmod{3}. \tag{1.3}$$

**定理 2** 对于任意的自然数  $n$ , 有

$$\bar{t}^{(3)}(3n+2) \equiv 0 \pmod{2}, \tag{1.4}$$

$$\bar{t}^{(3)}(18n+12) \equiv 0 \pmod{8}. \tag{1.5}$$

**定理 3** 对于任意的自然数  $n$ , 有

$$\bar{t}^{(3)}(9n+3) \equiv 0 \pmod{4}, \tag{1.6}$$

$$\bar{t}^{(3)}(12n+11) \equiv 0 \pmod{8}. \tag{1.7}$$

**定理 4** 对于任意的自然数  $n$ , 有

$$\bar{t}^{(8)}(24n+1) \equiv \begin{cases} (-1)^k \pmod{3}, & n = \frac{k(3k-1)}{2}, \\ 0 \pmod{3}, & n \neq \frac{k(3k-1)}{2}. \end{cases} \tag{1.8}$$

## 2. 基础知识

**定义 2** 对正整数  $n, q$ -升阶乘为

$$(a; q)_n = \prod_{k=1}^n (1 - aq^{k-1}).$$

当  $n=0$  时, 约定  $(a; q)_0 = 1$ 。为方便起见, 记

$$f_k := (q^k; q^k)_\infty = \prod_{n=1}^\infty (1 - q^{nk}).$$

著名的五角数定理[9]为

$$f_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\frac{k(3k-1)}{2}}.$$

**引理 1** 对任意的素数  $p$ , 以及  $m, j, k \in \mathbb{N}$ , 有

$$f_m^{kp^j} \equiv f_{mp}^{kj-1} \pmod{p^j}. \tag{2.1}$$

**引理 2 [10]** 如下 2-dissection 公式成立

$$\frac{1}{f_1^4} = \frac{f_4^{14}}{f_2^{14} f_8^4} + 4q \frac{f_4^2 f_8^4}{f_2^{10}}, \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{f_1^2} = \frac{f_8^5}{f_2^5 f_{16}^2} + 2q \frac{f_4^2 f_{16}^2}{f_2^5 f_8}, \tag{2.3}$$

$$\frac{f_3^3}{f_1} = \frac{f_4^3 f_6^2}{f_2^2 f_{12}} + q \frac{f_{12}^3}{f_4}. \tag{2.4}$$

**引理 3 [11]** 如下 2-dissection 公式成立

$$\frac{f_9}{f_1} = \frac{f_{12}^3 f_{18}}{f_2^2 f_6 f_{36}} + q \frac{f_4^2 f_6 f_{36}}{f_2^3 f_{12}}. \tag{2.5}$$

**引理 4 [10]** 如下 3-dissection 公式成立

$$\frac{f_2^2}{f_1} = \frac{f_6 f_9^2}{f_3 f_{18}} + q \frac{f_{18}^2}{f_9}, \tag{2.6}$$

$$\frac{f_1^2}{f_2} = \frac{f_9^2}{f_{18}} - 2q \frac{f_3 f_{18}^2}{f_6 f_9}. \tag{2.7}$$

**引理 5 [12]** 如下 3-dissection 公式成立

$$\frac{f_4}{f_1} = \frac{f_{12} f_{18}^4}{f_3^3 f_{36}^2} + q \frac{f_6^2 f_9^3 f_{36}}{f_3^4 f_{18}^2} + 2q^2 \frac{f_6 f_{18} f_{36}}{f_3^3}. \tag{2.8}$$

下面简单介绍模函数的一些基本定义与定理, 详细内容可见[13]-[15]。

**定义 3**  $SL_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1 \right\}$  称为全模群。对正整数  $N$ ,

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

为全模群  $SL_2(\mathbb{Z})$  的一个同余子群。

**定义 4** 设  $\mathbb{H}$  是复平面的上半平面, 并且有  $\hat{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ 。对于  $\tau \in \hat{\mathbb{H}}$ ,  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ , 定

义群作用  $SL_2(\mathbb{Z}) \times \hat{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{C} : \gamma\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$ 。

记  $[\tau]_N$  为  $\tau$  在  $\Gamma_0(N)$  群作用下的尖点。

**定义 5** 若函数  $f : \hat{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{C}$  满足如下条件

- (1)  $f$  在  $\mathbb{H}$  上全纯;
- (2) 对任意  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ , 有  $f(\gamma\tau) = f(\tau)$ ;

(3) 对于任意的  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ , 满足  $f(\gamma(\tau)) = \sum_{n=n_\gamma}^{\infty} a_\gamma(n) q^{n \frac{\gcd(c^2, N)}{N}}$ ,  $q = e^{2\pi i \tau}$ , 其中  $a_\gamma(n_\gamma) \neq 0$ ,  $(n_\gamma) > -\infty$ ;

则称  $f$  为在  $\Gamma_0(N)$  上权为 0 的模函数。

记  $ord_{\frac{N}{c}}(f) := n_\gamma$ 。特别地, 记  $ord_\infty^N(f) := -prod(f)$ 。当  $ord_{\frac{N}{c}}(f) < 0$  时,  $\frac{c}{a}$  为一个极点, 并且记

$\sum_{n=n_\gamma}^{-1} a_\gamma(n) q^{n \frac{\gcd(c^2, N)}{N}}$  为  $f$  在  $\frac{c}{a}$  处的 Fourier 展式的主要部分。

**定义 6** 记  $\Gamma_0(N)$  上权为 0 的模函数构成的线性空间为  $M(\Gamma_0(N))$ 。特别地, 记除了  $i\infty$  所在尖点以外均解析的模函数组成的空间为  $M^\infty(\Gamma_0(N))$ 。

**定理 5** 若  $f \in M(\Gamma_0(N))$  且无极点, 则  $f$  为常函数。

**定义 7** 对正整数  $N$ , 记  $\varepsilon(N) := \left\{ \prod_{\delta|N} \eta(\delta\tau)^{r_\delta} : r_\delta \in \mathbb{Z} \right\}$ ,  $\varepsilon^\infty(N) := M^\infty(\Gamma_0(N)) \cap \varepsilon(N)$ , 其中 eta 函数为  $\eta(\tau) := q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$ 。

**定理 6** 对于  $f = \prod_{\delta|N} \eta(\delta\tau)^{r_\delta} \in M(\Gamma_0(N)) \cup \varepsilon(N)$ , 有

$$ord_{\frac{N}{c}}(f) = \frac{N}{24 \gcd(c^2, N)} \sum_{\delta|N} r_\delta \frac{\gcd(\delta, c)^2}{\delta}.$$

Radu 算法是证明分拆函数同余性质的一个有利工具。下面简单介绍 Radu 算法[16]。

**定义 8** 对正整数  $N$ , 记

$$\omega(r) := \sum_{\delta|N} r_\delta, \quad \sigma_\infty(r) := \sum_{\delta|N} \delta r_\delta, \quad \sigma_0(r) := \sum_{\delta|N} r_\delta \frac{N}{\delta}, \quad \Pi(r) := \prod_{\delta|N} \delta^{|r_\delta|}.$$

**定义 9** 令  $\Delta^*$  为满足如下条件的所有序列  $(N, M, r, m, j)$  构成的集合:

- (1)  $N, M, m, j$  为正整数,  $r = (r_\delta)_{\delta|M}$  为整数向量;
- (2) 任意的素数  $p$ , 若  $p|m$ , 则有  $p|N$ ;
- (3) 任意的  $\delta|M$ , 若  $r_\delta \neq 0$ , 则有  $\delta|mN$ ;
- (4) 令  $\kappa = \gcd(m^2 - 1, 24)$ , 则有  $\frac{24m}{\gcd(\kappa(-24j - \sigma_\infty(r)), 24m)} | N$ ,  $24 | \kappa \frac{mN^2}{M} \sigma_0(r)$  和  $8 | \kappa N \omega(r)$ ;
- (5) 当  $2|M$  时, 令  $\Pi(r) = 2^t w$ , 其中  $t$  是正整数,  $w$  是正奇数, 则  $4|N$  且  $8|Nt$ 、 $2|t$  且  $8|N(1-w)$  至少满足一个。

**定义 10** 记

$$P_{m,r}(j) := \left\{ j' \in \mathbb{Z}_m : j' \equiv ja^2 + \frac{a^2 - 1}{24} \sigma_\infty(r) \pmod{m}, a \in \mathbb{Z}, \gcd(a, 6m) = 1 \right\},$$

$$v := \sum_{j' \in P_{m,r}(j)} \frac{1 - m^2}{m} (24j' + \sigma_\infty(r)).$$

对正整数  $M$ , 考虑如下 eta 商:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n) q^n = \prod_{\delta|M} f_\delta^{r_\delta},$$

其中  $r = (r_\delta)_{\delta|M}$  为整数向量。对给定的  $r, m, j$ , Radu 算法将考察

$$F(\tau) = \prod_{j' \in P_{m,r}(j)} \left( q^{m^{-1} + \frac{\sigma_\infty(r)}{24m}} \sum_{n=0}^{\infty} a(mn + j') q^n \right)$$

的相关性质。

**定理 7** 若  $(N, M, r, m, j) \in \Delta^*$ , 令  $s = (s_\delta)_{\delta|N}$ ,  $f(\tau) = \prod_{\delta|N} \eta(\delta\tau)^{s_\delta}$ , 若满足

- (1)  $|P_{m,r}(j)|\omega(r) + \omega(s) = 0$ ;
- (2)  $v + |P_{m,r}(j)|m\sigma_\infty(r) + \sigma_\infty(s) \equiv 0 \pmod{24}$ ;
- (3)  $|P_{m,r}(j)|\frac{mN}{M}\sigma_0(r) + \sigma_0(s) \equiv 0 \pmod{24}$ ;
- (4)  $\left(\prod_{\delta|M} (m\delta)^{|r_\delta|}\right)^{|P_{m,r}(j)|} \cdot \prod(s) \in \{n^2 : n \in \mathbb{Z}\}$ ;

则有  $f \cdot F \in M(\Gamma_0(N))$ 。

**定理 8** 对于  $\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ , 有

$$\text{ord}_{\frac{N}{c}}^N(F) \geq \frac{N}{\gcd(c^2, N)} \left( |P_{m,r}(j)|p(\gamma, r) + p^*(\gamma, s) \right),$$

其中

$$p(\gamma, r) := \min_{0 \leq \lambda \leq m-1} \frac{1}{24} \sum_{\delta|M} r_\delta \frac{\gcd(\delta(a + \kappa\lambda c), mc)^2}{\delta m}, p^*(\gamma, s) := \frac{1}{24} \sum_{\delta|N} s_\delta \frac{\gcd(\delta, c)^2}{\delta}.$$

**定理 9**  $\forall N \in \mathbb{Z}_{\geq 2}^*$ , 存在  $\mu \in \mathcal{E}^\infty(N)$  和  $k \in \mathbb{N}$ , 使得  $\mu^k \in M^\infty(\Gamma_0(N))$ 。

**定理 10** 若  $\mu \in \mathcal{E}^\infty(N)$  且  $\mu^k \in M^\infty(\Gamma_0(N))$ , 令  $F_1 = \mu^k f$ , 则有  $F_1 \cdot F \in M^\infty(\Gamma_0(N))$ 。

下述定理给出了  $\mathcal{E}^\infty(N)$  的刻画, 基于此即可得到  $F_1 \cdot F$  的一个表示式。

**定理 11** 对于任意整数  $N \geq 2$ ,  $\mathcal{E}^\infty(N)$  是有限生成的半群, 并且存在函数

$t, g_1, g_2, \dots, g_{v-1} \in M^\infty(\Gamma_0(N))$  使得

- (1)  $\text{pord}(t) = v$ ;
- (2)  $\text{pord}(g_i) < \text{pord}(g_j), 1 \leq i < j \leq v-1$ ;
- (3)  $\text{pord}(g_i) \not\equiv \text{pord}(g_j) \pmod{v}, 1 \leq i < j \leq v-1$ ;
- (4)  $\text{pord}(g_i) \not\equiv 0 \pmod{v}, 1 \leq i \leq v-1$ ;
- (5)  $\langle \mathcal{E}^\infty(N) \rangle_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{i=0}^{v-1} g_i \mathbb{Q}[t]$ , 其中  $g_0 = 1$ 。

**注.** 对于  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ , 若  $M^\infty(\Gamma_0(N)) = \langle \mathcal{E}^\infty(N) \rangle_{\mathbb{C}}$ , 则称  $M(\Gamma_0(N))$  满足 Newman-Radu 条件。

综上, 对函数  $\sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n = \prod_{\delta|M} f_\delta^{r_\delta}$ , 及给定的  $r, m, j$ , 利用 Radu 算法研究同余式的思路如下:

- (1) 找到  $N$  使得  $(N, M, r, m, j) \in \Delta^*$ ;
- (2) 求出  $f = \prod_{\delta|N} \eta(\delta\tau)^{s_\delta}$ , 使得  $f \cdot F \in M(\Gamma_0(N))$ ;
- (3) 找到  $\mu \in \mathcal{E}^\infty(N)$  并得到  $F_1 = \mu^k f$ , 使得  $F_1 \cdot F \in M^\infty(\Gamma_0(N))$ ;
- (4) 求出定理 11 中的函数  $t, g_1, g_2, \dots, g_{v-1} \in \mathcal{E}^\infty(N)$ ;
- (5) 利用待定法求出  $p_0(t), p_1(t), \dots, p_{v-1}(t) \in \mathbb{Q}[t]$ , 使得  $F_1 \cdot F = \sum_{i=0}^{v-1} g_i \cdot p_i(t)$ ;
- (6) 分析(5)中等式的相关系数, 得到对应的同余式。

上述过程实际上得到了如下等式(称为 Ramanujan-Kolberg 等式[13])

$$\prod_{j' \in P_{m,r}(j)} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a(mn + j')q^n \right) = \frac{1}{F_1} \sum_{i=0}^{v-1} g_i \cdot p_i(t).$$

若右端为整系数的且容易得到一个公因数  $D$ ，则可得到

$$\prod_{j' \in P_{m,r}(j)} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a(mn + j')q^n \right) \equiv 0 \pmod{D}.$$

特别地，如果  $j \equiv -\frac{\sigma_{\infty}(r)}{24} \pmod{m}$ ，则  $P_{m,r}(j) = \{j\}$ ，此时有

$$\forall n \in \mathbb{N}, a(mn + j) \equiv 0 \pmod{D}.$$

### 3. 定理证明

首先证明定理 1：在(1.1)中令  $k=2$ ，根据引理 1，并运用(2.7)，可以得到

$$\sum_{n \geq 0} \bar{t}(n)q^n = \frac{f_3}{f_2 f_1} \equiv \frac{f_1^2}{f_2} \pmod{3} = \frac{f_9^2}{f_{18}} - 2q \frac{f_3 f_{18}^2}{f_6 f_9} \pmod{3}.$$

提取  $q^{3n}$  项，并将  $q^{3n}$  换成  $q^n$ ，得到

$$\sum_{n \geq 0} \bar{t}(3n)q^n = \frac{f_3^2}{f_6} \pmod{3}.$$

等式右边只含  $q^{3n}$  项，因此(1.2)成立。

提取  $q^{3n+1}$  项，有

$$\sum_{n \geq 0} \bar{t}(3n+1)q^n \equiv -2 \frac{f_1 f_6^2}{f_2 f_3} \equiv \frac{f_6^2}{f_2 f_1^2} \pmod{3},$$

代入(2.3)，并提取  $q^{2n}$  项，得到

$$\sum_{n \geq 0} \bar{t}(6n+1)q^n \equiv \frac{f_3^2 f_4^5}{f_1^6 f_8^2} \equiv \frac{f_4^5}{f_8^2} \pmod{3}.$$

可见等式右边只含偶次幂的项，因此(1.3)成立。

下证定理 2：在(1.1)中令  $k=3$ ，有

$$\sum_{n \geq 0} \bar{t}^{(3)}(n)q^n = \frac{f_4}{f_3 f_1} \equiv \frac{f_2^2}{f_3 f_1} \pmod{2},$$

将(2.6)带入上式，得到

$$\sum_{n \geq 0} \bar{t}^{(3)}(n)q^n \equiv \frac{f_6 f_9^2}{f_3^2 f_{18}} + q \frac{f_{18}^2}{f_3 f_9} \pmod{2}.$$

等式右边只含  $q^{3n}$ ， $q^{3n+1}$  的项，提取等式两边  $q^{3n+2}$  的项，可得(1.4)成立。

同理，在(1.1)中令  $k=3$ ，并由(2.8)有

$$\sum_{n \geq 0} \bar{t}^{(3)}(n)q^n = \frac{f_4}{f_3 f_1} = \frac{1}{f_3} \left( \frac{f_{12} f_{18}^4}{f_3^3 f_{36}^2} + q \frac{f_6^2 f_9^3 f_{36}}{f_3^4 f_{18}^2} + 2q^2 \frac{f_6 f_{18} f_{36}}{f_3^3} \right).$$

提取  $q^{3n}$  的项，把  $q^{3n}$  换成  $q^n$ ，并利用(2.2)，得到

$$\sum_{n \geq 0} \bar{t}^{(3)}(3n)q^n = \frac{f_4 f_6^4}{f_1^4 f_{12}^2} = \left( \frac{f_4^{14}}{f_2^{14} f_8^4} + 4q \frac{f_4^2 f_8^4}{f_2^{10}} \right) \frac{f_4 f_6^4}{f_{12}^2}.$$

进一步提取  $q^{2n}$  的项，并把  $q^{2n}$  换成  $q^n$ ，可得

$$\sum_{n \geq 0} \bar{t}^{(3)}(6n)q^n = \frac{f_2^{15} f_3^4}{f_1^{14} f_4^4 f_6^2} \equiv \frac{f_2^3 f_3^4}{f_1^6 f_6^2} \pmod{8} \equiv \frac{f_1^2 f_3^4}{f_2 f_6^2} \pmod{8}.$$

利用(2.7)，并提取  $q^{3n+2}$  的项，可得到

$$\sum_{n \geq 0} \bar{t}^{(3)}(18n+12)q^n \equiv 0 \pmod{8},$$

故(1.5)得证。

下证定理 3: 此时，生成函数为

$$\sum_{n \geq 0} \bar{t}^{(3)}(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^{4n}}{(1-q^n)(1-q^{3n})} = \frac{f_4}{f_1 f_3}.$$

因此，可令  $M = 12$ ，其因子为 1, 2, 3, 4, 6, 12，那么  $\frac{f_4}{f_1 f_3} = f_1^{-1} f_2^0 f_3^{-1} f_4^1 f_6^0 f_{12}^0$ ，故有  $r = [-1, 0, -1, 1, 0, 0]$ 。根据待证同余式，有  $m = 9, j = 3$ 。通过 Radu 算法，并利用 Maple，计算得到以下结果：

$$N = 12,$$

$$\{M, r\} = \{12, [-1, 0, -1, 1, 0, 0]\},$$

$$m = 9,$$

$$Pset = \{3\},$$

$$f1(q) = \frac{\eta(\tau)^{14} \eta(4\tau)^5 \eta(6\tau)^{15}}{\eta(2\tau)^9 \eta(3\tau)^6 \eta(12\tau)^{18}},$$

$$t = \frac{\eta(\tau)^3 \eta(4\tau) \eta(6\tau)^2}{\eta(2\tau)^2 \eta(3\tau) \eta(12\tau)^3},$$

$$AB = [1],$$

$$pg(t) = [4t^5 + 108t^4 + 968t^3 + 3840t^2 + 6912t + 4608],$$

$$Common\ Factor = 4.$$

其中， $N$  是使用定义 9 得到的正整数， $Pset$  表示  $P_{m,r}(j)$ ， $f1(q)$  表示利用定理 10 得到的  $F_1$ ， $t$  表示定理 11 中的  $t$ ， $AB$  表示集合  $\{g_0, g_2, \dots, g_{v-1}\}$ ， $pg(t)$  表示集合  $\{p_0(t), p_1(t), \dots, p_{v-1}(t)\}$ ， $Common\ Factor$  表示  $\{p_0(t), p_1(t), \dots, p_{v-1}(t)\}$  的各项系数分子的最大公因数。

上述输出结果表明

$$f1(q) \left( q^{\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{t}^{(3)}(9n+3)q^n \right) = 4t^5 + 108t^4 + 968t^3 + 3840t^2 + 6912t + 4608.$$

由此可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{t}^{(3)}(9n+3)q^n = \frac{q^{\frac{1}{3}}}{f1(q)} (4t^5 + 108t^4 + 968t^3 + 3840t^2 + 6912t + 4608).$$

注意到

$$t = q^{-1} \frac{f_1^3 f_4 f_6^2}{f_2^2 f_3 f_{12}^3}, \quad \frac{1}{f_1(q)} = q^{\frac{16}{3}} \frac{f_2^9 f_3^6 f_{12}^{18}}{f_1^{14} f_4^5 f_6^{15}},$$

显然，右端所有系数均为整数，且可被 4 整除，由此可知(1.6)式成立。

同理，对于同余式(1.7)，令  $M = 12, r = [-1, 0, -1, 1, 0, 0], m = 12, j = 11$ ，通过 Radu 算法，并利用 Maple 计算得到以下结果：

$$\begin{aligned} N &= 24, \\ \{M, r\} &= \{12, [-1, 0, -1, 1, 0, 0]\}, \\ m &= 12, \\ Pset &= \{11\}, \\ f_1(q) &= \frac{\eta(\tau)^{17} \eta(6\tau)^{10} \eta(8\tau)^{10} \eta(12\tau)^{13}}{\eta(2\tau)^8 \eta(3\tau)^5 \eta(4\tau)^4 \eta(24\tau)^{32}}, \\ t &= \frac{\eta(2\tau)^3 \eta(8\tau) \eta(12\tau)^2}{\eta(4\tau)^2 \eta(6\tau) \eta(24\tau)^3}, \\ AB &= \left[ 1, \frac{3\eta(2\tau)^3 \eta(8\tau) \eta(12\tau)^2}{\eta(4\tau)^2 \eta(6\tau) \eta(24\tau)^3} + \frac{\eta(2\tau)^3 \eta(3\tau)^2 \eta(8\tau)^2 \eta(12\tau)^3}{4\eta(2\tau) \eta(4\tau) \eta(6\tau) \eta(24\tau)^6} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\eta(\tau)^4 \eta(8\tau)^4 \eta(12\tau)^4}{4\eta(2\tau)^2 \eta(4\tau)^2 \eta(24\tau)^8} + \frac{\eta(\tau)^5 \eta(4\tau)^3 \eta(6\tau)^5 \eta(8\tau) \eta(12\tau)}{4\eta(2\tau)^5 \eta(3\tau)^3 \eta(24\tau)^7} \right], \\ pg(t) &= [72t^{10} + 4376t^9 + 105776t^8 + 1410304t^7 + 11767552t^6 + 65064960t^5 \\ &\quad + 243302400t^4 + 610246656t^3 + 984711168t^2 + 923664384t + 382205952, \\ &\quad 664t^8 + 21008t^7 + 289408t^6 + 2264832t^5 + 10994688t^4 + 33841152t^3 \\ &\quad + 64364544t^2 + 69009408t + 31850496], \\ \text{Common Factor} &= 8. \end{aligned}$$

由此即可证得(1.7)成立。

下证定理 4：在(1.1)中令  $k = 8$ ，有

$$\sum_{n \geq 0} \bar{t}^{(8)}(n) q^n = \frac{f_9}{f_8 f_1}.$$

将(2.5)带入上式，提取  $q^{2n+1}$  项得到

$$\sum_{n \geq 0} \bar{t}^{(8)}(2n+1) q^n = \frac{f_2^2 f_3 f_{18}}{f_4 f_1^3 f_6} \equiv \frac{f_2^2 f_6^2}{f_4} \pmod{3},$$

提取  $q^{2n}$  项，并利用(2.7)得到

$$\sum_{n \geq 0} \bar{t}^{(8)}(4n+1) q^n \equiv \frac{f_1^2 f_3^2}{f_2} \equiv \frac{f_3^2 f_9^2}{f_{18}} - 2q f_6^5 \pmod{3},$$

进一步，提取  $q^{3n}$  项，并利用(2.4)得到

$$\sum_{n \geq 0} \bar{\tau}^{(8)}(12n+1)q^n \equiv \frac{f_1^2 f_3^2}{f_6} \equiv \frac{f_6}{f_2^2} + q \frac{f_{12}^3}{f_4 f_6},$$

最后, 提取  $q^{2n}$  项得到

$$\sum_{n \geq 0} \bar{\tau}^{(8)}(24n+1)q^n \equiv f_1 \pmod{3}.$$

利用五角数定理即证得定理 4。

#### 4. 结论与展望

本文利用  $q$ -级数中的 dissection 公式及 Radu 算法得到了  $\bar{\tau}(n)$  模 3、 $\bar{\tau}^{(3)}(n)$  模 2、模 4、模 8 及  $\bar{\tau}^{(8)}(n)$  模 3 的一些同余式, 丰富了相关研究。例如, 得到了如下同余式:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(9n+3) &\equiv 0 \pmod{3}, \\ \bar{\tau}(12n+7) &\equiv 0 \pmod{3}, \\ \bar{\tau}^{(3)}(3n+2) &\equiv 0 \pmod{2}, \\ \bar{\tau}^{(3)}(18n+12) &\equiv 0 \pmod{8}, \\ \bar{\tau}^{(3)}(9n+3) &\equiv 0 \pmod{4}, \\ \bar{\tau}^{(3)}(12n+11) &\equiv 0 \pmod{8}, \\ \bar{\tau}^{(8)}(24n+1) &\equiv \begin{cases} (-1)^k \pmod{3} & n = \frac{k(3k-1)}{2}, \\ 0 \pmod{3} & n \neq \frac{k(3k-1)}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

然而, 约束分拆函数同余性质的研究十分广泛, 特别是如何得到无穷族同余式一直是一个值得研究的课题。例如, 对函数  $\bar{\tau}(n)$ , Lin [7] 等人得到了如下两个无穷族同余式

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(9^\alpha(45n+30)) &\equiv 0 \pmod{5}, \\ \bar{\tau}(9^\alpha(72n+69)) &\equiv 0 \pmod{27}. \end{aligned}$$

未来可进一步考虑此类函数模其他素数或其方幂的同余性质。

#### 参考文献

- [1] Ramanujan, S. (1919) Some Properties of  $p(n)$ , the Number of Partitions of  $n$ . *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **19**, 210-213.
- [2] Yao, O.X.M. and Xia, E.X.W. (2013) New Ramanujan-Like Congruences Modulo Powers of 2 and 3 for Overpartitions. *Journal of Number Theory*, **133**, 1932-1949. <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2012.11.002>
- [3] Lin, B.L.S. (2015) A New Proof of a Conjecture of Hirschhorn and Sellers on Overpartitions. *The Ramanujan Journal*, **38**, 199-209. <https://doi.org/10.1007/s11139-014-9598-z>
- [4] Lovejoy, J. and Osburn, R. (2011) Quadratic Forms and Four Partition Functions Modulo 3. *Integers*, **11**, 47-53. <https://doi.org/10.1515/integ.2011.004>
- [5] Bringmann, K., Dousse, J., Lovejoy, J. and Mahlburg, K. (2015) Overpartitions with Restricted Odd Differences. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **22**, Article No. P3.17. <https://doi.org/10.37236/5248>
- [6] Naika, M.S.M. and Gireesh, D.S. (2018) Congruences for Overpartitions with Restricted Odd Differences. *Afrika Matematika*, **30**, 1-21. <https://doi.org/10.1007/s13370-018-0624-y>

- 
- [7] Lin, B.L.S., Liu, J., Wang, A.Y.Z. and Xiao, J. (2020) Infinite Families of Congruences for Overpartitions with Restricted Odd Differences. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **102**, 59-66. <https://doi.org/10.1017/s0004972719001254>
- [8] Chern, S. and Hao, L. (2019) Congruences for Two Restricted Overpartitions. *Proceedings—Mathematical Sciences*, **129**, Article No. 31. <https://doi.org/10.1007/s12044-019-0474-z>
- [9] Andrews, G.E. (1998) *The Theory of Partitions*. Cambridge University Press.
- [10] Hirschhorn, M.D. (2017) *The Power of  $q$ : A Personal Journey*. *Developments in Mathematics*, **49**.
- [11] Xia, E.X.W. and Yao, X.M. (2012) Some Modular Relations for the Göllnitz-Gordon Functions by an Even-Odd Method. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **387**, 126-138. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.08.059>
- [12] Baruah, N.D. and Ojah, K.K. (2015) Partitions with Designated Summands in Which All Parts Are Odd. *Integers*, **15**, Article No. A9.
- [13] Radu, S. (2009) An Algorithmic Approach to Ramanujan's Congruences. *The Ramanujan Journal*, **20**, 215-251. <https://doi.org/10.1007/s11139-009-9174-0>
- [14] Smoot, N.A. (2020) *Computer Algebra with the Fifth Operation: Applications of Modular Functions to Partition Congruences*. Ph.D. Thesis, Johannes Kepler University.
- [15] Ono, K. (2004) *The Web of Modularity: Arithmetic of the Coefficients of Modular Forms and  $q$ -Series*. American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/cbms/102>
- [16] Ono, K. (2000) Distribution of the Partition Function Modulo  $M$ . *The Annals of Mathematics*, **151**, 293-307. <https://doi.org/10.2307/121118>