Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(5), 192-203
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.165143

Hans汉斯

有旋空腔流自由边界的几何性质

高　芬

成都理工大学数学科学学院，四川 成都

收稿日期：2026年4月14日；录用日期：2026年5月12日；发布日期：2026年5月26日

摘　要

本文主要研究有旋空腔流自由边界的几何性质。通过建立无粘不可压缩有旋流的Euler方程组，结合滑移边界条件和质量通量条件，并引入流函数，将空腔流问题转化为自由边界问题，进一步发现，对于给定的平直的上管道壁，当障碍物对流体是凹的，那么自由边界对流体是严格凸的。本文的研究不仅完善了有旋空腔流的理论框架，还为相关工程应用提供了理论支持。通过严格的数学分析，揭示了有旋空腔流自由边界的几何特性，为相关领域的进一步研究奠定了基础。

关键词

有旋空腔流，自由边界，Euler方程组，几何性质

The Geometric Properties of the Free Boundary of the Rotational Cavity Flow

Fen Gao

School of Mathematical Sciences, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: April 14, 2026; accepted: May 12, 2026; published: May 26, 2026

Abstract

This paper primarily investigates the geometric properties of the free boundary of the rotational cavity flow. By formulating the Euler equations for inviscid, incompressible rotational flows, incorporating slip boundary conditions and mass flux conditions, and introducing a stream function, the cavity flow problem is transformed into a free boundary problem. Furthermore, we discover that the direction of fluid motion near the free boundary aligns with the geometric properties of the obstacle, and when the obstacle is concave to the flow field, the free boundary is convex. The research presented in this paper not only enhances the theoretical framework of rotational cavity flows but also provides theoretical support for related engineering applications. Through rigorous mathematical analysis, it reveals the geometric characteristics of the free boundary in rotational cavity

文章引用: 高芬. 有旋空腔流自由边界的几何性质[J]. 理论数学, 2026, 16(5): 192-203.
DOI: 10.12677/pm.2026.165143

flows, laying a foundation for further research in related fields.

Keywords

Rotational Cavity Flow, Free Boundaries, Euler System, Geometric Properties

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

自由边界问题是流体力学中一个古老的研究课题。近年来，流体力学中的自由流线问题，如喷流、空腔流、尾流和水波等，其理论研究受到数学家和物理学家的持续关注。H. Helmholtz [1]提出的自由流线理论是研究不可压缩喷流等自由边界问题的第一个数学理论。J. Leray [2]和 A. Weinstein [3]在管道是多边形的假设下，使用连续性方法建立了不可压缩喷流的存在性，通过弯曲管道喷流的存在性结果可以由对多边形管道的近似来得到。后来，R. Finn [4]把他们的结果推广到了一类凹对称管道。对于一般的星型管道，D. Gilbarg 在[5]中证明了喷流问题解的唯一性。其中思想都基于 Hodograph 变换、共形映射和不动点理论。然而，对于通过二维非对称或者三维轴对称一般管道的情形，Hodograph 变换方法和拟共形映照方法不再适用。20 世纪 80 年代，国际著名数学家 H. Alt，L. Caffarelli 和 A. Friedman 利用变分方法、几何测度论、Blow-up 技巧和椭圆方程的 Schauder 估计等建立了线性椭圆方程 Bernoulli 类型的自由边界的正则性[6]。随后，H. Alt，L. Caffarelli 和 A. Friedman 将其应用到具有自由边界的理想流体中，如轴对称喷流[7]、非对称喷流[8]、带重力的喷流[9]，并建立了相应的适定性结果。其他与自由边界问题相关的经典书籍可以参考([10]-[12])。管道流相关的论文可参见([13]-[16])。

另一方面，空腔流问题是自由边界研究领域的热点问题之一，它描述了流体在管道内遇到障碍物时空腔和自由边界的形成。1983 年，A. Friedman 研究了通过轴对称管道的有旋空腔流[17]和通过具有振荡管道壁的空腔流[18]。2017 年，程建峰，杜力力和张琴研究了二维无限长管道中具有非零旋度的空腔流[19]。王晓慧建立了通过二维无限长管道的可压缩亚音速空腔流的适定性[20]。陈贵强，M. Feldman 和向伟得到了势流的 Euler 方程的自相似跨音速冲击流[21]自由边界的凸性。到目前为止，关于自由边界几何形状的研究相对来说还比较少，鉴于其在工程和环境中的重要应用，本文的主要目的是证明有旋空腔流的自由边界的凸性。

2. 有旋空腔流

在本文中，我们将研究具有旋度的二维对称无粘不可压缩空腔流问题，该方程由下列 Euler 方程组控制：

$$\begin{cases} u_x + v_y = 0, \\ uu_x + vu_y + p_x = 0, \\ uv_x + vv_y + p_y = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 (u,v) 为速度场，p 为流体压强。

接下来，我们给定二维无限长直管道和障碍物。将管道上壁记为 $N: y = H$，障碍物上表面记为 $N_0: y = g(x)$，$x \in (0,a)$。其中 $g(x) \in C^{2,\alpha}([0,a])$，$\alpha \in (0,1)$。函数 $y = g(x)$ 满足

$$g(0)=0,\ g(a)=\max_{x\in[0,a]} g(x)=b>0. \tag{2}$$

为简单起见，我们给出如下记号：

对称轴 T：$\{(x,0)\,|\,-\infty<x\le 0, a\le x<+\infty\}$，

线段 I：$\{(0,y)\,|\,0\le y\le b\}$，

Γ：上自由边界，

G：以 N,N_0,T,Γ 为边界的流场。

$A=(a,b)$ 记为障碍物的顶点，$B=(0,0)$ 为障碍物的起点。

假设 N 和 N_0 是不渗透的，那么流场中的流体满足滑移边界条件：

$$\text{在 } N\cup N_0 \text{ 上 } (u,v)\cdot \boldsymbol{n}=0, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是边界的外法向。由于对称轴 T 和自由边界 Γ 是流线，因此，$T\cup\Gamma$ 上也满足边界条件(3)。假设穿过任意截面 S 的质量通量为常数 Q_0，即：

$$\int_S (u,v)\cdot \boldsymbol{l}\mathrm{d}S=Q_0, \tag{4}$$

$\boldsymbol{l}$ 是 S 在 x 正方向上的单位法向。

在 Euler 方程(1)的基础上，经过简单的计算，可以得出流体满足以下方程：

$$(u,v)\cdot\nabla\omega=0, \tag{5}$$

和

$$(u,v)\cdot\nabla\mathcal{B}=0. \tag{6}$$

其中 $\omega=v_x-u_y$ 为旋度，$\mathcal{B}=\dfrac{u^2+v^2}{2}+p$ 是 Bernoulli 常数。式(6)是所谓的 Bernoulli 定律。式(5)和式(6)表明旋度 ω 和 Bernoulli 常数 $\mathcal{B}$ 是沿流线的不变量。假设入口处的来流旋度为常数 $\omega=\omega_0$，则在整个流场中旋度 $\omega\equiv\omega_0$。

此外，我们假设自由边界上的压强是恒定的，即：

$$\text{在 } \Gamma \text{ 上 } p=p_e. \tag{7}$$

其中，p_e 为空腔流的尾端压强。

定义 2.1 (通过无限长管道的空腔流问题)设管道壁 $N: y=H$ 是平的，障碍物 N_0 满足条件(2)，那么对于任意给定的来流质量通量 $Q_0>0$，当来流旋度 ω_0 恒定时，无限长管道内存在光滑的不可压缩空腔流，该空腔流有唯一的光滑自由流线，从障碍物的顶点 $A=(a,b)$ 分离并向下游无限延伸吗？

接下来我们给出空腔流问题解的定义。

定义 2.2 我们称向量 (u,v,p,Γ) 为空腔流问题的解，如果它满足

(1) 自由边界 Γ 可以用非负光滑函数 $y=f(x)\in C^2((a,+\infty))$ 表示，且满足连续适定性条件

$$f(a-0)=g(a+0), \tag{8}$$

和光滑适定性条件

$$f'(a-0)=g'(a+0). \tag{9}$$

自由边界 Γ 上的速度用 q 表示，存在一个空腔数 $\lambda>0$，在 Γ 上

$$q=\sqrt{u^2+v^2}=\lambda. \tag{10}$$

(2) $(u,v,p)\in\left(C^{1,\alpha}(G)\cap C(\bar{G})\right)^3$ 是 Euler 方程组(1)的解，满足滑移边界条件(3)和质量通量条件(4)。

(3) 存在一个正常数 $h\in[0,H)$，使得

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=h. \tag{11}$$

我们称 h 是自由边界 Γ 的渐近高度。

定理 A：当管道上壁 $N: y=H$ 时，假设障碍物 N_0 满足条件(2)。那么，对于任意给定的来流质量通量 $Q_0>0$，并且 $Q_0>\frac{1}{2}\omega_0 H^2$，存在一个常数 $\lambda=\frac{1}{2}\omega_0(H-h)+\frac{Q_0}{H-h}$ 和一个空腔流问题的解 (u,v,p,Γ)，使得自由边界 $\Gamma: y=f(x)$ 单调递增且对流场是严格凸的(即 $f''(x)<0$)。自由边界的渐近高度 h 由 λ 唯一决定，而且 $h\ge b$，

$$\lambda=\frac{1}{2}\omega_0(H-h)+\frac{Q_0}{H-h}. \tag{12}$$

3. 流函数法

在本节中，我们用流函数方法将空腔流问题转化为关于流函数的自由边界问题，接着，利用截断法将无界的流场区域转化为有界的截断区域，并对截断变分问题进行研究。最后，给出一些引理，为研究自由边界的几何性质做准备。

为了解决通过无穷长管道的不可压缩空腔流问题，由 Euler 方程组(1)中的第一个方程－质量守恒方程可知，存在流函数 ψ，使得

$$u=\psi_y, v=-\psi_x. \tag{13}$$

通过 Euler 方程组和旋度条件可知，在流场中有

$$\Delta\psi=\psi_{xx}+\psi_{yy}=-\omega_0. \tag{14}$$

结合滑移边界条件(3)和质量通量条件(4)，我们假设流函数 ψ 满足如下 Dirichlet 边值条件：

$$\text{在 } N_0\cup T\cup\Gamma \text{ 上 } \psi=0,\ \text{在 } N \text{ 上 } \psi=Q_0. \tag{15}$$

因此空腔流的自由边界可以表示为

$$\Gamma=G'\cap\partial\{\psi>0\}\cap\{x>a\}. \tag{16}$$

其中 G' 是可能的流场，是由上管道壁 N，障碍物 N_0，对称轴 T 围成的区域。

由 Bernoulli 定律可知，在流线上有

$$\frac{|\nabla\psi|^2}{2}+p=B, \tag{17}$$

由于流体在自由边界上的速度是常数 λ，我们可以得到

$$\text{在 } \Gamma \text{ 上 } |\nabla\psi|=\left|\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right|=\sqrt{2(B-P_e)}=\lambda. \tag{18}$$

其中 $\boldsymbol{\nu}$ 是自由边界 Γ 的单位外法向量。因此，无粘不可压缩空腔流可以转化为下列关于流函数 ψ 的 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} 在\ G'\cap\{\psi>0\}\ 中\ \Delta\psi(x,y)=-\omega_0, \\ 在\ T\cup N_0\cup\Gamma\ 上\ \psi=0,\ 在\ N\ 上\ \psi=Q_0, \\ 在\ \Gamma\ 上\left|\dfrac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right|=\lambda. \end{cases}$$

为了解流函数 ψ 的边值问题，我们先定义一个关于参数 $\lambda>0$ 的变分问题，对应泛函

$$J_\lambda(\psi)=\int_{G'}\left(|\nabla\psi|^2+\lambda^2\chi_{\{\psi>0\}\cap E}-2\omega_0\psi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $E=\{(x,y)\,|\,x>a,0<y<H\}$，$\chi_A$ 是集合 A 的特征函数。容许集的定义如下：

$$K=\left\{\psi\in H^1_{loc}(G')\ 在\ N_0\cup T\ 上\ \psi=0,在\ N\ 上\ \psi=Q_0\right\}.$$

我们发现流场 G' 是一个无界区域，即对于任意的 $\psi\in K$，泛函 $J_\lambda(\psi)$ 是无界的，所以我们要对无界区域进行截断处理，来得到一个无限逼近该无界区域的有界区域。通过在截断的有界区域中使用变分法，对截断变分问题的极小元进行研究。

定义截断区域 $G_L=G'\cap\{-L\le x\le L\}$，其中 $L>a$。G_L 由 $N_L,N_0,T_L,\sigma_{1,L}$ 和 $\sigma_{2,L}$ 围成的，其中 $N_L=N\cap\{-L\le x\le L\}$ 是截断后的上管道壁，$\sigma_{1,L}=\{(-L,y)\,|\,0\le y\le H\}$ 是左边界，$\sigma_{2,L}=\{(L,y)\,|\,0\le y\le H\}$ 是右边界，$T_L=T\cap\{-L\le x\le L\}$ 是截断后的对称轴。$E_L=G_L\cap\{x>a\}$。

截断变分问题($P_{\lambda,L}$)：存在一个 $\psi_{\lambda,L}\in K_{\lambda,L}$，使得

$$J_{\lambda,L}(\psi_L)=\min_{\psi\in K_{\lambda,L}}J_{\lambda,L}(\psi).$$

那么对应的变分泛函

$$J_{\lambda,L}(\psi)=\int_{G_L}\left(|\nabla\psi|^2+\lambda^2\chi_{\{\psi>0\}\cap E_L}-2\omega_0\psi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

定义容许集

$$K_{\lambda,L}=\left\{\psi\in H^1(G_L)\,|\,在\ N_0\cup T\ 上\ \psi=0,在\ N\ 上\ \psi=Q_0,在\ \sigma_{1,L}\ 上\ \psi=\psi_1,在\ \sigma_{2,L}\ 上\ \psi=\psi_2\right\}.$$

此时，

$$\psi_1=\frac{1}{2}\omega_0(H-y)y+\frac{Q_0}{H}y,$$

$$\psi_2=\begin{cases} 当\ h_L<y\le H\ 时,-\dfrac{1}{2}\omega_0(y-h_L)^2+\lambda(y-h_L), \\ 当\ 0\le y\le h_L\ 时,0. \end{cases}$$

其中 h_L 由 $\lambda=\dfrac{1}{2}\omega_0(H-h_L)+\dfrac{Q_0}{H-h_L}$ 确定，在 $Q_0>\dfrac{1}{2}\omega_0H^2$ 的条件下 $0\le\psi_1,\psi_2\le Q_0$。

为了解决空腔流的自由边界问题，我们需要先找到截断变分问题的极小元。以文献([6] [16])中的方法为基础，下面我们给出极小元的存在性、唯一性和单调性的详细证明过程。

引理 3.1 对于任意 $L>a$ 截断的变分问题 $(P_{\lambda,L})$，我们将证明以下性质：

(1) 截断变分问题 $(P_{\lambda,L})$ 的极小元是存在的；

(2) 截断变分问题 $(P_{\lambda,L})$ 的极小元关于 y 单调递增，且极小元是唯一的；

(3) 截断变分问题 $(P_{\lambda,L})$ 的极小元关于 x 单调递减。

证明：(1) 在变分问题中想要证明极小元是存在的，需要同时满足三个条件：① 容许集 $K_{\lambda,L}$ 非空；

② $J_{\lambda,L}(\psi)$是强制的；③ $J_{\lambda,L}(\psi)$是弱下半连续的。

第一步：容许集$K_{\lambda,L}$非空。

假设存在一个函数$\psi_0 \in K_{\lambda,L}$使得$J_{\lambda,L}(\psi_0) < \infty$。取充分大的$x_0$，在$G' \cap \{x \geq x_0\}$上令$\bar{\phi}(x,y) = \min\left\{\max\left\{0, \lambda\left(y - f(x)\right) + Q_0\right\}, Q_0\right\}$。令函数$\psi_0$在$G'$中光滑，$\psi_0 \in K$，且在$G' \cap \{x \geq x_0\}$中与$\bar{\phi}$相等。那么我们有

$$
\begin{aligned}
J_{\lambda,L}(\psi_0) &= \int_{G_L \cap \{x \leq x_0\}} \left(\left|\nabla \psi_0\right|^2 + \lambda^2 X_{\{\psi_0 > 0\} \cap E_L} - 2\omega_0 \psi_0\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{G_L \cap \{x \geq x_0\}} \left(\left|\nabla \bar{\phi}\right|^2 + \lambda^2 X_{\{\bar{\phi} > 0\} \cap E_L} - 2\omega_0 \bar{\phi}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= J_1 + J_2.
\end{aligned}
$$

因为$G_L \cap \{x \leq x_0\}$和$G_L \cap \{x \geq x_0\}$是有界区域，且ψ_0是光滑有界的，那么J_1和J_2都是有界的，所以$J_{\lambda,L}(\psi) < \infty$。

第二步：强制性。

由于特征函数$\chi_{\{z>0\} \cap E_L}$取值为 0 或者 1，所以$\lambda^2 \int_{E_L} \chi_{\{z>0\} \cap E_L} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq 0$（其中$\lambda^2 > 0$），我们可以得到

$$
J_{\lambda,L}(\psi) \geq \int_{G_L} \left|\nabla \psi\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\omega_0 \int_{G_L} \psi \mathrm{d}x\mathrm{d}y,
$$

对不等式进行放缩，$J_{\lambda,L}(\psi) \geq \int_{G_L} \left|\nabla \psi\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\omega_0 \int_{G_L} |\psi| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$。对$\int_{G_L} |\psi| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$应用 Hölder 不等式：

$$
\int_{G_L} |\psi| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \left(\int_{G_L} 1^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2} \left(\int_{G_L} |\psi|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}
$$

记$|G_L|$为C_1，因此$\int_{G_L} |\psi| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq C_1 \|\psi\|_{L^2(G_L)}$，其中$G_L$是有界区域，测度$|G_L|$是有限常数。利用 Poincaré 不等式可知，存在一个仅依赖于区域的常数C_w，对于任意的$\psi \in G_L$有$\|\psi - \bar{\psi}\|_{L^2} \leq C_w \|\nabla \psi\|_{L^2}$，其中$\bar{\psi} = \frac{1}{|G_L|} \int_{G_L} \psi \mathrm{d}x\mathrm{d}y$是一个积分平均值，由三角不等式可得$\|\psi\|_{L^2} = \|(\psi - \bar{\psi}) + \bar{\psi}\|_{L^2} \leq \|\psi - \bar{\psi}\|_{L^2} + \|\bar{\psi}\|_{L^2}$，因为区域$G_L$有界，$\psi \in K$，所以在$G_L$中$|\psi| \leq M$，$|\bar{\psi}| = \left|\frac{1}{|G_L|} \int_{G_L} \psi \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leq \frac{1}{|G_L|} \int_{G_L} |\psi| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \frac{1}{|G_L|} \cdot M \cdot |G_L| = M$。$M$是一个常数。由$L^2$范数定义$\|\bar{\psi}\|_{L^2} = \sqrt{\int_{G_L} |\bar{\psi}|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y} = |\bar{\psi}| \cdot \sqrt{|G_L|} \leq M \cdot \sqrt{|G_L|} = C_2$，因此，$\|\psi\|_{L^2} \leq C_w \|\nabla \psi\|_{L^2} + C_2$，

$$
\begin{aligned}
J_{\lambda,L}(\psi) &\geq \|\nabla \psi\|_{L^2(G_L)}^2 - 2\omega_0 \cdot C_1 \left(C_w \|\nabla \psi\|_{L^2(G_L)} + C_2\right) \\
&\geq \|\nabla \psi\|_{L^2(G_L)}^2 - C_3 \|\nabla \psi\|_{L^2(G_L)} - C_4
\end{aligned}
$$

其中$C_3 = 2\omega_0 C_1 C_w$，$C_4 = 2\omega_0 C_2$。所以$\|\nabla \psi\|_{L^2} \to \infty$时，$J_{\lambda,L}(\psi) \to \infty$，所以泛函$J_{\lambda,L}(\psi)$是强制的。

第三步：弱下半连续性。

定义函数$L(p,z,x) = |p|^2 + \lambda^2 \chi_{\{z>0\} \cap E_L} - 2\omega_0 z$，其$(p,z,x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times G_L$中，$L(p,z,x)$有下界，现在验证$L$是凸函数。

对任意的$p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$，任意$t \in [0,1]$，那么有

$$
L\left(tp_1 + (1-t)p_2, z, x\right) \leq tL(p_1, z, x) + (1-t)L(p_2, z, x).
$$

注意到$\lambda^2 \chi_{\{z>0\} \cap E_L} - 2\omega_0 z$与$p$无关，我们先来验证$|p|^2$是凸的，直接计算可得

$$
\begin{aligned}
& t|p_1|^2+(1-t)|p_2|^2-|tp_1+(1-t)p_2|^2 \\
& =t|p_1|^2+(1-t)|p_2|^2-\left[t^2|p_1|^2+2t(1-t)p_1\cdot p_2+(1-t)^2|p_2|^2\right] \\
& =t(1-t)|p_1|^2+t(1-t)|p_2|^2-2t(1-t)p_1\cdot p_2 \\
& =t(1-t)\left(|p_1|^2+|p_2|^2-2p_1\cdot p_2\right) \\
& =t(1-t)|p_1-p_2|^2 \\
& \geq 0.
\end{aligned}
$$

这表明$|p|^2$是凸函数。

对$f(z)=-2\omega_0 z$项，ω_0是一个常数，任取$z_1,z_2\in\mathbb{R}$，$\theta\in[0,1]$，$z_\theta=\theta z_1+(1-\theta)z_2$。那么

$$
f(z_\theta)=f(\theta z_1+(1-\theta)z_2)=-2\omega_0(\theta z_1+(1-\theta)z_2);
$$

$$
\begin{aligned}
\theta f(z_1)+(1-\theta)f(z_2) &= \theta(-2\omega_0 z_1)+(1-\theta)(-2\omega_0 z_2) \\
&= -2\omega_0\theta z_1-2\omega_0(1-\theta)z_2 \\
&= -2\omega_0(\theta z_1+(1-\theta)z_2).
\end{aligned}
$$

所以$f(z_\theta)=\theta f(z_1)+(1-\theta)f(z_2)$，满足不等式$f(\theta z_1+(1-\theta)z_2)\leq\theta f(z_1)+(1-\theta)f(z_2)$，所以$-2\omega_0 z$是凸函数。

对$\chi_{\{z>0\}\cap E_L}$项，任取$z_1,z_2\in\mathbb{R}$，$s\in[0,1]$，令$z_t=sz_1+(1-s)z_2$。如果$z_s>0$，那么z_1和z_2不能同时为负，$\chi_{\{z_s>0\}\cap E_L}=1\leq t\chi_{\{z_1>0\}\cap E_L}+(1-t)\chi_{\{z_2>0\}\cap E_L}$；如果$z_s\leq 0$，那么$\chi_{\{z_s>0\}}=0\leq t\chi_{\{z_1>0\}}+(1-t)\chi_{\{z_2>0\}}$，因此$\chi_{\{z>0\}\cap E_L}$是凸函数。

综上$L(p,z,x)$是凸函数。

通过上面三步的证明可知截断变分问题的容许集是非空的，泛函满足强制性和弱下半连续性，所以变分问题$(P_{\lambda,L})$的极小元是存在的。

(2) 我们可以利用与文献[3]中类似的方法来证明极小元的唯一性和关于y的单调性，此处省略具体的证明过程。

(3) 截断变分问题$(P_{\lambda,L})$的极小元关于x单调递减。

假设$\psi_{\lambda,L}$是截断变分问题$(P_{\lambda,L})$的极小元，即

$$
J_{\lambda,L}(\psi_{\lambda,L})=\min_{\psi\in K_{\lambda,L}}J_{\lambda,L}(\psi).
$$

对于任意的$\tau>0$，定义函数$\psi^\tau_{\lambda,L}=\psi_{\lambda,L}(x+\tau,y)$。泛函$J^\tau_{\lambda,L}$对应的容许集$K^\tau_{\lambda,L}=\{\psi\mid\psi(x+\tau,y)\in K_{\lambda,L}\}$，平移后的区域$G^\tau_L(x,y)=\{(x,y)\mid(x+\tau,y)\in G_L\}$。将$\psi^\tau_{\lambda,L}(x,y)$在$G_L\setminus G^\tau_L$中延拓为0，$\psi^\tau_{\lambda,L}(x,y)$在$G^\tau_L\setminus G_L$中延拓为$\frac{Q_0}{H}y$，因此$\psi^\tau_{\lambda,L}\in K^\tau_{\lambda,L}$。

我们记$\psi^-=\min\{\psi^\tau_{\lambda,L},\psi_{\lambda,L}\}$，$\psi^+=\max\{\psi^\tau_{\lambda,L},\psi_{\lambda,L}\}$，可以得到$\psi^-\in K^\tau_{\lambda,L}$，$\psi^+\in K_{\lambda,L}$。由泛函的性质可得

$$
J^\tau_{\lambda,L}(\psi^-)+J_{\lambda,L}(\psi^+)=J^\tau_{\lambda,L}(\psi^\tau_{\lambda,L})+J_{\lambda,L}(\psi_{\lambda,L}).
$$

因为$\psi_{\lambda,L}$是原问题的极小元，$\psi^\tau_{\lambda,L}$是平移后问题的极小元，可以得到：

$$
J^\tau_{\lambda,L}(\psi^\tau_{\lambda,L})\leq J^\tau_{\lambda,L}(\psi^-),J_{\lambda,L}(\psi_{\lambda,L})\leq J_{\lambda,L}(\psi^+). \tag{19}
$$

将(19)代入恒等式可得

$$J_{\lambda,L}^{\tau}\left(\psi_{\lambda,L}^{\tau}\right)+J_{\lambda,L}\left(\psi_{\lambda,L}\right)=J_{\lambda,L}^{\tau}\left(\psi^{-}\right)+J_{\lambda,L}\left(\psi^{+}\right)\geq J_{\lambda,L}^{\tau}\left(\psi_{\lambda,L}^{\tau}\right)+J_{\lambda,L}\left(\psi_{\lambda,L}\right)$$

所以不等式必须取等，即

$$J_{\lambda,L}^{\tau}\left(\psi_{\lambda,L}^{\tau}\right)=J_{\lambda,L}^{\tau}\left(\psi^{-}\right),J_{\lambda,L}\left(\psi_{\lambda,L}\right)=J_{\lambda,L}\left(\psi^{+}\right).$$

这说明$\psi^{+}=\max\left\{\psi_{\lambda,L}^{\tau},\psi_{\lambda,L}\right\}$也是原问题的极小元。

极小元$\psi_{\lambda,L}$和$\psi_{\lambda,L}^{\tau}$分别满足$\Delta\psi_{\lambda,L}=-\omega_0$，$\psi_{\lambda,L}^{\tau}=-\omega_0$，两式相减得$\Delta\left(\psi_{\lambda,L}^{\tau}-\psi_{\lambda,L}\right)=0$。即函数$\mathcal{F}=\psi_{\lambda,L}^{\tau}-\psi_{\lambda,L}$在流场内是调和函数。假设存在点$X_0=\left(x_0,y_0\right)$，使得$\mathcal{F}\left(X_0\right)>0$，则在$X_0$附近$\psi^{+}=\psi_{\lambda,L}^{\tau}$，此时$\Delta\mathcal{F}=0$，$X_0$是$\mathcal{F}$的一个极大值点，利用强极值原理可知调和函数不可能在内部取得严格最小值，除非$\mathcal{F}$是常数。但是我们知道$\psi_{\lambda,L}$和$\psi_{\lambda,L}^{\tau}$满足不同的边界条件，不可能一样，所以假设不成立。因此，对于任意的$(x,y)\in G_L$，当$\tau>0$时$\psi_{\lambda,L}(x+\tau,y)\leq\psi_{\lambda,L}(x,y)$，极小元关于$x$单调递减得证。

当引理 3.1 成立时，自由边界$\Gamma_{\lambda,L}$可以用函数$y=f_{\lambda,L}(x)$表示，且$f_{\lambda,L}(x)$单调递增。由文献[6]中第 4 章、文献[7]中的第 9 节可知自由边界$\Gamma_{\lambda,L}:y=f_{\lambda,L}(x)$满足光滑适定性和连续适定性条件。利用文献[19]中定理 4.2 类似的证明方法可得，在流场的下游自由边界保持平性。当上管道是平直的，障碍物N_0的函数单调递增时，通过[16]中的类似论证，我们利用流函数关于x和y的单调性，可以得到障碍物N_0单调递增时在$\bar{G}\setminus B$中水平速度$u>0$，在$G\cup\Gamma$中垂直速度$v>0$。

变分问题P_λ：在容许集K中找到一个极小元ψ_λ，使得$J_\lambda\left(\psi_\lambda\right)=\min\limits_{\psi\in K}J_\lambda(\psi)$，其中容许集$K=\left\{\psi\in H_{loc}^{1}\left(G'\right)\mid 在\ N_0\cup T\ 上\ \psi=0, 在\ N\ 上\ \psi=Q_0\right\}$。

对于截断变分问题$\left(P_{\lambda,L)}\right)$的极小元$\psi_{\lambda,L}$，当$L\to\infty$时，$\psi$是变分问题$\left(P_\lambda\right)$的极小元。由于$y=f_{\lambda,L}(x)$单调递增，我们可以得到变分问题$\left(P_\lambda\right)$中的自由边界也单调递增(证明方法可参考文献[19]和[20]，此处我们省略具体的证明过程)。

4. 自由边界的几何性质

在本节中，为了研究自由边界的凸性，我们先给出自由流线上的流速q和曲率κ之间的关系，压强p在流场中是满足椭圆方程的。(有兴趣的读者可以参考[22]了解详细的证明，为了简短起见，我们在这里省略)。然后再利用极大值原理和 Hopf 引理等研究自由边界的形状。

引理 4.1 对任意$Q\in\left[0,Q_0\right]$，如果流线$W:\{\psi=Q:y=w(x)\}$是$C^{2,\alpha}$光滑的，则流线曲率κ与压强法向导数满足关系：$\dfrac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}=-\kappa q^2$，其向上的法向量$\boldsymbol{n}=\dfrac{\left(-w'(x),1\right)}{\sqrt{1+\left(w'(x)\right)^2}}$，流线$W$的曲率$\kappa=\dfrac{g''(x)}{\left(1+\left(g'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$。

引理 4.2 (1) 压强p的最小值在自由边界Γ上取得。

(2) 如果障碍物N_0满足条件(2)，且障碍物对流场是凹的，那么自由边界对流场是严格凸的，即

$$f''(x)<0,\ \ x\in(a,+\infty).$$

证明：(1) 已知压强p在流场中满足椭圆方程，由极值原理可知其最小值不能在流场内部取到。即可能在$N,N_0\setminus\{A,B\},T,\Gamma$或上游取到最小值。下面开始分情况讨论，并逐步证明在N,N_0,T和上游处压强p都不能取得最小值。因此，只要障碍物是凹的，那么压强p在自由边界上取得最小值。

情况一：压强p的最小值在$N,N_0\{A,B\},T$上取到，则可以分成三种情况来讨论。

① p在$X_0=\left(x_0,y_0\right)\in N_0\setminus\{A,B\}$处取到最小值。因为障碍物$N_0$是$C^{2,\alpha}$-光滑的，由椭圆正则性可得

ψ 和 p 在 X_0 点分别是 $C^{2,\alpha}$-光滑和 $C^{1,\alpha}$-光滑的。由 Hopf-引理可知在 X_0 点

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{n}}>0, \tag{20}$$

此时向上的法向量 $\boldsymbol{n}=-\frac{\left(-g'(x),1\right)}{\sqrt{1+\left(g'(x)\right)^2}}$，曲率 $\kappa=\frac{g''(x)}{\left(1+\left(g'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$。由于 N_0 是一条流线，由引理 4.1 可知：在 $N_0\setminus\{A,B\}$ 上 $\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}=-\kappa q^2=\frac{g''(x)}{\left(1+\left(g'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}q^2$，与此同时由(20)可知 $\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}>0$，且 $q^2\left(X_0\right)\ge u^2\left(X_0\right)>0$，所以 $g''\left(x_0\right)>0$，这与假设障碍物 N_0 对流场是凹的相矛盾。

② p 在 $X_0=\left(x_0,y_0\right)\in T$ 处取到最小值。由于 N_0 是一条流线，由 Hopf 引理可知在 X_0 点 $\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}>0$。已知在 T 上 $\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}}=-\kappa q^2>0$，这与 T 上的曲率 $\kappa=0$ 相矛盾。

③ p 在 $X_0=\left(x_0,y_0\right)\in N$ 处取到最小值。由于 N 是一条 $C^{2,\alpha}$-光滑的流线，利用与②相同的证明方法可以得到矛盾。

情况二：压强 p 的最小值在上游取到。当 $x\to-\infty$ 时，$(u,v,p)\to\left(\frac{Q_0}{H}+\frac{\omega_0}{2}(H-2y),0,p_{in}\right)$。由 Bernoulli 定律可知 $p_{in}+\frac{1}{2}\left(\frac{Q_0}{H}+\frac{\omega_0}{2}H\right)^2=p_e+\frac{1}{2}\lambda^2$，即 $p_{in}-p_e=\frac{1}{2}\left(\lambda^2-\left(\frac{Q_0}{H}+\frac{\omega_0}{2}H\right)^2\right)>0$，此时 $\lambda=\frac{Q_0}{H-h}+\frac{\omega_0}{2}(H-h)$。这与 $p_{in}=\inf\limits_{X\in\bar{G}}p(X)<p_e$ 矛盾。

情况三：压强 p 的最小值在拐点 $B=(0,0)$ 处取到。

压强 p 在 G 中满足椭圆方程 $\mathcal{L}_p=\left(\frac{p_x}{q^2}\right)_x+\left(\frac{p_y}{q^2}\right)_y=0$，偏转角 θ 在 G 中满足 $\partial_x\left(\theta_x q^2\right)+\partial_y\left(\theta_y q^2\right)=0$，由椭圆方程的极值原理知 $\inf\limits_{\partial G}\theta=\inf\limits_{\bar{G}}\theta\le\theta(x,y)\le\sup\limits_{\bar{G}}\theta=\sup\limits_{\partial G}\theta$，$\inf\limits_{\partial G}p=\inf\limits_{\bar{G}}p\le p(x,y)\le\sup\limits_{\bar{G}}p=\sup\limits_{\partial G}p$。

由于 $g(x)\in C^{2,\alpha}([0,a])$，这表明 T 和 N_0 不可能在 B 相切。由于我们无法直接定义在 B 处的法向量，现在假设 T 与 N_0 的切线 l 形成的角度 $\theta_0=\pi-\arctan g'(0)\in(0,\pi)$。建立一个 B 为极点，从 B 点出发沿 x 轴负方向为极轴的极坐标系。定义 B 点的邻域 $G_{B,\eta}=\{(r,\theta)\in G:|r|<\eta\}$，$\Omega_{B,\eta}=\{(r,\theta):|r|<\eta,-\delta<\theta<\theta_0+\delta\}$，$\delta>0$ 充分小。

定义辅助函数 $\mathcal{T}(r,\theta)=r^{1+\beta}\sin\frac{(\theta+\delta)\pi}{\theta_0+2\delta},\beta\in(0,1)$，

$\Delta\mathcal{T}=\mathcal{T}_{rr}+\frac{1}{r}\mathcal{T}_r+\frac{1}{r^2}\mathcal{T}_{\theta\theta}=\left[(1+\beta)^2-\frac{\pi^2}{\left(\theta_0+2\delta\right)^2}\right]r^{\beta-1}\sin\frac{(\theta+\delta)\pi}{\theta_0+2\delta}$，取 $\beta=\frac{\pi-\left(\theta_0+2\delta\right)}{2\left(\theta_0+2\delta\right)}>0$，则在 $G_{B,\eta}$ 中：

$$\Delta\mathcal{T}\le 0. \tag{21}$$

设 $\gamma=\{(r,\theta)\in G:|r|=\eta\}$。对小 $\eta>0$，定义 $\varepsilon=\inf\limits_{(r,\theta)\in\gamma}\frac{\mathcal{T}(r,\theta)}{Q_0}>0$，使得

$$在\ \gamma\ 上\ \mathcal{T}\ge\varepsilon\psi. \tag{22}$$

在 $T\cup N_0$ 上 $\psi=0,\mathcal{T}\ge 0$，所以

$$\text{在 } T \cup N_0 \text{ 上 } \mathcal{T} \ge \varepsilon\psi = 0. \tag{23}$$

结合(21)、(22)和(23)，我们得到

$$\begin{cases} \text{在 } G_{B,\eta} \text{ 中 } \Delta T \le 0, \\ \text{在 } \partial G_{B,\eta} \text{ 上 } T \ge \varepsilon\psi. \end{cases}$$

对 $T-\varepsilon\psi$ 应用 Phragmen-Lindelof 定理(线性椭圆方程在角点邻域的有界性估计)：由 $\Delta\psi = -\omega_0$ 得 $\Delta(\mathcal{T}-\varepsilon\psi) = \Delta\mathcal{T} - \varepsilon\Delta\psi = \Delta\mathcal{T} + \varepsilon\omega_0$，结合在 $\partial G_{B,\eta}$ 上 $\mathcal{T}-\varepsilon\psi \ge 0$，可以得到在 $G_{B,\eta}$ 中 $\mathcal{T}-\varepsilon\psi \ge 0$，即 $\psi(X) \le \dfrac{\mathcal{T}(X)}{\varepsilon} \le Cr^{1+\beta}$ （$C = \dfrac{1}{\varepsilon}$ 为常数)。

利用椭圆方程的正则性：由 $\psi \le Cr^{1+\beta}$ 可得 $\psi \in C^{1,\beta}(G_{B,\eta})$，故 $\left|\nabla\psi(B)\right| = \lim\limits_{X\to B}\dfrac{|\psi(X)|}{|X-B|} \le \lim\limits_{r\to 0}\dfrac{Cr^{1+\beta}}{r} = 0$。利用 Bernoulli 定律可知在拐点 B 处：$p(B) + \dfrac{1}{2}\left|\nabla\psi(B)\right|^2 = p_e + \dfrac{1}{2}\lambda^2$，因为 $\left|\nabla\psi(B)\right| = 0$，所以 $p(B) = p_e + \dfrac{1}{2}\lambda^2 > p_e$，这与假设矛盾。

综上，$p_{\min} = p_e$ 仅在自由边界 Γ 上取得。

因为压强 p 的最小值仅在自由边界 Γ 上取得，即 $p_{min} = p_e$。由强极值原理，在 G 内 $p > p_e$。

对 Γ 的法向量 $\boldsymbol{n}$，由 Hopf 引理可得 $\dfrac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} > 0$，此时 Γ 的曲率为 $\kappa_\Gamma = \dfrac{f''(x)}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$。压强的法向导数关系 $\dfrac{\partial p}{\partial \boldsymbol{n}} = -\kappa_\Gamma\lambda^2 = -\dfrac{f''(x)}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\lambda^2 > 0$，因为 $\lambda^2 > 0$，所以 $\dfrac{f''(x)}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} < 0$，因为分母 $\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} > 0$ 恒成立，所以 $f''(x) < 0$，即自由边界 Γ 对于流场是严格凸的。

5. 总结与展望

对于无限长直管道中通过固定障碍物的空腔流问题，我们用二维不可压缩方程 Euler 来表示，通过引入流函数，将空腔流问题转化为 Dirichlet 边值问题；利用截断将无界区域转化为有界区域，定义有界区域上的变分泛函，并对截断变分问题进行求解。我们证明了截断变分问题的极小元的存在性、唯一性和极小元关于 x 和 y 的单调性。其次，由于压强在流场中满足椭圆方程。由椭圆方程的极值原理、在角点邻域的有界性估计证明压强的最小值在自由边界上取得，且当障碍物对于流场是凹的时，自由边界对于流场是严格凸的。

当前对于二维不可压缩空腔流自由边界性质的研究仍存在诸多可拓展方向，结合流体力学偏微分方程的研究热点与工程实际需求，后续可从扩大研究对象的范围和注重理论研究的应用两个方面开展深入研究：一方面，后续可研究二维非对称及三维模型。针对二维非对称情形，研究管道非对称和障碍物形状非对称时自由边界的几何性质；对于三维模型，重点研究轴对称有旋空腔流的自由边界特性，完善空腔流的空间理论体系。此外，可研究通过复杂障碍物(如粗糙表面、分段凹凸结构)的有旋空腔流，分析障碍物几何特征与自由边界形状的关系。同时由于实际生活中的空腔流多为可压缩流，后续可将更多的研究重点放在可压缩有旋空腔流上，结合对应的 Euler 方程组，研究自由边界凸性，并建立不可压缩与可压缩有旋空腔流的理论关联。另一方面，注重理论研究的应用。基于现有理论结果，结合机械制造、航空航天、水利工程等实际场景，开展有旋空腔流的工程应用研究。例如，探究空腔流在金属切削冷却、飞

行器表面减阻、管道输送等领域的应用。通过工程实验来验证理论模型的准确性，同时根据实验结果修正理论知识，实现理论研究与工程应用的双向反馈，为实际工程中的流场优化、设备设计提供坚实的数学理论支撑。

综上所述，有旋空腔流问题的研究不仅有助于流体力学相关理论知识的丰富，也有助于生活中的工程学问题的解决。因此我们要结合理论知识、数值模拟和现实数据，实现从理想空腔流的研究逐步到解决现实空腔流问题的跨越。

参考文献

[1] Helmholtz, H. (1868) On Discontinuous Movements of Fluids. *The London*, *Edinburgh*, *and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, *Series* 4, **36**, 337-346. https://doi.org/10.1080/14786446808640073

[2] Leray, P.J. (1935) Les problems de representation conforme d'helmholz, theories des sillageset des proues. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **8**, 250-263. https://doi.org/10.1007/bf01199557

[3] Weinstein, A. (1924) Ein Hydrodynamischer Unitatssatz. *Mathematische Zeitschrift*, **19**, 265-275. https://doi.org/10.1007/bf01181077

[4] Finn, R. (1956) Some Theorems on Discontinuous Plane Fluid Motions. *Journal d' Analyse Mathématique*, **4**, 246-291. https://doi.org/10.1007/bf02787724

[5] Gilbarg, D. and Trudinger, N.S. (2001) Elliptic Partial Differential Equations of Second Order (Classics in Mathematics). Springer-Verlag.

[6] Alt, H.W. and Caffarelli, L.A. (1981) Existence and Regularity for a Minimum Problem with Free Boundary. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **325**, 105-144.

[7] Alt, H.W., Caffarelli, L.A. and Friedman, A. (1983) Axially Symmetric Jet Flows. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **81**, 97-149. https://doi.org/10.1007/bf00250648

[8] Alt, H.W., Caffarelli, L.A. and Friedman, A. (1982) Asymmetric Jet Flows. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **35**, 29-68. https://doi.org/10.1002/cpa.3160350103

[9] Alt, H.W., Caffarelli, L.A. and Friedman, A. (1982) Jet Flows with Gravity. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **331**, 58-103.

[10] Bers, L. (1958) Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics, Surveys in Applied Mathematics. Vol. 3, John Wiley and Sons, Inc.

[11] Berg, P.W. (1962) The Existence of Subsonic Helmholtz Flows of a Compressible Fluid. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **15**, 289-347. https://doi.org/10.1002/cpa.3160150302

[12] Chen, G.G., Deng, X. and Xiang, W. (2012) Global Steady Subsonic Flows through Infinitely Long Nozzles for the Full Euler Equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **44**, 2888-2919. https://doi.org/10.1137/11085325x

[13] Chen, G.G., Huang, F., Wang, T. and Xiang, W. (2019) Steady Euler Flows with Large Vorticity and Characteristic Discontinuities in Arbitrary Infinitely Long Nozzles. *Advances in Mathematics*, **346**, 946-1008. https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.02.002

[14] Cheng, J., Du, L. and Xiang, W. (2019) Compressible Subsonic Jet Flows Issuing from a Nozzle of Arbitrary Cross-section. *Journal of Differential Equations*, **266**, 5318-5359. https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.10.026

[15] Duan, B. and Luo, Z. (2013) Three-Dimensional Full Euler Flows in Axisymmetric Nozzles. *Journal of Differential Equations*, **254**, 2705-2731. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.01.008

[16] Duan, B. and Luo, Z. (2015) Subsonic Non-Isentropic Euler Flows with Large Vorticity in Axisymmetric Nozzles. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **430**, 1037-1057. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.05.023

[17] Friedman, A. (1983) Axially Symmetric Cavities in Rotational Flows. *Communications in Partial Differential Equations*, **8**, 949-997. https://doi.org/10.1080/03605308308820292

[18] Friedman, A. and Vogel, T.I. (1983) Cavitational Flow in a Channel with Oscillatory Wall. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **7**, 1175-1192. https://doi.org/10.1016/0362-546x(83)90050-0

[19] Cheng, J., Du, L. and Zhang, Q. (2017) Two-Dimensional Cavity Flow in an Infinitely Long Channel with Non-Zero Vorticity. *Journal of Differential Equations*, **263**, 4126-4155. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.05.013

[20] Wang, X. (2021) Compressible Subsonic Cavity Flow in a Nozzle. *Journal of Mathematical Physics*, **62**, Article ID: 011505. https://doi.org/10.1063/5.0022475

[21] Chen, G.G., Feldman, M. and Xiang, W. (2020) Convexity of Self-Similar Transonic Shocks and Free Boundaries for

the Euler Equations for Potential Flow. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **238**, 47-124. https://doi.org/10.1007/s00205-020-01528-0

[22] Cheng, J.F., Du, L.L. and Wang, Y.F. (2018) On Incompressible Oblique Impinging Jet Flows. *Journal of Differential Equations*, **265**, 4687-4748. https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.06.021