Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(5), 227-241
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.165146

Hans汉斯

两类三对角矩阵的谱和特征向量

康佳慧[*]，**王晓元**[#]

大连交通大学基础部，辽宁 大连

收稿日期：2026年4月17日；录用日期：2026年5月15日；发布日期：2026年5月28日

摘 要

本文利用组合计算技巧推导出两类三对角矩阵 A_n 和 B_n 的谱，左、右特征向量，建立它们的正交性，进一步通过初等行列变换给出相应特征向量构成的矩阵行列式的封闭表达式。

关键词

三对角矩阵，谱，左特征向量，右特征向量

Spectra and Eigenvectors of Two Types of Tridiagonal Matrices

Jiahui Kang[*], **Xiaoyuan Wang**[#]

Department of Foundational Courses, Dalian Jiaotong University, Dalian Liaoning

Received: April 17, 2026; accepted: May 15, 2026; published: May 28, 2026

Abstract

This paper employs combinatorial computation techniques to derive the spectra, left and right eigenvectors of two classes of tridiagonal matrices, and establishes their orthogonality. Furthermore, closed-form expressions for the determinants of matrices formed by the corresponding eigenvectors are provided through elementary row and column transformations.

Keywords

Tridiagonal Matrix, Spectra, Left Eigenvector, Right Eigenvector

[*]第一作者。
[#]通讯作者。

文章引用: 康佳慧, 王晓元. 两类三对角矩阵的谱和特征向量[J]. 理论数学, 2026, 16(5): 227-241.
DOI: 10.12677/pm.2026.165146

1. 引言

三对角矩阵是一类具有特殊结构的稀疏矩阵，其非零元素仅分布在主对角线及相邻的两条次对角线上。它们出现在数值分析、图像识别、人脸识别、彩色图像处理等众多领域；同时，它们与正交多项式、组合数学、图论等纯数学分支有着深刻联系。正是这种“既基础又实用”的双重属性，使得三对角矩阵成为线性代数中经久不衰的研究对象。

1854 年，Sylvester [1]研究了一类特殊的三对角矩阵，后人称之为 Sylvester 矩阵或 Sylvester-Kac 矩阵，其元素定义为

$$\tau_{i,j}=\begin{cases}x, & i=j;\\ j, & j-i=1;\\ n-j, & i-j=1;\\ 0, & |i-j|>1,\end{cases}$$

Sylvester 给出了这类矩阵的行列式计算公式

$$\det_{0\le i,j\le n}\left[\tau_{i,j}\right]=\prod_{k=0}^{n}\left(x+n-2k\right),$$

但未给出证明。后续对其进行论证和推广的工作可参见文献[2]-[4]等。Muir [2]指出 Mazaa 在 1866 年给出了第一个完整证明。20 世纪中叶，Kac [5]给出了系统的证明，同时推导出特征多项式的一般表达式，从而深化了对该矩阵谱性质的理解。进入 21 世纪，三对角矩阵的研究进入快速深化与拓展阶段，Askey [6]和 Holtz [7]进一步将 Sylvester 矩阵推广到 Krawtchouk 多项式、Hahn 多项式等正交多项式体系。2008 年，Chu 和 Wang [8]明确了三对角矩阵的特征向量结构。2010 年，Chu [9]结合斐波那契多项式研究了 Sylvester 三对角矩阵行列式。在 2024 年，Du [10]不仅对具有二次谱的 Sylvester-Kac 矩阵展开系统性研究，还深入探讨了次对角线存在双周期扰动的 Sylvester-Kac 型矩阵的特征值问题。文献中有大量论文研究了各类 Sylvester 矩阵，重点关注行列式、逆矩阵、特征多项式和谱等性质[11]-[18]。这些成果反映了学界对拓展 Sylvester 矩阵的应用范围与理论意义所保持的持续兴趣。

一般而言，三对角矩阵的特征值很少能表示为封闭形式，大多数已知的例子都是 Sylvester 矩阵中对角线、两条次对角线上的元素替换成行(或列)指标 i 和阶数 n 的线性函数[19] [20]。2019 年，Finbarr Holland，Thomas Laffey and Roger Smyth 在文献[21]中提出了如下问题：设 n 是一个正整数，确定 $n\times n$ 阶三对角矩阵 A_n，其元素为

$$a_{i,j}=\begin{cases}-2j\left(1+n-j\right), & i=j;\\ j\left(1+n-j\right), & i=j\pm 1;\\ 0, & |i-j|>1,\end{cases}$$

的特征值。本文不仅给出其特征值，还通过一些组合技巧计算出它的特征向量。同时，借助 Mathematica 命令，检测到另一类三对角矩阵 B_n，其元素为

$$b_{i,j}=\begin{cases}\lambda+2j(n-j), & i=j;\\ j(n-j), & |i-j|=1;\\ 0, & |i-j|>1,\end{cases}$$

的谱和特征向量。因此，本文将利用错项相消法、范德蒙卷积公式等组合计算技巧，研究两类 $n\times n$ 阶三对角矩阵 A_n 和 B_n 的谱，左、右特征向量及它们的正交性，并通过矩阵初等行列变换计算出由左和右特征向量构成的矩阵行列式的封闭表达式。

2. 三对角矩阵 A_n 的谱和特征向量

定义一个 $n\times n$ 阶三对角矩阵 A_n，其元素为

$$a_{i,j}=\begin{cases}-2j(1+n-j), & i=j;\\ j(1+n-j), & i=j\pm1;\\ 0, & |i-j|>1,\end{cases}$$

则有以下命题成立。

定理 1 对于一个正整数 n，三对角矩阵 A_n 满足如下结论：

(a) A_n 的特征值为 $\left\{\lambda_k:=-k(k+1)\right\}_{k=1}^{n}$。

(b) 左特征向量：$\boldsymbol{u}_k=\left(u_k(1),u_k(2),\cdots,u_k(n)\right)$，其中

$$u_k(j)=\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-j}\binom{i}{k}\binom{n+k-i}{k}\binom{k-1}{i+j-n-1}。$$

(c) 右特征向量：$\boldsymbol{v}_k=\left(v_k(1),v_k(2),\cdots,v_k(n)\right)$，其中

$$v_k(i)=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-k}\binom{i-1}{j-1}\binom{n-i}{k-j}\binom{k+1}{j}。$$

(d) 正交关系：$\left\langle \boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{v}_j\right\rangle=(-1)^{n+i}\chi(i=j)\binom{2i}{i}\binom{1+n+i}{1+2i}$。

(e) 行列式：

$$\det U_n=\frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{n+1}\prod_{k=1}^{n}\binom{2k}{k}\ 和\ \det V_n=\prod_{k=1}^{n}\binom{2k}{k},$$

其中矩阵 U_n 和 V_n 定义为

$$U_n=\left[u_k(j)\right]_{1\le k,j\le n},\quad V_n=\left[v_k(i)\right]_{1\le i,k\le n}。$$

证明 首先证明(a)和(b)。令 $\boldsymbol{u}_k$ 是对应于特征值 λ_k 的左特征向量，即满足

$$\lambda_k u_k(j)=\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}u_k(i)=a_{j-1,j}u_k(j-1)+a_{j,j}u_k(j)+a_{j+1,j}u_k(j+1),$$

等价于

$$j(1+n-j)\left\{u_k(j-1)-2u_k(j)+u_k(j+1)\right\}=-k(k+1)u_k(j)。\tag{1}$$

利用二项式关系式

$$\binom{k-1}{i+j-n-2}+2\binom{k-1}{i+j-n-1}+\binom{k-1}{i+j-n}=\binom{k+1}{i+j-n},$$

(1)式可以进一步化为二项式恒等式

$$0=\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-j}\binom{i}{k}\binom{n+k-i}{k}\binom{k+1}{i+j-n}\times\left[j(n+1-j)-(i+j-n)(k-i-j+n+1)\right]。\tag{2}$$

接下来，定义序列 T_i 为

$$T_i=(k+1)^2\binom{i}{k+1}\binom{n+k-i+1}{k+1}\binom{k}{i+j-n-1},$$

利用错项相消法，不难计算出

$$T_i+T_{i+1}=\binom{i}{k}\binom{n+k-i}{k}\binom{k+1}{i+j-n}\times\left\{j(n+1-j)-(i+j-n)(k-i-j+n+1)\right\},$$

于是(2)式可以表示为

$$\begin{aligned}&\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-j}\binom{i}{k}\binom{n+k-i}{k}\binom{k+1}{i+j-n}\times\left[j(n+1-j)-(i+j-n)(k-i-j+n+1)\right]\\&=\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-j}\left\{T_i+T_{i+1}\right\}=(-1)^{k-j}T_k+(-1)^{n-j}T_{n+1}=0+0=0,\end{aligned}$$

则(a)和(b)得证。

类似地，(a)和(c)即是确定 $\boldsymbol{v}_k$ 是 λ_k 的右特征向量。由于

$$\lambda_k v_k(i)=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}v_k(j)=a_{i,i-1}v_k(i-1)+a_{i,i}v_k(i)+a_{i,i+1}v_k(i+1),$$

即

$$a_{i,i-1}v_k(i-1)+a_{i,i+1}v_k(i+1)=\left\{\lambda_k-a_{i,i}\right\}v_k(i)。\tag{3}$$

根据线性关系

$$(n-i+2)\binom{n-i+1}{k-j}=(n-i+k-j+2)\binom{n-i}{k-j}+(k-j+1)\binom{n-i}{k-j-1},$$

(3)式中的第一项化为

$$\begin{aligned}a_{i,i-1}v_k(i-1)&=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-k}\binom{i-1}{j-1}\binom{n-i+1}{k-j}\binom{k+1}{j}(i-j)(n-i+2)\\&=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-k}\binom{i-1}{j-1}\binom{n-i}{k-j}\binom{k+1}{j}(i-j)(n-i+k-j+2)\\&\quad+\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-k}\binom{i-1}{j-1}\binom{n-i}{k-j-1}\binom{k+1}{j}(i-j)(k-j+1),\end{aligned}$$

上式中最后求和指标 $j\to j-1$，得到表达式

$$a_{i,i-1}v_k(i-1)=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-k}\binom{i-1}{j-1}\binom{n-i}{k-j}\binom{k+1}{j}\times\left\{(i-j)(n-i+k-j+2)-j(j-1)\right\}。\tag{4}$$

再通过关系式

$$(i+1)\binom{i}{j-1}=(i+j)\binom{i-1}{j-1}+j\binom{i-1}{j-2},$$

(3)式中的第二项化为

$$
\begin{aligned}
a_{i,i+1}v_k(i+1) &= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-k}\binom{i}{j-1}\binom{n-i}{k-j}\binom{k+1}{j}(i+1)(n-i-k+j) \\
&= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-k}\binom{i-1}{j-1}\binom{n-i}{k-j}\binom{k+1}{j}(i+j)(n-i-k+j) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-k}\binom{i-1}{j-2}\binom{n-i}{k-j}\binom{k+1}{j}j(n-i-k+j),
\end{aligned}
$$

上式最后求和指标 $j \to j+1$，得到表达式

$$
a_{i,i+1}v_k(i+1) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-k}\binom{i-1}{j-1}\binom{n-i}{k-j}\binom{k+1}{j}\times\left\{(i+j)(n-i-k+j)-(k-j)(k-j+1)\right\}。 \tag{5}
$$

将(4)和(5)代入(3)式左端，并计算出

$$
\begin{aligned}
&(i-j)(n-i+k-j+2)-j(j-1)+(i+j)(n-i-k+j)-(k-j)(k-j+1) \\
&= 2i(1+n-i)-k(k+1) = \lambda_k - a_{i,i},
\end{aligned}
$$

则(a)和(c)得证。

为了证明(d)中的正交关系，将标量积写成三重求和形式

$$
\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} u_i(k)v_j(k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=i}^{n}(-1)^{l-k}\binom{l}{i}\binom{n+i-l}{i}\binom{i-1}{k+l-n-1}\times\sum_{s=1}^{j}(-1)^{s-j}\binom{k-1}{s-1}\binom{n-k}{j-s}\binom{j+1}{s}。 \tag{6}
$$

由于

$$
\boldsymbol{u}_i A_n \boldsymbol{v}_j = \langle \boldsymbol{u}_i A_n, \boldsymbol{v}_j \rangle = \lambda_i \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \langle \boldsymbol{u}_i, A_n \boldsymbol{v}_j \rangle = \lambda_j \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle,
$$

可得

$$
\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 0，\quad i \neq j，\quad \lambda_i \neq \lambda_j。
$$

当 $i = j$ 时，交换求和顺序，于是(6)式可以表示为

$$
\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle = \sum_{l=i}^{n}\sum_{s=1}^{i}\binom{l}{i}\binom{n+i-l}{i}\binom{i+1}{s}\times\sum_{k=1}^{n}(-1)^{l+s+k+i}\binom{k-1}{s-1}\binom{i-1}{k+l-n-1}\binom{n-k}{i-s}。
$$

对于一个自然数 n，n 阶差分定义为

$$
\Delta^n f(x) = \Delta\left\{\Delta^{n-1} f(x)\right\},
$$

可以将其表示为 Newton-Gregory 公式[22]

$$
\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k} f(x+k),
$$

特别地，当 $p_m(x)$ 是一个首项系数为 c_m 且次数为 $m \le n$ 的多项式，有如下常用的性质：

$$
\Delta^n p_m(x) = n!c_n\chi(m=n) \text{ 和 } \Delta^n \frac{p_m(x)}{x-\lambda} = (-1)^n \frac{n!p_m(\lambda)}{(x-\lambda)_{n+1}},
$$

其中 χ 表示通常的逻辑函数，满足 $\chi(\text{true}) = 1$，$\chi(\text{false}) = 0$。

于是，将上述最后一个求和指标 $k \to k-l+n+1$，利用有限差分公式得到

$$\left\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j \right\rangle = (-1)^{n+s} \sum_{l=i}^{n} \sum_{s=1}^{i} \binom{l}{i} \binom{n+i-l}{i} \binom{i+1}{s} \times \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^{i+k+1} \binom{i-1}{k} \binom{k-l+n}{s-1} \binom{l-k-1}{i-s}$$

$$= (-1)^{n+i} \sum_{l=i}^{n} \sum_{s=1}^{i} \binom{l}{i} \binom{n+i-l}{i} \binom{i+1}{s} \times \Delta^{i-1} \left\{ \binom{n-l}{s-1} \binom{i-s-l}{i-s} \right\}$$

$$= (-1)^{n+i} \sum_{s=1}^{i} \binom{i+1}{s} \binom{i-1}{i-s} \sum_{l=i}^{n} \binom{l}{i} \binom{n+i-l}{i}。$$

注意到结果中的两个求和项均可以通过范德蒙卷积公式

$$\binom{\alpha+\gamma}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \binom{\gamma}{n-k} \text{和} \binom{\alpha+\gamma}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha+k}{k} \binom{\gamma-k-1}{n-k}$$

计算，即有

$$\sum_{s=1}^{i} \binom{i+1}{s} \binom{i-1}{i-s} = \binom{2i}{i} \text{和} \sum_{l=i}^{n} \binom{l}{i} \binom{n+i-l}{i} = \binom{1+n+i}{1+2i},$$

那么

$$\left\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j \right\rangle = (-1)^{n+i} \binom{2i}{i} \binom{1+n+i}{1+2i},$$

则(d)得证。

为了证明(e)中的行列式 $\det U_n$，将三项关系式(1)改写为

$$u_k(j-1) - 2u_k(j) + u_k(j+1) = \frac{-k(k+1)}{j(n+1-j)} u_k(j),$$

将上述行列式中的第 $j-1$ 行和第 j 行的-2 倍加到第 $j+1$ 行，得到

$$\det U_n = (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j(n-j+1)} \times \det_{1 \le k \le n} \begin{bmatrix} u_k(1) \\ k(k+1)u_k(1) \\ k(k+1)u_k(2) \\ \vdots \\ k(k+1)u_k(n-2) \\ k(k+1)u_k(n-1) \end{bmatrix},$$

利用同样的初等行变换，进一步得到

$$\det U_n = (-1)^{(n-1)+(n-2)} \prod_{k=1}^{2} \prod_{j=1}^{n-k} \frac{1}{j(n-j+1)} \times \det_{1 \le k \le n} \begin{bmatrix} u_k(1) \\ k(k+1)u_k(1) \\ k^2(k+1)^2 u_k(1) \\ \vdots \\ k^2(k+1)^2 u_k(n-3) \\ k^2(k+1)^2 u_k(n-2) \end{bmatrix},$$

反复这样迭代 $n-1$ 次，推得公式

$$\det U_n = (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n-k} \frac{1}{j(n+1-j)} \times \det_{\substack{0 \le j \le n-1 \\ 1 \le k \le n}} \left[k^j (k+1)^j \right] \prod_{k=1}^{n} u_k(1)。$$

由于

$$\prod_{k=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{n-k}\frac{1}{j(n+1-j)}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k!}{(n-k)!n!}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n!},$$

$$\det_{\substack{0\le j\le n-1\\1\le k\le n}}\left[k^j(k+1)^j\right]=\prod_{1\le j<k\le n}\{k(k+1)-j(j+1)\}=\prod_{1\le j<k\le n}(k-j)(k+j+1)=\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)!(k-1)!}{(k+1)!},$$

$$\prod_{k=1}^{n}u_k(1)=\prod_{k=1}^{n}(-1)^{n-1}\binom{n}{k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{n!}{k!k!},$$

将它们相乘后计算出

$$\det U_n=\frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{n+1}\prod_{k=1}^{n}\binom{2k}{k}。$$

最后，证明(e)中的行列式 $\det V_n$，需要将三项关系式(3)改写为

$$\frac{(i-1)(n-i+2)}{(i+1)(n-i)}v_k(i-1)-\frac{2i(n-i+1)}{(i+1)(n-i)}v_k(i)+v_k(i+1)=\frac{-k(k+1)}{(i+1)(n-i)}v_k(i),$$

利用行列式的性质，将第 $i-1$ 行和第 i 行分别乘以 $\frac{(i-1)(n-i+2)}{(i+1)(n-i)}$ 和 $-\frac{2i(n-i+1)}{(i+1)(n-i)}$ 加到第 $i+1$ 行，得到

$$\det V_n=(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(i+1)(n-i)}\times\det_{1\le k\le n}\begin{bmatrix}v_k(1)\\k(k+1)v_k(1)\\k(k+1)v_k(2)\\\vdots\\k(k+1)v_k(n-2)\\k(k+1)v_k(n-1)\end{bmatrix},$$

继续上述操作，得到

$$\det V_n=(-1)^{(n-1)+(n-2)}\prod_{k=1}^{2}\prod_{i=1}^{n-k}\frac{1}{(i+1)(n-i)}\times\det_{1\le k\le n}\begin{bmatrix}v_k(1)\\k(k+1)v_k(1)\\k^2(k+1)^2v_k(1)\\\vdots\\k^2(k+1)^2v_k(n-3)\\k^2(k+1)^2v_k(n-2)\end{bmatrix},$$

反复迭代 $n-1$ 次，获得公式

$$\det V_n=(-1)^{\binom{n}{2}}\prod_{k=1}^{n-1}\prod_{i=1}^{n-k}\frac{1}{(i+1)(n-i)}\times\det_{\substack{0\le i\le n-1\\1\le k\le n}}\left[k^i(k+1)^i\right]\prod_{k=1}^{n}v_k(1)。$$

由于

$$\prod_{k=1}^{n-1}\prod_{i=1}^{n-k}\frac{1}{(i+1)(n-i)}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(k-1)!}{(n-k+1)!(n-1)!}=\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-1)!},$$

$$\det_{\substack{0\le i\le n-1\\1\le k\le n}}\left[k^i(k+1)^i\right]=\prod_{1\le i<k\le n}(k-i)(k+i+1)=\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)!(k-1)!}{(k+1)!},$$

$$\prod_{k=1}^{n}v_k(1)=(-1)^{\binom{n}{2}}\prod_{k=1}^{n}(k+1)\binom{n-1}{k-1}=(-1)^{\binom{n}{2}}(n+1)!\prod_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1},$$

将它们相乘后计算出

$$\det V_n=\frac{(n+1)!}{n!}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)!}{(k+1)!(n-k)!}=\prod_{k=1}^{n}\binom{2k}{k}。$$

3. 三对角矩阵 B_n 的谱和特征向量

定义一个 $n\times n$ 阶的三对角矩阵 B_n，其元素为

$$b_{i,j}=\begin{cases}\lambda+2j(n-j), & i=j;\\ j(n-j), & |i-j|=1;\\ 0, & |i-j|>1,\end{cases}$$

则有以下命题成立。

定理 2 对于一个正整数 n，三对角矩阵 B_n 满足如下结论：

(a) B_n 的特征值为 $\left\{\lambda_k:=\lambda+k(k-1)\right\}_{k=0}^{n}$。

(b) 左特征向量：$\boldsymbol{u}_k=\left(u_k(0),u_k(1),\cdots,u_k(n)\right)$，其中

$$\begin{aligned}u_k(j)=&(-1)^j\chi(k=0)+(-1)^j(n-j)\chi(k=1)\\&+\chi(k\ge 2)\sum_{i=k}^{n}(-1)^{n-i}\binom{i-1}{k-1}\binom{n-i+k-1}{k-1}\binom{k-2}{i+j-n-1}。\end{aligned}$$

(c) 右特征向量：$\boldsymbol{v}_k=\left(v_k(0),v_k(1),\cdots,v_k(n)\right)$，其中

$$\begin{aligned}v_k(i)=&\chi(0<i<n)\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{n-k+i+j}\binom{i-1}{j-1}\binom{n-i-1}{k-j-1}\binom{k}{j}\\&+\chi(i=0)\times\begin{cases}k, & k=0,1\\(-1)^{n-k}\binom{n-1}{k-1}, & k>1\end{cases}+\chi(i=n)\times\begin{cases}1-k, & k=0,1\\\binom{n-1}{k-1}, & k>1。\end{cases}\end{aligned}$$

(d) 矩阵乘积：

$$U_nV_n=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n & 1\\0 & n\end{pmatrix} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & W_{n-1}\end{bmatrix}\text{且 }U_nB_nV_n=U_nV_nD_n,$$

其中矩阵 U_n 和 V_n 定义为

$$U_n=\left[u_k(j)\right]_{0\le k,j\le n},\quad V_n=\left[v_k(i)\right]_{0\le i,k\le n},$$

并且 D_n 和 W_{n-1} 都是对角矩阵

$$D_n = Diag\left[\lambda + k(k-1) : 0 \le k \le n\right], \quad W_{n-1} = \left[\chi(i=j)(-1)^{n-i}\binom{2i-2}{i-1}\binom{n+i-1}{2i-1}\right]_{2\le i,j\le n} 。$$

(e) 行列式：

$$\det U_n = \prod_{k=1}^{n-1}\binom{2k}{k} \text{和} \det V_n = (-1)^{\binom{n+2}{2}}\prod_{k=1}^{n-1}\binom{2k}{k} 。$$

证明 首先证明(a)和(b)。令 $\boldsymbol{u}_k$ 是对应于特征值 λ_k 的左特征向量，即满足

$$\lambda_k u_k(j) = \sum_{i=0}^{n} b_{ij} u_k(i) = b_{j-1,j} u_k(j-1) + b_{j,j} u_k(j) + b_{j+1,j} u_k(j+1),$$

等价于

$$j(n-j)\left[u_k(j-1) + 2u_k(j) + u_k(j+1)\right] = k(k-1)u_k(j) 。 \tag{7}$$

当 $k=0$ 和 $k=1$ 时，不难验证(7)式成立。

当 $k \ge 2$ 时，由于

$$u_k(j) = \sum_{i=k}^{n}(-1)^{n-i}\binom{i-1}{k-1}\binom{n-i+k-1}{k-1}\binom{k-2}{i+j-n-1},$$

利用二项式关系式

$$\binom{k-2}{i+j-n} + 2\binom{k-2}{i+j-n-1} + \binom{k-2}{i+j-n-2} = \binom{k}{i+j-n},$$

(7)式可以进一步化为二项式恒等式

$$0 = \sum_{i=k}^{n}(-1)^{n-i}\binom{i-1}{k-1}\binom{n-i+k-1}{k-1}\binom{k}{i+j-n}\times\left\{j(n-j) - (i+j-n)(k-i-j+n)\right\} 。 \tag{8}$$

接下来，定义序列 T_i 为

$$T_i = k^2\binom{i-1}{k}\binom{n+k-i}{k}\binom{k-1}{i+j-n-1},$$

利用错项相消法，不难计算出

$$T_i + T_{i+1} = \binom{i-1}{k-1}\binom{n-i+k-1}{k-1}\binom{k}{i+j-n}\times\left\{j(n-j) - (i+j-n)(k-i-j+n)\right\},$$

于是，(8)式可以表示为

$$\begin{aligned}&\sum_{i=k}^{n}(-1)^{n-i}\binom{i-1}{k-1}\binom{n-i+k-1}{k-1}\binom{k}{i+j-n}\times\left\{j(n-j) - (i+j-n)(k-i-j+n)\right\}\\&= \sum_{i=k}^{n}(-1)^{n-i}\left\{T_i + T_{i+1}\right\} = (-1)^{n-k}\, T_k + T_{n+1} = 0 + 0 = 0,\end{aligned}$$

故(a)和(b)得证。

类似地，(a)和(c)即是确定 $\boldsymbol{v}_k$ 是 λ_k 的右特征向量。由于

$$\lambda_k v_k(i) = \sum_{j=0}^{n} b_{i,j} v_k(j) = b_{i,i-1} v_k(i-1) + b_{i,i} v_k(i) + b_{i,i+1} v_k(i+1),$$

即

$$b_{i,i-1}v_k(i-1)+b_{i,i+1}v_k(i+1)=\{\lambda_k-b_{i,i}\}v_k(i)。 \tag{9}$$

当 $0<i<n$ 时，由于

$$v_k(i)=\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{n-k+i+j}\binom{i-1}{j-1}\binom{n-i-1}{k-j-1}\binom{k}{j},$$

根据关系

$$(n-i+1)\binom{n-i}{k-j-1}=(n-i+k-j)\binom{n-i-1}{k-j-1}+(k-j)\binom{n-i-1}{k-j-2},$$

(9)式中的第一项可写为

$$\begin{aligned}b_{i,i-1}v_k(i-1)&=\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{n-k+i+j}\binom{i-1}{j-1}\binom{n-i}{k-j-1}\binom{k}{j}(j-i)(n-i+1)\\&=\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{n-k+i+j}\binom{i-1}{j-1}\binom{n-i-1}{k-j-1}\binom{k}{j}(j-i)(n-i+k-j)\\&\quad+\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{n-k+i+j}\binom{i-1}{j-1}\binom{n-i-1}{k-j-2}\binom{k}{j}(j-i)(k-j),\end{aligned}$$

将上式中最后求和指标 $j\to j-1$，得到表达式

$$b_{i,i-1}v_k(i-1)=\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{n-k+i+j}\binom{i-1}{j-1}\binom{n-i-1}{k-j-1}\binom{k}{j}\times\{(j-i)(n-i+k-j)+j(j-1)\}。 \tag{10}$$

再通过关系式

$$(i+1)\binom{i}{j-1}=(i+j)\binom{i-1}{j-1}+j\binom{i-1}{j-2},$$

可将(9)中的第二项化为

$$\begin{aligned}b_{i,i+1}v_k(i+1)&=\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{n-k+i+j}\binom{i}{j-1}\binom{n-i-1}{k-j-1}\binom{k}{j}(i-j+k-n)(i+1)\\&=\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{n-k+i+j}\binom{i-1}{j-1}\binom{n-i-1}{k-j-1}\binom{k}{j}(i+j)(i+k-n-j)\\&\quad+\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{n-k+i+j}\binom{i-1}{j-2}\binom{n-i-1}{k-j-1}\binom{k}{j}j(i-j+k-n),\end{aligned}$$

上式最后求和指标 $j\to j+1$，得到另一个表达式

$$b_{i,i+1}v_k(i+1)=\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{n-k+i+j}\binom{i-1}{j-1}\binom{n-i-1}{k-j-1}\binom{k}{j}\times\{(i+j)(i+k-n-j)+(k-j)(k-j-1)\}。 \tag{11}$$

将(10)和(11)代入(9)式左端，并计算出

$$\begin{aligned}&(j-i)(n-i+k-j)+j(j-1)+(i+j)(i+k-n-j)+(k-j)(k-j-1)\\&=k(k-1)-2i(n-i)=\lambda_k-b_{i,i}。\end{aligned}$$

当 $i=0$ 和 $i=n$ 时，代入 $v_k(i)$ 和 λ_k 的表达式，容易验证(9)式成立，故(a)和(c)得证。

接下来证明(d)中的矩阵乘积，将 $\boldsymbol{u}_0$，$\boldsymbol{v}_0$，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{v}_1$ 代入正交关系式中，可以计算出左上角 2×2 块矩阵

为$\begin{pmatrix} (-1)^n & 1 \\ 0 & n \end{pmatrix}$。

由于

$$\boldsymbol{u}_i B_n \boldsymbol{v}_j = \left\langle \boldsymbol{u}_i B_n, \boldsymbol{v}_j \right\rangle = \lambda_i \left\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{u}_i, B_n \boldsymbol{v}_j \right\rangle = \lambda_j \left\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j \right\rangle,$$

可得

$$U_n B_n V_n = \left(D_n U_n\right) V_n = U_n V_n D_n 。$$

注意到$\left\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j \right\rangle = 0$，$i \neq j$，$\lambda_i \neq \lambda_j$，则当$i = 0,1$；$j \geq 2$和$j = 0,1$；$i \geq 2$时，$\lambda_i \neq \lambda_j$，即$\left\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j \right\rangle = 0$。当$i, j \geq 2$时，$\left\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j \right\rangle = 0$，$i \neq j$。

当$i = j \geq 2$时，由于

$$\begin{aligned} \left\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i \right\rangle &= \sum_{k=0}^{n} u_i(k) v_i(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=i}^{n} (-1)^{n-l} \binom{l-1}{i-1} \binom{n-l+i-1}{i-1} \binom{i-2}{l+k-n-1} \times \sum_{s=1}^{i-1} (-1)^{n-i+k+s} \binom{k-1}{s-1} \binom{n-k-1}{i-s-1} \binom{i}{s} 。\end{aligned} \tag{12}$$

交换求和顺序，于是(12)式可以表示为

$$\left\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i \right\rangle = \sum_{l=i}^{n} \sum_{s=1}^{i-1} \binom{l-1}{i-1} \binom{n-l+i-1}{i-1} \binom{i}{s} \times \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+s-l-i} \binom{i-2}{l+k-n-1} \binom{k-1}{s-1} \binom{n-k-1}{i-s-1},$$

将最后一个求和指标$k \to k-l+n+1$，然后再利用有限差分公式和范德蒙卷积公式，得到

$$\begin{aligned} \left\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i \right\rangle &= \sum_{l=i}^{n} \sum_{s=1}^{i-1} (-1)^{n+s} \binom{l-1}{i-1} \binom{n-l+i-1}{i-1} \binom{i}{s} \times \sum_{k=0}^{i-2} (-1)^{k-i+1} \binom{i-2}{k} \binom{k-l+n}{s-1} \binom{l-k-2}{i-s-1} \\ &= (-1)^{n-i} \sum_{l=i}^{n} \sum_{s=1}^{i-1} \binom{l-1}{i-1} \binom{n-l+i-1}{i-1} \binom{i}{s} \times \Delta^{i-2} \left\{ \binom{n-l}{s-1} \binom{i-l-s}{i-s-1} \right\} \\ &= (-1)^{n-i} \sum_{s=1}^{i-1} \binom{i}{s} \binom{i-2}{s-1} \sum_{l=i}^{n} \binom{l-1}{i-1} \binom{n+i-l-1}{i-1} = (-1)^{n-i} \binom{2i-2}{i-1} \binom{n+i-1}{2i-1}, \end{aligned}$$

即

$$W_{n-1} = \left[\chi(i=j) (-1)^{n-i} \binom{2i-2}{i-1} \binom{n+i-1}{2i-1} \right]_{2 \leq i, j \leq n},$$

则(d)得证。

为了证明(e)中的行列式$\det U_n$，将三项关系式(7)改写为

$$u_k(j-1) + 2u_k(j) + u_k(j+1) = \frac{k(k-1)}{j(n-j)} u_k(j),$$

将上述行列式中的$j-1$行和j行的2倍加到$j+1$行，得到

$$\det U_n = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j(n-j)} \times \begin{vmatrix} u_k(0) \\ u_k(1) \\ k(k-1) u_k(1) \\ \vdots \\ k(k-1) u_k(n-1) \end{vmatrix},$$

利用同样的初等行变换，进一步得到

$$\det U_n=\prod_{k=1}^{2}\prod_{j=1}^{n-k}\frac{1}{j(n-j)}\times\begin{vmatrix} u_k(0)\\ u_k(1)\\ k(k-1)u_k(1)\\ k^2(k-1)^2u_k(1)\\ k^2(k-1)^2u_k(2)\\ \vdots\\ k^2(k-1)^2u_k(n-2)\end{vmatrix},$$

反复迭代 $n-1$ 次，推得公式

$$\det U_n=\prod_{k=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{n-k}\frac{1}{j(n-j)}\times\begin{vmatrix} u_0(0) & \cdots & u_1(0) & \cdots & S_{n-1}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ u_0(1) & \cdots & u_1(1) & \cdots & T_{n-1}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & P_{n-1}\end{vmatrix},$$

其中

$$S_{n-1}=(u_2(0),\cdots,u_n(0)),\quad T_{n-1}=(u_2(1),\cdots,u_n(1)),\quad P_{n-1}=\begin{pmatrix} k(k-1)u_k(1)\\ k^2(k-1)^2u_k(1)\\ \vdots\\ k^{n-1}(k-1)^{n-1}u_k(1)\end{pmatrix},k=2,3,\cdots,n,$$

进一步化简得到

$$\det U_n=\prod_{k=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{n-k}\frac{1}{j(n-j)}\times\begin{vmatrix} u_0(0) & u_1(0)\\ u_0(1) & u_1(1)\end{vmatrix}\times\det_{\substack{1\le j\le n-1\\ 2\le k\le n}}\left[k^j(k-1)^j\right]\times\prod_{k=2}^{n}u_k(1)。$$

由于

$$\prod_{k=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{n-k}\frac{1}{j(n-j)}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(k-1)!}{(n-k)!(n-1)!}=\frac{1}{(n-1)!}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-1)!},$$

$$\begin{vmatrix} u_0(0) & u_1(0)\\ u_0(1) & u_1(1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & n\\ -1 & -(n-1)\end{vmatrix}=1,$$

$$\det_{\substack{1\le j\le n-1\\ 2\le k\le n}}\left[k^j(k-1)^j\right]=\prod_{k=2}^{n}k(k-1)\times\det_{\substack{0\le j\le n-2\\ 2\le k\le n}}\left[k^j(k-1)^j\right]=n!(n-1)!\prod_{2\le j<k\le n}\{k(k-1)-j(j-1)\}=\prod_{k=1}^{n-1}(2k)!,$$

$$\prod_{k=2}^{n}u_k(1)=\prod_{k=2}^{n}\binom{n-1}{k-1}=\prod_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(n-1)!(n-1)!}{k!k!}=\prod_{k=1}^{n}(n-1)!\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!^2},$$

将它们相乘后计算出

$$\det U_n=\prod_{k=1}^{n-1}\binom{2k}{k}。$$

最后，证明(e)中的行列式 $\det V_n$，需要将三项关系式(9)改写为

$$\frac{(i-1)(n-i+1)}{(i+1)(n-i-1)}v_k(i-1)+\frac{2i(n-i)}{(i+1)(n-i-1)}v_k(i)+v_k(i+1)=\frac{k(k-1)}{(i+1)(n-i-1)}v_k(i),$$

利用行列式的性质，将上述行列式中的第$i-1$行和第i行分别乘以$\frac{(i-1)(n-i+1)}{(i+1)(n-i-1)}$和$\frac{2i(n-i)}{(i+1)(n-i-1)}$加到第$i+1$行，得到

$$\det V_n=\prod_{i=0}^{n-2}\frac{1}{(i+1)(n-i-1)}\times\begin{vmatrix} v_k(0) \\ k(k-1)v_k(0) \\ k(k-1)v_k(1) \\ \vdots \\ k(k-1)v_k(n-2) \\ v_k(n) \end{vmatrix},$$

反复迭代$n-1$次，得到公式

$$\det V_n=\prod_{k=2}^{n}\prod_{i=0}^{n-k}\frac{1}{(i+1)(n-i-1)}\times\begin{vmatrix} v_k(0) \\ k(k-1)v_k(0) \\ k^2(k-1)^2v_k(0) \\ \vdots \\ k^{n-1}(k-1)^{n-1}v_k(0) \\ v_k(n) \end{vmatrix},$$

由于行列式的第一列元素为$(0,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$，将行列式按第一列展开，推得公式

$$\det V_n=(-1)^{n+2}\prod_{k=2}^{n}\prod_{i=0}^{n-k}\frac{1}{(i+1)(n-i-1)}\times\det_{\substack{0\le i\le n-1\\1\le k\le n}}\left[k^i(k-1)^i\right]\times\prod_{k=1}^{n}v_k(0)。$$

由于

$$\prod_{k=2}^{n}\prod_{i=0}^{n-k}\frac{1}{(i+1)(n-i-1)}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-2)!}{(n-k+1)!(n-1)!}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(k-1)!}{(n-k)!(n-1)!}=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-1)!},$$

$$\det_{\substack{0\le i\le n-1\\1\le k\le n}}\left[k^i(k-1)^i\right]=\prod_{1\le i<k\le n}(k-i)(k+i-1)=\prod_{k=2}^{n}(k-1)!\frac{(2k-2)!}{(k-1)!}=\prod_{k=1}^{n-1}(2k)!,$$

$$\prod_{k=1}^{n}v_k(0)=v_1(0)\times\prod_{k=2}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-1}{k-1}=(-1)^{\binom{n-1}{2}}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!^2}\prod_{k=1}^{n}(n-1)!,$$

将它们相乘后计算出

$$\det V_n=(-1)^{\binom{n+2}{2}}\prod_{k=1}^{n-1}\binom{2k}{k}。$$

4. 结论

在传统的线性代数和计算数学中，绝大多数的三对角矩阵(如著名的 Sylvester-Kac 矩阵、Toeplitz 矩阵等)，其非零元素都是常数或者是行列标号的简单线性函数，这类三对角矩阵的特征多项式可以通过递推关系求出，其特征值对应着某些正交多项式的零点。当对角线或次对角线元素不是线性函数，而是复杂的非线性函数，那么关于这类问题的谱性质研究是非常困难的，但随着物理建模精度的提升，近年来

关于非线性三对角矩阵的理论与数值算法研究正在迅速增长，而寻找非线性三对角矩阵的高效谱分析方法，当前是极具价值和挑战的。

本文研究的两类三对角矩阵，其元素均是行列标号的二次函数，即非线性三对角矩阵，不仅运用错项相消法，还借助范德蒙卷积公式等组合计算技巧，推导出它们的谱，左、右特征向量的具体形式，建立了特征向量的正交性，并通过初等行列变换得到了特征向量构成矩阵的行列式的封闭表达式。研究证实，该两类三对角矩阵的特征体系具有显著的组合数学规律，进一步推动了 Sylvester 型三对角矩阵的理论成果。结合 Sylvester–Kac 矩阵的最新研究进展，本文的研究与以序列定义矩阵元素的拓展方向形成了有效呼应。

总之，非线性三对角矩阵的谱与特征向量研究，不仅将经典三对角矩阵的理论(正交多项式、Sturm 序列、反问题)推广到更丰富的物理系统，还为设计结构保持的数值算法和探索离散可积系统的谱结构提供了关键切入点。

参考文献

[1] Sylvester, J.J. (1854) Theoreme sur les Determinants de M. Sylvester. *Nouvelles Annales de Mathematiques*, **13**, 305.

[2] Muir, T. (1960) The Theory of Determinants in the Historical Order of Development. Vol. II, Dover Publications, Inc.

[3] Cayley, A. (1858) On the Determination of the Value of a Certain Determinant. *The Quarterly of Pure and Applied Mathematics*, **1**, 163-166.

[4] Painvin (1858) Sur Un Certain Systeme d'Equations lineaires. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, **3**, 41-46.

[5] Kac, M. (1947) Random Walk and the Theory of Brownian Motion. *The American Mathematical Monthly*, **54**, 369-391. https://doi.org/10.1080/00029890.1947.11990189

[6] Askey, R. (2005) Evaluation of Sylvester Type Determinants Using Orthogonal Polynomials. In: *Advances in Analysis*, *Proceedings of the* 4*th ISAAC Congress*, World Scientific, 1-16. https://doi.org/10.1142/9789812701732_0001

[7] Holtz, O. (2005) Evaluation of Sylvester Type Determinants Using Block-Triangularization. In: *Advances in Analysis*, *Proceedings of the* 4*th ISAAC Congress*, World Scientific, 395-405. https://doi.org/10.1142/9789812701732_0036

[8] Chu, W.C. and Wang, X.Y. (2008) Eigenvectors of Tridiagonal Matrices of Sylvester Type. *Calcolo*, **45**, 217-233. https://doi.org/10.1007/s10092-008-0153-4

[9] Chu, W.C. (2010) Fibonacci Polynomials and Sylvester Determinant of Tridiagonal Matrix. *Applied Mathematics and Computation*, **216**, 1018-1023. https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.01.089

[10] Du, Z.B. and da Fonseca, C.M. (2024) Sylvester-Kac Matrices with Quadratic Spectra: A Comprehensive Note. *The Ramanujan Journal*, **65**, 1313-1322. https://doi.org/10.1007/s11139-024-00940-4

[11] da Fonseca, C.M. and Kılıç, E. (2019) A New Type of Sylvester-Kac Matrix and Its Spectrum. *Linear and Multilinear Algebra*, **69**, 1072-1082. https://doi.org/10.1080/03081087.2019.1620673

[12] Igelnik, B. and Simon, D. (2011) The Eigenvalues of a Tridiagonal Matrix in Biogeography. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 195-201. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.05.054

[13] Kiliç, E. and Arikan, T. (2016) Evaluation of Spectrum of 2-Periodic Tridiagonal-Sylvester Matrix. *Turkish Journal of Mathematics*, **40**, 80-89. https://doi.org/10.3906/mat-1503-46

[14] Andelic, M., da Fonseca, C.M., Kilic, E. and Stanic, Z. (2022) A Sylvester-Kac Matrix Type and the Laplacian Controllability of Half Graphs. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, **38**, 559-571. https://doi.org/10.13001/ela.2022.6947

[15] Du, Z.B. and da Fonseca, C.M. (2025) A Note on the Eigenvalues of a Sylvester-Kac Type Matrix with Off-Diagonal Biperiodic Perturbations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **461**, Article ID: 116429. https://doi.org/10.1016/j.cam.2024.116429

[16] Hu, W.J., Zheng, Y.P. and Jiang, Z.L. (2021) Fermat-Sylvester-Kac Matrix. *Advances and Applications in Discrete Mathematics*, **27**, 157-172. https://doi.org/10.17654/dm027020157

[17] Mersin, E.Ö. and Bahşi, M. (2025) A New Approach to Tridiagonal Matrices Related to the Sylvester-Kac Matrix. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, **31**, 211-227. https://doi.org/10.7546/nntdm.2025.31.2.211-227

[18] Zeng, Y., Xu, W. and Bebiano, N. (2025) Real Skew-Symmetric and Periodic Skew-Symmetric Tridiagonal Matrices with Prescribed Spectral Data. *Linear Algebra and its Applications*, **725**, 198-222.

https://doi.org/10.1016/j.laa.2025.07.009

[19] Chu, W. and Kiliç, E. (2024) Left and Right Eigenvectors of a Variant of the Sylvester-Kac Matrix. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **109**, 316-326. https://doi.org/10.1017/s0004972723000461

[20] da Fonseca, C.M. (2020) A Short Note on the Determinant of a Sylvester-Kac Type Matrix. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **21**, 361-362. https://doi.org/10.1515/ijnsns-2018-0375

[21] Holland, F., Laffey, T. and Smyth, R. (2019) Problem 12100. *The American Mathematical Monthly*, **126**, 280.

[22] Spiegel, M.R. (1971) Calculus of Finite Differences and Differential Equations. McGraw-Hill.