Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(5), 156-162
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.165139

Hans汉斯

部分完美圈准支架的存在性

李啸芳

安徽职业技术大学计算机与信息技术学院，安徽 合肥

收稿日期：2026年4月17日；录用日期：2026年5月18日；发布日期：2026年5月26日

摘 要

设 $K_{n,n,\cdots,n}$ 是一个完全等 m 部图，若其边集全部能分解为 k 长的圈，且这些圈构成的集合既能划分成若干个平行类(即一组顶点互不相交的 k 长圈，且这组圈的顶点集的并恰好是整个点集的一个划分)，又能划分成若干个带洞平行类(即一组顶点互不相交的 k 长圈，且这组圈的顶点集的并恰好是除某一指定部(称为洞)外其余点集的一个划分)，则称该分解为一个长为 k 的完美圈准支架(perfect cycle semiframe, PCSF)，记为 $(k,1)-PCSF\left(n^m\right)$。本文用循环群差分法寻找数值解，得到部分完美圈准支架的存在性。

关键词

完全等部图，完美圈准支架，圈积，圈可分解设计

Some Results on the Perfect Cycle Semiframe

Xiaofang Li

School of Computer and Information Technology, Anhui University of Applied Technology, Hefei Anhui

Received: April 17, 2026; accepted: May 18, 2026; published: May 26, 2026

Abstract

Let $K_{n,n,\cdots,n}$ be a complete equipartite graph. If its edge set can be fully decomposed into cycles of length k, and the collection of these cycles can be partitioned into several parallel classes (a set of vertex-disjoint cycles of length k whose vertex union is exactly a partition of the entire vertex set), and can also be partitioned into several holey parallel classes (a set of vertex-disjoint cycles of length k whose vertex union is exactly a partition of all vertices except for one specified part,

文章引用: 李啸芳. 部分完美圈准支架的存在性[J]. 理论数学, 2026, 16(5): 156-162.
DOI: 10.12677/pm.2026.165139

called the hole), then such a decomposition is called a perfect cycle semiframe (PCSF) of length k, denoted by $(k,1)-PCSF\left(n^m\right)$. In this paper, we use the cyclic group difference method to seek numerical solutions, the existence of perfect cycle semiframes is obtained.

Keywords

Complete Equipartite Graph, Perfect Cycle Semiframe, Wreath Product, Cycle Decomposition Design

1. 引言

设 $K_{n,n,\cdots,n}$ 表示一个有 mn 个顶点的完全等 m 部图，其顶点集可划分为 m 个部，每个部有 n 个顶点，同一个部的顶点间无边，不同部间的任意两顶点恰有一条边相连。

例如 $K_{3,3}$ 如下图，

设图 $K_{n,n,\cdots,n}$ 的边集能被划分为若干个长度为 k 的圈(称为区组)，

若这些圈能被划分为 $\frac{(m-1)n}{2}$ 个平行类，其中每个平行类是对图 $K_{n,n,\cdots,n}$ 所有点集 $X=mn$ 的一个划分(即每个平行类里有 $\frac{mn}{k}$ 个 k 长圈)，则称其是可分解的圈可分组设计(*resolvable cycle group divisible design*)，记为 $k-RCGDD\left(n^m\right)$。

若这些圈能被划分为 $\frac{mn}{2}$ 个带洞平行类，其中每个带洞平行类是对图 $K_{n,n,\cdots,n}$ 所有点集 $X=mn$ 去掉一个部(该部称为洞)的一个划分(即每个带洞平行类里有 $\frac{(m-1)n}{k}$ 个 k 长圈)，每个部有 $\frac{n}{2}$ 个带洞平行类，则称其是一个圈框架(*cycle frame*)，记为 $k-CF\left(n^m\right)$。

若这些圈可分成两个部分，设圈集 $B=P\cup Q$，且 $P\cap Q=\Phi$，其中 P 可划分为点集 X 上的 p 个平行类，Q 可划分为 dm 个带洞平行类，恰好每个部有 d 个带洞平行类，则称其是一个圈准支架(*cycle semiframe*)，记作 $k-CSF\left(p,d,n^m\right)$。

设图 $K_{n,n,\cdots,n}$ 的边集能被划分为若干个长度为 k 的圈(称为区组)，是一个圈准支架，且这些圈能够被分成 $\frac{n}{2}$ 个 1-平衡的圈族 $B_1,B_2,\cdots,B_{\frac{n}{2}}$，其中 1-平衡是指每个圈族 B_i 同时满足：

(1) B_i 可划分为 $m-1$ 个平行类，每个平行类由若干顶点不相交的 k 长圈构成，这些圈的顶点集恰好

构成 $K_{m\times n}$ 的顶点集的一个划分；

(2) B_i 还可划分为 m 个带洞平行类，每个带洞平行类由若干顶点不相交的 k 长圈构成，这些圈的顶点集恰好是 $K_{n,n,\cdots,n}$ 去掉某个洞(即从去掉的某个部后，其他部各取一个顶点所构成的独立集)之后的顶点集的一个划分。则称该 C_k -分解为一个 k 长的完美圈准支架，记为 $(k,1)-PCSF\left(n^m\right)$。

用圈分解构造坦纳图时，1-平衡的圈族保证所有变量节点与校验节点之间的连接遵循统一规则，天然避免 4-环。通过选择圈长全部为 k 的完美圈准支架，可获得围长至少为 k 且度分布高度规整的准循环 LDPC 码，这样的码具备便于硬件实现和优秀的误码平层特性。

2. $(k,1)-PCSF\left(n^m\right)$ 存在的必要条件

定理 1.1 若存在 $(k,1)-PCSF\left(n^m\right)$，则有 $n\equiv 0(\bmod k)$， $n\equiv 0(\bmod 2)$， k 为偶数时 $m\geq 3$， k 为奇数时 $m\geq 4$。

证明：由上述定义知，圈族 $B=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_{\frac{n}{2}}$，每个 B_i 都是 1-平衡的，即每个 B_i 的所有区组既能被划分为 $m-1$ 个平行类，又能被划分为 m 个带洞平行类。

因为一个平行类 $\frac{mn}{k}$ 个 k 长圈，一个带洞平行类 $\frac{n(m-1)}{k}$ 个 k 长圈，圈的个数均为整数，故 $n\equiv 0(\bmod k)$。

总区组数为 $\frac{C_m^2n^2}{k}$，$\frac{n}{2}$ 个 B_i 一共可以划分为 $\frac{C_m^2n^2}{k}\Big/\frac{mn}{k}=\frac{n}{2}(m-1)$ 个平行类，或 $\frac{C_m^2n^2}{k}\Big/\frac{n(m-1)}{k}=\frac{n}{2}m$ 个带洞平行类，圈的个数均为整数，所以 $n\equiv 0(\bmod 2)$。

另外，形成偶数长圈至少需要跨两个部，形成奇数长圈至少需要三个部，又要形成带洞平行类，故 k 为偶数时 $m\geq 3$， k 为奇数时 $m\geq 4$。

3. $(k,1)-PCSF\left(n^3\right)$ 的直接构造

将完全等 m 部图的每个顶点进行数字标号，再利用有限域、数论、群论等相关理论，结合混差法、循环方法、平移等进行直接构造，相关设计理论请参考文献[1] [2]，相关区组设计的构造技巧请参考文献[3]-[8]。

引理 2.1 存在 $(8,1)-PCSF\left(8^3\right)$。

证明：完全等 3 部图 $K_{8,8,8}$，3 个部，每个部有 8 个顶点，设点集 $X=Z_{24}$，则 24 个顶点数字标号如下表(模 3 余 0，1，2 的数分别是第 1，2，3 个部)。

0	3	6	9	12	15	18	21
1	4	7	10	13	16	19	22
2	5	8	11	14	17	20	23

所有 8 长圈(区组)可以通过表 1 中的 8 长圈(基圈) $+6(\bmod 24)$ 得到。表 1 中每个基圈模 12 不同，这样每个 $Q_i\cap P_j, i=0,1,2; j=1,2$ 的基圈和该基圈 $+12(\bmod 24)$ 正好构成一个带洞平行类 $Q_i, i=0,1,2$ 的 2 个区组。Q_i 表示 $X=Z_{24}$ 去掉模 3 余 i 的那组数(洞)，每个数恰好全部都出现一次，是对 $X=Z_{24}$ 去掉相应的部的点集一个划分。$P_i, i=1,2$ 那行的 3 个基圈正好对全部 24 个顶点集的一个划分。$B=B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4$，每个 B_i 都能被分成 3 个带洞平行类和 2 个平行类。

Table 1. Base cycles of a $(8,1)-PCSF\left(8^3\right)$

表 1. $(8,1)-PCSF\left(8^3\right)$ 基圈

	Q_0	Q_1	Q_2
P_1	$\{1,2,4,5,7,11,22,8\}$	$\{0,14,3,17,18,23,21,20\}$	$\{6,10,12,19,9,13,15,16\}$
P_2	$\{1,11,4,20,7,2,22,17\}$	$\{5,9,14,6,8,15,23,12\}$	$\{0,13,18,19,3,10,21,16\}$

即

$$\begin{aligned}B_1&=\{P_1,(P_1+12)\bmod 24\}\\&=\{\{1,2,4,5,7,11,22,8\},\{0,14,3,17,18,23,21,20\},\{6,10,12,19,9,13,15,16\},\\&\quad\{13,14,16,17,19,23,10,20\},\{12,2,15,5,6,11,9,8\},\{18,22,0,7,21,1,3,4\}\}\end{aligned}$$

B_1 是由 P_1 那行的 3 个基圈和这 3 个圈 $+12(\bmod 24)$ 组成的，上下 2 个 8 长圈正好是去掉某一个部(分别是模 3 余 0，1，2 三个部)的带洞平行类，一共是 3 个带洞平行类；在一行的 3 个 8 长圈是一个平行类，一共 2 个平行类。故 B_1 可被划分为 3 个带洞平行类(分别是每个部一个带洞平行类)，2 个平行类。

$$\begin{aligned}B_2&=\{(P_1+6)\bmod 24,(P_1+18)\bmod 24\}\\&=\{\{7,8,10,11,13,17,4,14\},\{6,20,9,23,0,5,3,2\},\{12,16,18,1,15,19,21,22\},\\&\quad\{19,20,22,23,1,5,16,2\},\{18,8,21,11,12,17,15,14\},\{0,4,6,13,3,7,9,10\}\}\end{aligned}$$

B_2 是由 P_1 那行的 3 个基圈 $+6(\bmod 24)$ 和这 3 个基圈 $+18(\bmod 24)$ 组成的，上下 2 个 8 长圈正好是去掉某一个部(分别是模 3 余 0，1，2 三个部)的带洞平行类，一共是 3 个带洞平行类；在一行的 3 个 8 长圈是一个平行类，一共 2 个平行类。故 B_2 可被划分为 3 个带洞平行类(分别是每个部一个带洞平行类)，2 个平行类。

$$\begin{aligned}B_3&=\{P_2,(P_2+12)\bmod 24\}\\&=\{\{1,11,4,20,7,2,22,17\},\{5,9,14,6,8,15,23,12\},\{0,13,18,19,3,10,21,16\},\\&\quad\{13,23,16,8,19,14,10,5\},\{17,21,2,18,20,3,11,0\},\{12,1,6,7,15,22,9,4\}\}\end{aligned}$$

B_3 是由 P_2 那行的 3 个基圈和这 3 个基圈 $+12(\bmod 24)$ 组成的，上下 2 个 8 长圈正好是去掉某一个部(分别是模 3 余 0，1，2 三个部)的带洞平行类，一共是 3 个带洞平行类；在一行的 3 个 8 长圈是一个平行类，一共 2 个平行类。故 B_3 可被划分为 3 个带洞平行类(分别是每个部一个带洞平行类)，2 个平行类。

$$\begin{aligned}B_4&=\{(P_2+6)\bmod 24,(P_2+18)\bmod 24\}\\&=\{\{7,17,10,2,13,8,4,23\},\{11,15,20,12,14,21,5,18\},\{6,19,0,1,9,16,3,22\},\\&\quad\{19,5,22,14,1,20,16,11\},\{23,3,8,0,2,9,17,6\},\{18,7,12,13,21,4,15,10\}\}\end{aligned}$$

B_4 是由 P_2 那行的 3 个基圈 $+6(\bmod 24)$ 和这 3 个基圈 $+18(\bmod 24)$ 组成的，上下 2 个 8 长圈正好是去掉某一个部(分别是模 3 余 0，1，2 三个部)的带洞平行类，一共是 3 个带洞平行类；在一行的 3 个 8 长圈是一个平行类，一共 2 个平行类。故 B_4 可被划分为 3 个带洞平行类(分别是每个部一个带洞平行类)，2 个平行类。

类似方法可构造以下两个完美圈准支架。

引理 2.2 存在 $(12,1)-PCSF(12^3)$。

证明：完全等 3 部图 $K_{12,12,12}$，3 个部，每个部有 12 个顶点，设点集 $X=Z_{36}$，则 36 个顶点数字标号如下表(模 3 余 0，1，2 的数分别是第 1，2，3 个部)

0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34
2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35

所有 12 长圈(区组)可以通过表 1 中的 12 长圈(基圈) $+9(\bmod 36)$ 得到。表 2 中每个基圈模 18 不同，这样 $Q_i\cap P_j, i=0,1,2; j=1,2$ 每个基圈和该基圈 $+18(\bmod 36)$ 正好构成一个带洞平行类 $Q_i, i=0,1,2$ 的 2 个区组。Q_i 表示 X 去掉模 3 余 i 的那组数(洞)，每个数恰好全部都出现一次，是对 $X=Z_{36}$ 去掉相应的部的点集一个划分。$P_i, i=1,2$ 那行的 3 个基圈正好对全部 36 个顶点集的一个划分。$B=B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4$，其中 $B_1=\{P_1,(P_1+18)\bmod 36\}$，$B_2=\{(P_1+9)\bmod 36,(P_1+27)\bmod 36\}$，$B_3=\{P_2,(P_2+18)\bmod 36\}$，$B_4=\{(P_2+9)\bmod 36,(P_2+27)\bmod 36\}$。类似引理 2.1 可以验证每个 B_i 都能被分成 3 个带洞平行类和 2 个平行类。

Table 2. Base cycles of a $(12,1)-PCSF(12^3)$

表 2. $(12,1)-PCSF(12^3)$ 基圈

	Q_0	Q_1	Q_2
P_1	$\{1,2,4,5,7,8,10,14,31,11,34,17\}$	$\{0,20,3,23,6,26,9,32,30,29,33,35\}$	$\{12,13,15,16,18,22,27,19,24,28,21,25\}$
P_2	$\{1,8,4,11,7,2,10,35,13,5,16,32\}$	$\{0,14,3,17,6,29,15,20,27,23,30,26\}$	$\{9,22,33,19,21,31,24,34,12,28,18,25\}$

引理 2.3 存在 $(20,1)-PCSF(20^3)$。

证明：完全等 3 部图 $K_{20,20,20}$，3 个部，每个部有 20 个顶点，设点集 $X=Z_{60}$，则 60 个顶点数字标号如下表(模 3 余 0，1，2 的数分别是第 1，2，3 个部)。

0	3	6	9	12	15	18	21	...	57
1	4	7	10	13	16	19	22	...	58
2	5	8	11	14	17	20	23	...	59

所有 20 长圈(区组)可以通过表 1 中的 20 长圈(基圈) $+15(\bmod 60)$ 得到。表 3 中每基圈模 30 不同，这样每个 $Q_i\cap P_j, i=0,1,2; j=1,2$ 的基圈和该基圈 $+30(\bmod 60)$ 正好构成一个带洞平行类 $Q_i, i=0,1,2$ 的 2 个区组。Q_i 表示 X 去掉模 3 余 i 的那组数(洞)，每个数恰好全部都出现一次，是对 $X=Z_{60}$ 去掉相应的部的点集一个划分。$P_i, i=1,2$ 那列的 3 个基圈正好对全部 60 个顶点集的一个划分。$B=B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4$，其中 $B_1=\{P_1,(P_1+30)\bmod 60\}$，$B_2=\{(P_1+15)\bmod 60,(P_1+45)\bmod 60\}$，$B_3=\{P_2,(P_2+30)\bmod 60\}$，$B_4=\{(P_2+15)\bmod 60,(P_2+45)\bmod 60\}$。类似引理 2.1 可以验证每个 B_i 都能被分成 3 个带洞平行类和 2 个平行类。

Table 3. Base cycles of a $(20,1)-PCSF\left(20^3\right)$

表 3. $(20,1)-PCSF\left(20^3\right)$ 基区组

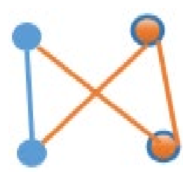
	P_1	P_2
Q_0	$\{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,20,25,17,22,26,19,23,58,29\}$	$\{1,8,13,2,16,5,19,11,22,14,4,17,7,20,28,56,10,29,25,53\}$
Q_1	$\{0,32,3,35,6,38,9,41,12,44,15,50,24,47,21,56,18,53,57,59\}$	$\{0,23,3,26,6,44,9,47,12,32,15,35,18,59,51,38,24,41,27,50\}$
Q_2	$\{27,28,30,31,33,34,36,37,39,40,42,46,51,43,54,49,45,52,48,55\}$	$\{21,31,39,43,30,40,45,34,54,37,48,58,33,46,57,49,36,52,42,55\}$

4. $(k,1)-PCSF\left(n^3\right)$的递推构造及主要结果

为了介绍递推构造，先需要介绍必备的概念，递推构造方法详细请查阅参考文献[4]-[7] [8] [9]中的证明，以下只给出构造方法。

设 C_k 和 $\bar{K}_n$，其中 C_k 是 k 长圈，$\bar{K}_n$ 是完全图 K_n 的补图，若 $u_1u_2 \in E(C_k)$ 或 $u_1 = u_2$ 且 $v_1v_2 \in E(\bar{K}_n)$，则 $(u_1,v_1)(u_2,v_1) \in E(C_k \iota \bar{K}_n)$，则称 $C_k \iota \bar{K}_n$ 是 C_k 和 $\bar{K}_n$ 圈积。圈积是把两个图的所有边进行笛卡尔乘积配对，生成一个能继承原图分解性质的新图。

例如 $C_2 \iota \bar{K}_2$ 是 C_2 和 $\bar{K}_2$ 圈积，蓝色的边是 C_2 里相连的边，$\bar{K}_2$ 是孤立的两个点，$C_2 \iota \bar{K}_2$ 是指原来相连的边做笛卡尔乘积，依然相连，如下图。



若边集 $E(C_k \iota \bar{K}_n)$ 可划分为平行类 n 个，且每个平行类中包含均为 m 长的圈 kn/m 个，则称 $C_k \iota \bar{K}_n$ 是 C_m -可分解的。

定理 3.1 [7] [10] 当 $k \geq 3$，$n \geq 1$ 时，$C_k \iota \bar{K}_n$ 是 C_k -可分解的，$(k,n) \notin \{(l,2): l \geq 3$ 且 l 为奇数$\}$ 且 $(k,n) \neq (3,6)$。

定理 3.2 [10]当 $k \geq 1$，$n \geq 1$ 时，$C_k \iota \bar{K}_n$ 是 C_{km} -可分解的，其中 $n = ml$，l 为正整数。

构造 1 [7]若存在 $(k,1)-PCSF\left(g^u\right)$，且 $C_k \iota \bar{K}_n$ 是 C_t -可分解的，则存在 $(t,1)-PCSF\left((gn)^u\right)$。

构造 1 其实是利用圈积对小的设计进行加权构造，把两个图各自的一条边乘在一起，变成一个小图块，再把所有这样的图块拼起来，得到的新图自然继承了原图的正则性和分解模式，从而得到大的设计。

定理 4.1 (1) 存在 $(8,1)-PCSF\left((8n)^3\right)$，$(12,1)-PCSF\left((12n)^3\right)$，$(20,1)-PCSF\left((20n)^3\right)$，$n \geq 1$。

(2) 存在 $(8n,1)-PCSF\left((8n)^3\right)$，$(12n,1)-PCSF\left((12n)^3\right)$，$(20n,1)-PCSF\left((20n)^3\right)$，$n \geq 1$。

证明：(1) 由引理 2.1~2.3 知，存在 $(k,1)-PSF\left(k^3\right)$，$k \in \{8,12,20\}$。由定理 3.1 得 $C_k \iota \bar{K}_n, k \in \{8,12,20\}$ 是 C_k -可分解的，运用构造 1 可得存在 $(8,1)-PCSF\left((8n)^3\right)$，$(12,1)-PCSF\left((12n)^3\right)$，$(20,1)-PCSF\left((20n)^3\right)$，$n \geq 1$。

(2) 由定理 3.2 得 $C_k \wr \bar{K}_n, k \in \{8,12,20\}$ 是 C_{kn}-可分解的，运用构造 1 可得存在 $(8n,1)-PCSF\left((8n)^3\right)$，$(12n,1)-PCSF\left((12n)^3\right)$，$(20n,1)-PCSF\left((20n)^3\right)$，$n \geq 1$。

本文主要构造了 $(k,1)-PCSF\left(n^3\right)$ 的三种情形，参考文献[7]和[9]里分别构造了 $(2,1)-PCSF\left(2^m\right)$，$m \geq 5$ 和 $(3,1)-PCSF\left(6^m\right)$，$m \geq 4$ 且 $m \neq 7$ 的存在性，但 $(2,1)-PCSF\left(2^m\right)$，$m \in \{3,4\}$ 和 $(4,1)-PCSF\left(4^m\right)$，$m \in \{3,4\}$ 都是不存在的，故应用构造 1 是得不出 $(4k,1)-PCSF\left((4k)^m\right)$，$m \in \{3,4\}$，$k \geq 2$。本文解决了 $(8k,1)-PSF\left((8k)^3\right)$ 这一类的存在性，但对于 $(8k+4,1)-PSF\left((8k+4)^3\right)$ 的情形只解决了部分类 $(12k,1)-PSF\left((12k)^3\right)$，$(20k,1)-PSF\left((20k)^3\right)$，$k \geq 1$。基于目前的研究，猜想用 $X = Z_{24k+12}$ 上的群 $+(6k+3) \bmod (24k+12)$ 或者其同构的二维群 $X = Z_3 \times Z_{24k+12}$，$(-,+(2k+1) \bmod (8k+4))$ 可能会解决这整个类。但 $(4k,1)-PCSF\left((4k)^4\right), k \geq 2$ 这类情形尚未解决。

基金项目

安徽省教育厅高校科学研究项目自然科学类重点项目(“可分组设计－准支架和完美准支架的存在性”2024AH050885，2024AH050891)，安徽职业技术大学校级质量工程重点项目，2024xjjxyjz01。

参考文献

[1] 沈灏. 组合设计理论[M]. 第二版. 上海: 上海交通大学出版社, 2008: 30-295.

[2] Colbourn, C. and Dinitz, J. (2007) CRC Handbook of Combinatorial Designs. 2nd Edition, CRC Press Inc.

[3] Rees, R.S. (1991) Semiframes and Nearframes. In: Barlotti, A., Lunardon, G. and Mazzocca, F., Eds., *Combinatorics* '88: *Proceedings of the International Conference on Incidence Geometries and Combinatorial Structures*, Ravello, 23-28 May 1988, Vol. 2, 359-367.

[4] Kageyama, S. and Miao, Y. (1996) Some Constructions of Semiframes. *Ars Combinatoria*, **43**, 17-31.

[5] Cao, H. (2009) On the Existence of $(3,\lambda)$-Semiframes of Type 3^u. *Journal of Combinatorial Designs*, **17**, 253-265. https://doi.org/10.1002/jcd.20209

[6] Cao, H., Fan, J. and Xu, D. (2015) Semiframes with Block Size Three and Odd Group Size. *Journal of Combinatorial Designs*, **23**, 417-435. https://doi.org/10.1002/jcd.21407

[7] Wang, L., Ji, H. and Cao, H. (2023) On the Existence of K-Cycle Semiframes for Even K. *Journal of Combinatorial Designs*, **31**, 511-530. https://doi.org/10.1002/jcd.21908

[8] 李啸芳, 曹海涛. 六类 Oberwolfach 问题 $OP\left(4^a, s^b\right)$ 的解[J]. 高校应用数学学报, 2014, 29(3): 303-309.

[9] Cao, H., Xu, D. and Zheng, H. (2022) Completing the Spectrum of Semiframes with Block Size Three. *Journal of Combinatorial Designs*, **30**, 716-732. https://doi.org/10.1002/jcd.21856

[10] Muthusamy, A. and Paulraja, P. (1995) Factorizations of Product Graphs into Cycles of Uniform Length. *Graphs and Combinatorics*, **11**, 69-90. https://doi.org/10.1007/bf01787423