Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(6), 91-101
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.166160

Hans汉斯

耦合非线性矩阵方程组 $X_i+\sum_{j=1}^{3}A_{ij}^{*}X_j^{-1}A_{ij}=I\left(i=1,2,3\right)$ 的正定解

付师政[1]，易胜辉[2]

[1]赣南师范大学 数学与计算机科学学院，江西 赣州
[2]于都县罗江中心小学，江西 赣州

收稿日期：2026年4月19日；录用日期：2026年5月14日；发布日期：2026年6月30日

摘 要

本文研究非线性矩阵方程组 $X_i+\sum_{j=1}^{3}A_{ij}^{*}X_j^{-1}A_{ij}=I\ \left(i=1,2,3\right)$ 的数值求解问题，其中 X_i 是待求解的矩阵，$A_{ij}\ \left(i=1,2,3,j=1,2,3\right)$ 为任意 $n\times n$ 阶矩阵，I 表示 n 阶单位矩阵。本文提出一种免逆迭代算法，进行了收敛性和稳定性分析，数值实验表明该方法在迭代次数和计算时间上优于不动点算法。

关键词

非线性矩阵方程组，正定解，免逆迭代算法，收敛性分析

On the Positive Definite Solutions of a System of Coupled Nonlinear Matrix Equations $X_i+\sum_{j=1}^{3}A_{ij}^{*}X_j^{-1}A_{ij}=I\left(i=1,2,3\right)$

Shizheng Fu[1], Shenghui Yi[2]

[1]College of Mathematics and Computer Science, Gannan Normal University, Ganzhou Jiangxi
[2]Luojiang Central Primary School, Yudu County, Ganzhou Jiangxi

Received: April 19, 2026; accepted: May 14, 2026; published: June 30, 2026

文章引用：付师政，易胜辉. 耦合非线性矩阵方程组 $X_i+\sum_{j=1}^{3}A_{ij}^{*}X_j^{-1}A_{ij}=I\left(i=1,2,3\right)$ 的正定解[J]. 理论数学, 2026, 16(6): 91-101. DOI: 10.12677/pm.2026.166160

Abstract

This paper investigates the numerical solution of the nonlinear matrix system $X_i + \sum_{j=1}^{3} A_{ij}^* X_j^{-1} A_{ij} = I (i = 1,2,3)$. where X_i denotes the matrix to be solved, $A_{ij} (i = 1,2,3, j = 1,2,3)$ are arbitrary $n \times n$ matrices, and I represents the n-order identity matrix. An inversion-free iterative algorithm is proposed in this study, followed by the analysis of its convergence and stability. Numerical experiments demonstrate that the proposed method outperforms the fixed-point algorithm in terms of the number of iterations and computational time.

Keywords

Nonlinear Matrix Equations, Positive Definite Solution, Inversion-Free Iterative Algorithm, Convergence Analysis

1. 引言

本文研究三变量非线性矩阵方程组

$$\begin{cases} X_1 + A_{11}^* X_1^{-1} A_{11} + A_{12}^* X_2^{-1} A_{12} + A_{13}^* X_3^{-1} A_{13} = I, \\ X_2 + A_{21}^* X_1^{-1} A_{21} + A_{22}^* X_2^{-1} A_{22} + A_{23}^* X_3^{-1} A_{23} = I, \\ X_3 + A_{31}^* X_1^{-1} A_{31} + A_{32}^* X_2^{-1} A_{32} + A_{33}^* X_3^{-1} A_{33} = I. \end{cases} \tag{1}$$

存在正定解的条件，其中 X_i 是待求解的矩阵，A_{ij} $(i = 1,2,3, j = 1,2,3)$ 为任意 $n \times n$ 阶矩阵，A_{ij}^* 为 A_{ij} 的共轭转置，I 表示 n 阶单位矩阵。近年来，关于该类方程的研究已取得一系列进展。早期关于非线性矩阵方程的研究多聚焦于单变量情形：Liu 和 Chen [1]等人对 $X^s + A^* X^{-t_1} A + B^* X^{-t_2} B = Q$ 构建了正定解的存在性条件，但其迭代过程仍需矩阵求逆，计算量较大。为降低运算复杂度，Huang 与 Ma [2]针对方程 $X + A^H X^{-1} A + B^H X^{-1} B = I$ 提出了免逆迭代法，避免了迭代中的矩阵求逆，显著提升了计算效率。随着问题复杂度的提升，研究拓展为多变量矩阵方程组：Ali 与 Hossein [3]研究了形如 $\begin{cases} X + A^* Y^{-1} A = I \\ Y + B^* X^{-1} B = I \end{cases}$ 的矩阵方程组；Al-Dubiban [4] [5]进一步提出一般形式的矩阵方程组 $\begin{cases} X + A^* Y^q A = I \\ Y + B^* X^m B = I \end{cases}$ 并提出了相应的迭代格式 $\begin{cases} X_{s+1} = I + A^* Y_s^{-n} A \\ Y_{s+1} = I + B^* X_s^{-m} B \end{cases}$。而 Shi 和 Nashine [6]中将单方程的免逆方法推广至多变量矩阵方程组，设计了多变量免逆迭代算法，为多变量方程组的数值求解提供了新思路，但并未对三变量耦合方程组进行系统分析。受上述研究启发，本文进一步探讨非线性方程组(1)的正定解的存在性，解的性质及迭代构造方法，并进行了收敛性分析。

为便于后续讨论，引入如下符号：$H(n)$ 表示 $n \times n$ Hermite 矩阵的集合。对于矩阵 $D \in H(n)$，

$s_1(D) \ge s_2(D) \ge \cdots \ge s_n(D)$ 表示其奇异值，$\|D\|$ 表示这些奇异值之和。Frobenius 范数记为 $\|D\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |D_{ij}|^2\right)^{1/2}$。对于 $P,Q \in H(n)$，$P \ge Q$（相应地，$P > Q$）表示是 $P-Q$ 是半正定矩阵(相应地，$P-Q$ 是正定矩阵)，O 和 I 分别表示 $H(n)$ 中的零矩阵和单位矩阵。

2. 非线性矩阵方程组正定解存在的条件

本节讨论非线性矩阵方程组(1)正定解的存在性，并介绍两个引理。

引理 2.1 [7]设 $P,Q > O$ 为同阶的 Hermite 矩阵，则 $2P - PQP \le Q^{-1}$。

引理 2.2 [8]设 U, V 为同阶的 Hermite 正定矩阵，则 $U \ge V$ 的充要条件为 $V^{-1} \ge U^{-1}$。

考虑非线性矩阵方程(1)，取 $(Y,Z,W) = (X_1^{-1}, X_2^{-1}, X_3^{-1})$，则非线性矩阵方程组(1)可等价转化为

$$\begin{cases} Y^{-1} + A_{11}^* Y A_{11} + A_{12}^* Z A_{12} + A_{13}^* W A_{13} = I, \\ Z^{-1} + A_{21}^* Y A_{21} + A_{22}^* Z A_{22} + A_{23}^* W A_{23} = I, \\ W^{-1} + A_{31}^* Y A_{31} + A_{32}^* Z A_{32} + A_{33}^* W A_{33} = I. \end{cases} \tag{2}$$

定理 2.1 考虑非线性矩阵方程组(2)，令 (Y,Z,W) 是方程组(2)的正定解，则 $I \le Y$，$I \le Z$，$I \le W$。

证明 设 (Y,Z,W) 是方程组(2)的正定解，则

$$A_{11}^* Y A_{11} + A_{12}^* Z A_{12} + A_{13}^* W A_{13} \ge O,$$

因此

$$Y^{-1} = I - \left(A_{11}^* Y A_{11} + A_{12}^* Z A_{12} + A_{13}^* W A_{13}\right) \le I,$$

根据引理 2.2 可得 $I \le Y$。同理可得 $I \le Z$，$I \le W$。

定理 2.2 设 (Y,Z,W) 是方程组(2)的正定解，则

(i) 系数矩阵 $A_{ij}\ (i=1,2,3,\ j=1,2,3)$ 满足

$$\begin{cases} A_{11}^* A_{11} + A_{12}^* A_{12} + A_{13}^* A_{13} < I, \\ A_{21}^* A_{21} + A_{22}^* A_{22} + A_{23}^* A_{23} < I, \\ A_{31}^* A_{31} + A_{32}^* A_{32} + A_{33}^* A_{33} < I. \end{cases} \tag{3}$$

(ii) (Y^{-1}, Z^{-1}, W^{-1}) 满足

$$\begin{cases} Y^{-1} > A_{11} A_{11}^*, Y^{-1} > A_{21} A_{21}^*, Y^{-1} > A_{31} A_{31}^*, \\ Z^{-1} > A_{12} A_{12}^*, Z^{-1} > A_{22} A_{22}^*, Z^{-1} > A_{32} A_{32}^*, \\ W^{-1} > A_{13} A_{13}^*, W^{-1} > A_{23} A_{23}^*, W^{-1} > A_{33} A_{33}^*. \end{cases} \tag{4}$$

(iii) 若系数矩阵 $A_{ij}\ (i=1,2,3,\ j=1,2,3)$ 非奇异，则

$$\begin{cases} Y < \dfrac{1}{s_n^2(A_{11})} I, Y < \dfrac{1}{s_n^2(A_{21})} I, Y < \dfrac{1}{s_n^2(A_{31})} I, \\ Z < \dfrac{1}{s_n^2(A_{12})} I, Z < \dfrac{1}{s_n^2(A_{22})} I, Z < \dfrac{1}{s_n^2(A_{32})} I, \\ W < \dfrac{1}{s_n^2(A_{13})} I, W < \dfrac{1}{s_n^2(A_{23})} I, W < \dfrac{1}{s_n^2(A_{33})} I. \end{cases} \tag{5}$$

证明 (i)因为 (Y,Z,W) 是方程组(2)的正定解，得到 $Y \ge I$，$Z \ge I$ 和 $W \ge I$，因此 $A_{11}^* A_{11} \le A_{11}^* Y A_{11}$，

$A_{12}^*A_{12} \le A_{12}^*ZA_{12}$， $A_{13}^*A_{13} \le A_{13}^*WA_{13}$。由此可得

$$A_{11}^*A_{11} + A_{12}^*A_{12} + A_{13}^*A_{13} \le A_{11}^*YA_{11} + A_{12}^*ZA_{12} + A_{13}^*WA_{13} = I - Y^{-1} < I,$$

同理其余式子成立，故(3)式得证。

(ii) 因为 $A_{11}^*YA_{11} + A_{12}^*ZA_{12} + A_{13}^*WA_{13} = I - Y^{-1} < I$，由此得

$$A_{11}^*YA_{11} < I，\quad A_{12}^*ZA_{12} < I，\quad A_{13}^*WA_{13} < I，$$

即

$$Y^{1/2}A_{11}A_{11}^*Y^{1/2} < I，\quad Z^{1/2}A_{12}^*A_{12}Z^{1/2} < I，\quad W^{1/2}A_{13}^*A_{13}W^{1/2} < I。$$

两边同左乘 $Y^{-1/2}$，$Z^{-1/2}$ 和 $W^{-1/2}$ 右乘 $Y^{-1/2}$，$Z^{-1/2}$ 和 $W^{-1/2}$，得 $A_{11}A_{11}^* < Y^{-1}$，$A_{12}^*A_{12} < Z^{-1}$ 和 $A_{13}^*A_{13} < W^{-1}$。同理其余式子成立，故(4)式可证。

(iii) 由(ii)知 $Y^{-1} > A_{11}A_{11}^*$，且 $A_{11}A_{11}^*$ 非奇异，由引理 2。2 知 $\left(A_{11}A_{11}^*\right)^{-1} > Y$。

又因为 $s_n^2\left(A_{11}\right) \le A_{11}A_{11}^* \le s_1^2\left(A_{11}\right)$ 即 $\frac{1}{s_1^2\left(A_{11}\right)}I \le \left(A_{11}A_{11}^*\right)^{-1} \le \frac{1}{s_n^2\left(A_{11}\right)}I$，由此得 $Y < \frac{1}{s_n^2\left(A_{11}\right)}I$。同理其余式子成立，故(5)式可证。

定理 2.3 非线性矩阵方程组(2)存在正定解当且仅当

$$\begin{cases} A_{11} = \left(P^*P\right)^{-1/2}M_1, A_{12} = \left(P^*P\right)^{-1/2}N_1, A_{13} = \left(Q^*Q\right)^{-1/2}N_2, \\ A_{21} = \left(Q^*Q\right)^{-1/2}M_2, A_{22} = \left(P^*P\right)^{-1/2}L_1, A_{23} = \left(Q^*Q\right)^{-1/2}L_2, \\ A_{31} = \left(R^*R\right)^{-1/2}N_3, A_{32} = \left(R^*R\right)^{-1/2}L_3, A_{33} = \left(R^*R\right)^{-1/2}M_3, \end{cases} \tag{6}$$

其中矩阵 P,Q 和 R 是非奇异的，存在列向量

$$\mathcal{V}_P = \begin{pmatrix} P^{-*} \\ M_1 \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_Q = \begin{pmatrix} Q^{-*} \\ M_2 \\ L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_R = \begin{pmatrix} R^{-*} \\ N_3 \\ L_3 \\ M_3 \end{pmatrix}.$$

满足 $\mathcal{V}_P^*\mathcal{V}_P = I, \mathcal{V}_Q^*\mathcal{V}_Q = I, \mathcal{V}_R^*\mathcal{V}_R = I$。则 $(Y,Z,W) = \left(P^*P, Q^*Q, R^*R\right)$ 是方程(2)的解。

证明 将(6)带入方程(2)，得到

$$\left(P^{-*}\right)^*P^{-*} + \left[\left(P^*P\right)^{1/2}A_{11}\right]^*\left(P^*P\right)^{1/2}A_{11} + \left[\left(Q^*Q\right)^{1/2}A_{12}\right]^*\left(Q^*Q\right)^{1/2}A_{12} + \left[\left(R^*R\right)^{1/2}A_{13}\right]^*\left(R^*R\right)^{1/2}A_{13} = I,$$

$$\left(Q^{-*}\right)^*Q^{-*} + \left[\left(P^*P\right)^{1/2}A_{21}\right]^*\left(P^*P\right)^{1/2}A_{21} + \left[\left(Q^*Q\right)^{1/2}A_{22}\right]^*\left(Q^*Q\right)^{1/2}A_{22} + \left[\left(R^*R\right)^{1/2}A_{23}\right]^*\left(R^*R\right)^{1/2}A_{23} = I,$$

$$\left(R^{-*}\right)^*R^{-*} + \left[\left(P^*P\right)^{1/2}A_{31}\right]^*\left(P^*P\right)^{1/2}A_{31} + \left[\left(Q^*Q\right)^{1/2}A_{32}\right]^*\left(Q^*Q\right)^{1/2}A_{32} + \left[\left(R^*R\right)^{1/2}A_{33}\right]^*\left(R^*R\right)^{1/2}A_{33} = I.$$

等价为

$$\begin{pmatrix} R^{-*} \\ \left(P^*P\right)^{1/2}A_{11} \\ \left(Q^*Q\right)^{1/2}A_{12} \\ \left(R^*R\right)^{1/2}A_{13} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} R^{-*} \\ \left(P^*P\right)^{1/2}A_{11} \\ \left(Q^*Q\right)^{1/2}A_{12} \\ \left(R^*R\right)^{1/2}A_{13} \end{pmatrix} = I,$$

$$\begin{pmatrix} R^{-*} \\ (P^*P)^{1/2} A_{21} \\ (Q^*Q)^{1/2} A_{22} \\ (R^*R)^{1/2} A_{23} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} R^{-*} \\ (P^*P)^{1/2} A_{21} \\ (Q^*Q)^{1/2} A_{22} \\ (R^*R)^{1/2} A_{23} \end{pmatrix} = I,$$

$$\begin{pmatrix} R^{-*} \\ (P^*P)^{1/2} A_{31} \\ (Q^*Q)^{1/2} A_{32} \\ (R^*R)^{1/2} A_{33} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} R^{-*} \\ (P^*P)^{1/2} A_{31} \\ (Q^*Q)^{1/2} A_{32} \\ (R^*R)^{1/2} A_{33} \end{pmatrix} = I.$$

令

$$\begin{aligned} &(P^*P)^{1/2} A_{11} = M_1, (P^*P)^{1/2} A_{12} = N_1, (Q^*Q)^{1/2} A_{13} = N_2, \\ &(Q^*Q)^{1/2} A_{21} = M_2, (P^*P)^{1/2} A_{22} = L_1, (Q^*Q)^{1/2} A_{23} = L_2, \\ &(R^*R)^{1/2} A_{31} = N_3, (R^*R)^{1/2} A_{32} = L_3, (R^*R)^{1/2} A_{33} = M_3. \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} &A_{11} = (P^*P)^{-1/2} M_1, A_{12} = (P^*P)^{-1/2} N_1, A_{13} = (Q^*Q)^{-1/2} N_2, \\ &A_{21} = (Q^*Q)^{-1/2} M_2, A_{22} = (P^*P)^{-1/2} L_1, A_{23} = (Q^*Q)^{-1/2} L_2, \\ &A_{31} = (R^*R)^{-1/2} N_3, A_{32} = (R^*R)^{-1/2} L_3, A_{33} = (R^*R)^{-1/2} M_3. \end{aligned}$$

可知 $\mathcal{V}_P^*\mathcal{V}_P = I, \mathcal{V}_R^*\mathcal{V}_R = I, \mathcal{V}_Q^*\mathcal{V}_Q = I$，假设 $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}$ 有以上的因式分解，$(Y, Z, W) = (P^*P, Q^*Q, R^*R)$，则

$$\begin{aligned} &Y^{-1} + A_{11}^* Y A_{11} + A_{12}^* Z A_{12} + A_{13}^* W A_{13} \\ &= (P^*P)^{-1} + \left[(P^*P)^{-1/2} M_1\right]^* (P^*P)\left[(P^*P)^{-1/2} M_1\right] \\ &\quad + \left[(Q^*Q)^{-1/2} N_1\right]^* (Q^*Q)\left[(Q^*Q)^{-1/2} N_1\right] + \left[(R^*R)^{-1/2} L_1\right]^* (R^*R)\left[(R^*R)^{-1/2} L_1\right] \\ &= P^{-1}P^{-*} + M_1^*M_1 + N_1^*N_1 + L_1^*L_1 = I, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Z^{-1} + A_{21}^* Y A_{21} + A_{22}^* Z A_{22} + A_{23}^* W A_{23} \\ &= (Q^*Q)^{-1} + \left[(Q^*Q)^{-1/2} M_2\right]^* (Q^*Q)\left[(Q^*Q)^{-1/2} M_2\right] \\ &\quad + \left[(P^*P)^{-1/2} N_2\right]^* (P^*P)\left[(P^*P)^{-1/2} N_2\right] + \left[(R^*R)^{-1/2} L_2\right]^* (R^*R)\left[(R^*R)^{-1/2} L_2\right] \\ &= Q^{-1}Q^{-*} + M_2^*M_2 + N_2^*N_2 + L_2^*L_2 = I, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &W^{-1} + A_{31}^* Y A_{31} + A_{32}^* Z A_{32} + A_{33}^* W A_{33} \\ &= (R^*R)^{-1} + \left[(R^*R)^{-1/2} M_3\right]^* (R^*R)\left[(R^*R)^{-1/2} M_3\right] \\ &\quad + \left[(P^*P)^{-1/2} N_3\right]^* (P^*P)\left[(P^*P)^{-1/2} N_3\right] + \left[(Q^*Q)^{-1/2} L_3\right]^* (Q^*Q)\left[(Q^*Q)^{-1/2} L_3\right] \\ &= R^{-1}R^{-*} + M_3^*M_3 + N_3^*N_3 + L_3^*L_3 = I. \end{aligned}$$

则证得 $(Y,Z,W)=\left(P^*P,Q^*Q,R^*R\right)$ 是非线性方程组(2)的正定解。

3. 迭代方法的构建

本节针对非线性方程组(2)提出了一种新的迭代方案，分别将(2)中的第一个方程，第二个方程和第三个方程左乘和右乘 Y，Z，W 得

$$\begin{cases} Y-Y\left(I-A_{11}^*YA_{11}-A_{12}^*ZA_{12}-A_{13}^*WA_{13}\right)Y=O, \\ Z-Z\left(I-A_{21}^*YA_{21}-A_{22}^*ZA_{22}-A_{23}^*WA_{23}\right)Z=O, \\ W-W\left(I-A_{31}^*YA_{31}-A_{32}^*ZA_{32}-A_{33}^*WA_{33}\right)W=O. \end{cases}$$

构造出迭代方法

$$\begin{cases} Y_{n+1}=2Y_n-Y_n\left(I-A_{11}^*Y_nA_{11}-A_{12}^*Z_nA_{12}-A_{13}^*W_nA_{13}\right)Y_n, \\ Z_{n+1}=2Z_n-Z_n\left(I-A_{21}^*Y_nA_{21}-A_{22}^*Z_nA_{22}-A_{23}^*W_nA_{23}\right)Z_n, \\ W_{n+1}=2W_n-W_n\left(I-A_{31}^*Y_nA_{31}-A_{32}^*Z_nA_{32}-A_{33}^*W_nA_{33}\right)W_n. \end{cases} \tag{7}$$

初始矩阵都取单位矩阵，由此，可以构建如下算法

算法 1

1. 输入矩阵 $A_{11},A_{12},A_{13},A_{21},A_{22},A_{23},A_{31},A_{32},A_{33}$。

取 $Y_0=I$，$Z_0=I$ 和 $W_0=I$ 进行初始化，并设定容差 $\varepsilon\geq 0$。令 $n=0$。

2. 通过迭代格式(7)求出 Y_{n+1}，Z_{n+1} 和 W_{n+1}。

3. 若 $\|Y_{n+1}-Y_n\|_F+\|Z_{n+1}-Z_n\|_F+\|W_{n+1}-W_n\|_F\leq\varepsilon$，则停止。否则，令 $n=n+1$，并转至步骤 2。

4. 收敛分析

定理 4.1 给定初始值 $Y_0=I$，$Z_0=I$，$W_0=I$，若非线性方程组(2)存在正定解，设 $\left(\hat{Y},\hat{Z},\hat{W}\right)$ 为其极小正定解，则由算法 1 生成的序列 $\left\{\left(Y_n,Z_n,W_n\right)\right\}$ 是有上界且单调递增的，并分别收敛于极限 $\left(\hat{Y},\hat{Z},\hat{W}\right)$，满足

$$\begin{aligned} &Y_0\leq Y_1\leq Y_2\leq\cdots\leq Y_n\leq\cdots\leq\hat{Y}, \\ &Z_0\leq Z_1\leq Z_2\leq\cdots\leq Z_n\leq\cdots\leq\hat{Z}, \\ &W_0\leq W_1\leq W_2\leq\cdots\leq W_n\leq\cdots\leq\hat{W}, \end{aligned}$$

并且

$$\lim_{n\to\infty}Y_n=\hat{Y},\lim_{n\to\infty}Z_n=\hat{Z},\lim_{n\to\infty}W_n=\hat{W}.$$

证明 设 (Y,Z,W) 是非线性矩阵方程组(2)的任意半正定解，使用数学归纳法进行证明。当 $n=0$ 时且初始值 $Y_0=Z_0=W_0=I$，满足以下不等式

$$O<Y_0\leq Y_1\leq Y,O<Z_0\leq Z_1\leq Z,O<W_0\leq W_1\leq W.$$

由迭代方法(7)得

$$Y_1=2I-I+A_{11}^*A_{11}+A_{12}^*A_{12}+A_{13}^*A_{13}\geq I=Y_0,$$

根据定理 2.2，得到 $I-A_{11}^*A_{11}-A_{12}^*A_{12}-A_{13}^*A_{13}>O$。再根据引理 1.1 以及方程(2)，得

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= 2I - I\left(I - A_{11}^* A_{11} - A_{12}^* A_{12} - A_{13}^* A_{13}\right) I \\
&\le \left(I - A_{11}^* A_{11} - A_{12}^* A_{12} - A_{13}^* A_{13}\right)^{-1} \\
&\le \left(I - A_{11}^* Y A_{11} - A_{12}^* Z A_{12} - A_{13}^* W A_{13}\right)^{-1} \\
&= Y,
\end{aligned}
$$

因此 $(Y,Z,W) > (I,I,I)$ 且 $Y_1 \le Y$，得

$$I - A_{21}^* Y_1 A_{21} - A_{22}^* A_{22} - A_{23}^* A_{23} \ge I - A_{21}^* Y A_{11} - A_{22}^* Z A_{12} - A_{23}^* W A_{23} = Z^{-1} > O,$$

$$I - A_{31}^* Y_1 A_{31} - A_{32}^* A_{32} - A_{33}^* A_{33} \ge I - A_{31}^* Y A_{31} - A_{32}^* Z A_{32} - A_{33}^* W A_{33} = W^{-1} > O,$$

根据引理 1.1 以及方程(2)，得

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= 2I - I\left(I - A_{21}^* A_{21} - A_{22}^* A_{22} - A_{23}^* A_{23}\right) I \\
&\le \left(I - A_{21}^* A_{21} - A_{22}^* A_{22} - A_{23}^* A_{23}\right)^{-1} \\
&\le \left(I - A_{21}^* Y A_{21} - A_{22}^* Z A_{22} - A_{23}^* W A_{23}\right)^{-1} \\
&= Z,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_1 &= 2I - I\left(I - A_{31}^* A_{31} - A_{32}^* A_{32} - A_{33}^* A_{33}\right) I \\
&\le \left(I - A_{31}^* A_{31} - A_{32}^* A_{32} - A_{33}^* A_{33}\right)^{-1} \\
&\le \left(I - A_{31}^* Y A_{31} - A_{32}^* Z A_{32} - A_{33}^* W A_{33}\right)^{-1} \\
&= W,
\end{aligned}
$$

证得 $Z_1 \le Z$，$W_1 \le W$。因此 $O < Y_0 \le Y_1 \le Y, O < Z_0 \le Z_1 \le Z, O < W_0 \le W_1 \le W$。
当 $n = k$，$(k \ge 0)$ 时，满足以下不等式

$$O < Y_k \le Y_{k+1} \le Y, \quad O < Z_k \le Z_{k+1} \le Z, \quad O < W_k \le W_{k+1} \le W.$$

由于 $I - A_{11} Y_{k+1}^* A_{11} - A_{12} Z_{k+1}^* A_{12} - A_{13} W_{k+1}^* A_{13} \ge I - A_{11} Y^* A_{11} - A_{12} Z^* A_{12} - A_{13} W^* A_{13} = I$，
根据迭代方法(7)，引理 1.1 及 $Y_{k+1} > O$，得

$$
\begin{aligned}
Y_{k+2} &= 2Y_{k+1} - Y_{k+1}\left(I - A_{11}^* Y_{k+1} A_{11} - A_{12}^* Z_{k+1} A_{12} - A_{13}^* W_{k+1} A_{13}\right) Y_{k+1} \\
&\le \left(I - A_{11}^* Y_{k+1} A_{11} - A_{12}^* Z_{k+1} A_{12} - A_{13}^* W_{k+1} A_{13}\right)^{-1} \\
&\le \left(I - A_{11}^* Y A_{11} - A_{12}^* Z A_{12} - A_{13}^* W A_{13}\right)^{-1} \\
&= Y,
\end{aligned}
$$

即 $Y_{k+2} \le Y$。
此外

$$
\begin{aligned}
Y_{k+2} - Y_{k+1} &= Y_{k+1} - Y_{k+1}\left(I - A_{11} Y_{k+1}^* A_{11} - A_{12} Z_{k+1}^* A_{12} - A_{13} W_{k+1}^* A_{13}\right) Y_{k+1} \\
&= Y_{k+1}\left(Y_{k+1}^{-1} - \left(I - A_{11} Y_{k+1}^* A_{11} - A_{12} Z_{k+1}^* A_{12} - A_{13} W_{k+1}^* A_{13}\right)\right) Y_{k+1},
\end{aligned}
$$

因为引理 1.1 和 $Y_k > O$，

$$
\begin{aligned}
Y_{k+1} &= 2Y_k - Y_k\left(I - A_{11}^* Y_k A_{11} - A_{12}^* Z_k A_{12} - A_{13}^* W_k A_{13}\right) Y_k \\
&\le \left(I - A_{11}^* Y_k A_{11} - A_{12}^* Z_k A_{12} - A_{13}^* W_k A_{13}\right)^{-1} \\
&\le \left(I - A_{11}^* Y_{k+1} A_{11} - A_{12}^* Z_{k+1} A_{12} - A_{13}^* W_{k+1} A_{13}\right)^{-1},
\end{aligned}
$$

即

$$Y_{k+1}^{-1} \geq I - A_{11}^* Y_{k+1} A_{11} - A_{12}^* Z_{k+1} A_{12} - A_{13}^* W_{k+1} A_{13}。$$

结合 $Y_{k+1} > O$，所以 $Y_{k+2} - Y_{k+1} \geq O$。同理可证 $Z_{k+2} - Z_{k+1} \geq O$， $W_{k+2} - W_{k+1} \geq O$。

因此，由数学归纳法知，得

$$O < Y_k \leq Y_{k+1} \leq Y, \quad O < Z_k \leq Z_{k+1} \leq Z, \quad O < W_k \leq W_{k+1} \leq W.$$

所以，序列 $\{(Y_n, Z_n, W_n)\}$ 是单调递增且有上界，故

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = \hat{Y}，\ \lim_{n\to\infty} Z_n = \hat{Z}，\ \lim_{n\to\infty} W_n = \hat{W}。$$

因此根据算法 1，(Y_n, Z_n, W_n) 是方程(2)的一个正定解，由于对方程(2)的任意正定解 (Y, Z, W) 都有 $(\hat{Y}, \hat{Z}, \hat{W}) \leq (Y, Z, W)$，因此 $(\hat{Y}, \hat{Z}, \hat{W})$ 是方程(2)的最小正定解。

定理 4.2 $\{(Y_n, Z_n, W_n)\}$ 是由算法 1 生成的非线性方程组(2)的正定解序列，给定任意正数 $\varepsilon > 0$，有

$$\begin{aligned} &\|Y_n - Y\| \leq (\|A_{11}Y\| + \varepsilon)^2 \|Y - Y_n\| + (\|A_{12}Y\| + \varepsilon)^2 \|Z - Z_n\| + (\|A_{13}Y\| + \varepsilon)^2 \|W - W_n\|, \\ &\|Y_n - Y^{-1}\| \leq \|A_{11}\|^2 \|Y_n - Y\| + \|A_{12}\|^2 \|Z_n - Z\| + \|A_{13}\|^2 \|W_n - W\| \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &\|Z_n - Z\| \leq (\|A_{21}Z\| + \varepsilon)^2 \|Y_{n+1} - Y_n\| + (\|A_{22}Z\| + \varepsilon)^2 \|Z - Z_n\| + (|A_{23}Z| + \varepsilon)^2 \|W - W_n\|, \\ &\|\hat{Z}_n - Z^{-1}\| \leq \|A_{21}\|^2 \|Y_{n+1} - Y\| + \|A_{22}\|^2 \|Z_n - Z\| + \|A_{23}\|^2 \|W_n - W\|, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\|W_n - W\| \leq (\|A_{31}W\| + \varepsilon)^2 \|Y_{n+1} - Y_n\| + (\|A_{32}W\| + \varepsilon)^2 \|Z_{n+1} - Z_n\| + (\|A_{33}W\| + \varepsilon)^2 \|W - W_n\|, \\ &\|\hat{W} - W^{-1}\| \leq \|A_{31}\|^2 \|Y_{n+1} - Y\| + \|A_{32}\|^2 \|Z_{n+1} - Z\| + \|A_{33}\|^2 \|W_n - W\| \end{aligned} \tag{10}$$

证明 从 Y_{n+1} 的迭代格式出发

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= 2Y_n - Y_n (I - A_{11}^* Y_n A_{11} - A_{12}^* Z_n A_{12} - A_{13}^* W_n A_{13}) Y_n \\ &= 2Y_n - Y_n [I - A_{11}^* (Y + Y_n - Y) A_{11} - A_{12}^* (Z + Z_n - Z) A_{12} - A_{13}^* (W + W_n - W) A_{13}] Y_n, \end{aligned}$$

由于 (Y, Z, W) 是方程组(2)的正定解，得

$$Y^{-1} = I - A_{11}^* Y A_{11} - A_{12}^* Z A_{12} - A_{13}^* W A_{13}.$$

因此

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= 2Y_n - Y_n [Y^{-1} + A_{11}^* (Y - Y_n) A_{11} + A_{12}^* (Z - Z_n) A_{12} + A_{13}^* (W - W_n) A_{13}] Y_n \\ &= 2Y_n - Y_n Y^{-1} Y_n - Y_n A_{11}^* (Y - Y_n) A_{11} Y_n - Y_n A_{12}^* (Z - Z_n) A_{12} Y_n - Y_n A_{13}^* (W - W_n) A_{13} Y_n, \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} Y - Y_{n+1} &= Y - [2Y_n - Y_n Y^{-1} Y_n - Y_n A_{11}^* (Y - Y_n) A_{11} Y_n - Y_n A_{12}^* (Z - Z_n) A_{12} Y_n - Y_n A_{13}^* (W - W_n) A_{13} Y_n] \\ &= Y - 2Y_n + Y_n Y^{-1} Y_n + Y_n A_{11}^* (Y - Y_n) A_{11} Y_n + Y_n A_{12}^* (Z - Z_n) A_{12} Y_n + Y_n A_{13}^* (W - W_n) A_{13} Y_n, \end{aligned}$$

利用恒等式 $Y - 2Y_n + Y_n Y^{-1} Y_n = (Y - Y_n) Y^{-1} (Y - Y_n)$，

$$\begin{aligned} Y - Y_{n+1} = &(Y - Y_n) Y^{-1} (Y - Y_n) + Y_n A_{11}^* (Y - Y_n) A_{11} Y_n + Y_n A_{12}^* (Z - Z_n) A_{12} Y_n \\ &+ Y_n A_{13}^* (W - W_n) A_{13} Y_n, \end{aligned}$$

由于 $\lim_{n\to\infty} Y_n = Y$，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，使得对当 $n > N$，有

DOI: 10.12677/pm.2026.166160

$$\begin{aligned}\|Y-Y_{n+1}\| &\le \left\|(Y-Y_n)Y^{-1}\right\|\|Y-Y_n\|+\|A_{11}Y_n\|^2\|Y-Y_n\| \\ &\quad+\|A_{12}Y_n\|^2\|Z-Z_n\|+\|A_{13}Y_n\|^2\|W-W_n\| \\ &\le\left[\left\|(Y-Y_n)Y^{-1}\right\|+\|A_{11}Y_n\|^2\right]\|Y-Y_n\|+\|A_{12}Y_n\|^2\|Z-Z_n\|+\|A_{13}Y_n\|^2\|W-W_n\| \\ &\le(\|A_{11}Y\|+\varepsilon)^2\|Y-Y_n\|+(\|A_{12}Y\|+\varepsilon)^2\|Z-Z_n\|+(\|A_{13}Y\|+\varepsilon)^2\|W-W_n\|.\end{aligned}$$

又因为 $\hat{Y}_n-Y^{-1}=A_{11}^*(Y-Y_n)A_{11}+A_{12}^*(Z-Z_n)A_{12}+A_{13}^*(W-W_n)A_{13}$，得

$\left\|\hat{Y}_n-Y^{-1}\right\|\le\|A_{11}\|^2\|Y_n-Y\|+\|A_{12}\|^2\|Z_n-Z\|+\|A_{13}\|^2\|W_n-W\|$。

因此(8)得证。同理，可以证得(9)，(10)成立。

5. 数值例子

本节通过数值算例来验证算法 1 的有效性。实验中，容差设为 $\varepsilon=1\mathrm{e}-12$，残差定义为 $\|Y_{n+1}-Y_n\|_F+\|Z_{n+1}-Z_n\|_F+\|W_{n+1}-W_n\|_F$。为进行对比分析，本文使用了基本不动点算法，迭代公式如下

$$\begin{cases}X_1^{(k+1)}=I-A_{11}^*\left(X_1^{(k)}\right)^{-1}A_{11}-A_{12}^*\left(X_2^{(k)}\right)^{-1}A_{12}-A_{13}^*\left(X_3^{(k)}\right)^{-1}A_{13},\\ X_2^{(k+1)}=I-A_{21}^*\left(X_1^{(k)}\right)^{-1}A_{21}-A_{22}^*\left(X_2^{(k)}\right)^{-1}A_{22}-A_{23}^*\left(X_3^{(k)}\right)^{-1}A_{23},\\ X_3^{(k+1)}=I-A_{31}^*\left(X_1^{(k)}\right)^{-1}A_{31}-A_{32}^*\left(X_2^{(k)}\right)^{-1}A_{32}-A_{33}^*\left(X_3^{(k)}\right)^{-1}A_{33}.\end{cases}$$

例 5.1 考虑非线性矩阵方程组(2)，系数矩阵 $A_{ij}\ (i=1,2,3,j=1,2,3)$ 分别如下

$$A_{11}=\begin{bmatrix}0.15&0.08&0.04\\0.08&0.12&0.05\\0.04&0.05&0.08\end{bmatrix},\quad A_{12}=\begin{bmatrix}0.08&0.03&0.01\\0.03&0.06&0.02\\0.01&0.02&0.04\end{bmatrix},\quad A_{13}=\begin{bmatrix}0.05&0.02&0.008\\0.02&0.04&0.015\\0.008&0.015&0.03\end{bmatrix}$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix}0.06&0.02&0.01\\0.02&0.05&0.02\\0.01&0.02&0.04\end{bmatrix},\quad A_{22}=\begin{bmatrix}0.14&0.06&0.03\\0.06&0.11&0.04\\0.03&0.04&0.07\end{bmatrix},\quad A_{23}=\begin{bmatrix}0.04&0.015&0.006\\0.015&0.03&0.01\\0.006&0.01&0.02\end{bmatrix}$$

$$A_{31}=\begin{bmatrix}0.04&0.015&0.006\\0.015&0.03&0.01\\0.006&0.01&0.02\end{bmatrix},\quad A_{32}=\begin{bmatrix}0.06&0.02&0.008\\0.02&0.05&0.015\\0.008&0.015&0.03\end{bmatrix},\quad A_{33}=\begin{bmatrix}0.13&0.05&0.02\\0.05&0.10&0.03\\0.02&0.03&0.06\end{bmatrix}$$

在初始条件为 $Y_0=I$，$Z_0=I$ 和 $W_0=I$ 的情况下应用算法 1 后得到矩阵方程的正定解为

$$X_1=\begin{bmatrix}0.9561&-0.0325&-0.0174\\-0.0325&0.9673&-0.0180\\-0.0174&-0.0180&0.9854\end{bmatrix},\ X_2=\begin{bmatrix}0.9683&-0.0211&-0.0114\\-0.0211&0.9770&-0.0123\\-0.0114&-0.0123&0.9895\end{bmatrix},\ X_3=\begin{bmatrix}0.9731&-0.0164&-0.0073\\-0.0164&0.9815&-0.0081\\-0.0073&-0.0081&0.9932\end{bmatrix}.$$

例 5.2 考虑非线性矩阵方程组(2)，系数矩阵 $A_{ij}\ (i=1,2,3,j=1,2,3)$ 由随机矩阵生成并适当放缩以保证正定解存在，容差设为 $\varepsilon=1\mathrm{e}-12$，初始条件为 $Y_0=I$，$Z_0=I$ 和 $W_0=I$。实验对比本文算法 1 与基本不动点算法，记录迭代次数、CPU 时间与方程残差，结果如表 2 所示。

表 1 展示了两种算法的 CPU 时间对比结果，所提算法在完成相同计算任务时消耗的 CPU 时间更短。图 1 为迭代次数与误差关系图。从中可以看出算法 1 的收敛速度优于基本不动点法，在达到相同精度条件下所需迭代次数更少。表 2 表示该算法的计算效率优势在不同维度下依旧稳定保持，验证了理论分析的正确性。该算法通过避免矩阵求逆运算，有效减少了单步迭代的计算负担，从而在整体上提升了求解效率。

Table 1. CPU analysis for different dimensions
表 1. 不同维度下的 CPU 分析

指标	算法 1	基本不动点算法
迭代次数	11	12
平均 CPU 时间(s)	0.004824	0.007403
迭代平均时间(s)	0.000439	0.00617

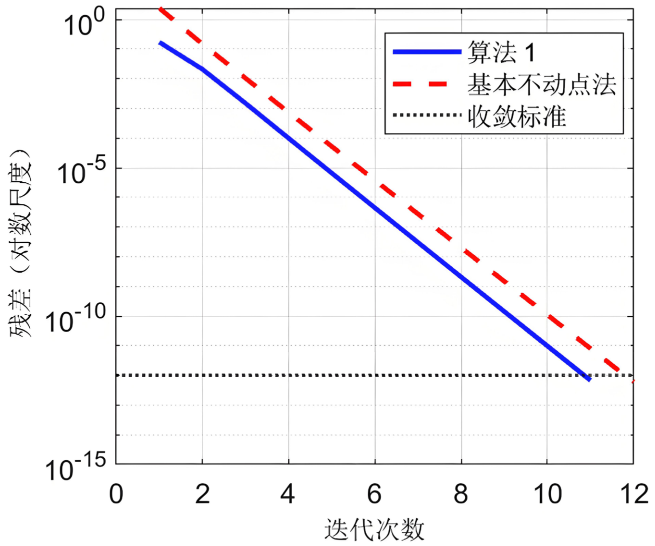

Figure 1. Residual convergence curves of two algorithms under different dimensions
图 1. 两种算法在不同维度下的残差收敛曲线

Table 2. Performance comparison under different dimensions
表 2. 不同维度下的性能比较

维度 n	算法	迭代次数	CPU 时间(s)	残差(F-范数)
20	算法 1	17	0.0125	6.82×10^{-11}
20	不动点算法	19	0.0312	753×10^{-11}
50	算法 1	16	0.0416	7.15×10^{-11}
50	不动点算法	18	0.1183	8.26×10^{-11}
100	算法 1	15	0.1173	7.39×10^{-11}
100	不动点算法	17	0.3247	8.41×10^{-11}

6. 总结

本文针对非线性矩阵方程组 $X_i+\sum_{j=1}^{3}A_{ij}^{*}X_j^{-1}A_{ij}=I\left(i=1,2,3\right)$ 的数值求解问题进行研究。为了避免矩阵求逆操作引入的计算误差，提出一种新的免逆迭代算法。并且证明了该算法的收敛性，将免逆迭代思想从单变量方程及双变量方程组推广至更具一般性的三变量耦合方程组，避免了每步迭代中的矩阵求逆运算，显著降低了计算复杂度。最后，将免逆迭代算法与不动点法进行数值比较。实验结果表明，在不同矩阵维度下，免逆迭代算法在计算效率与迭代收敛速度方面具有明显优势。

参考文献

[1] Liu, A. and Chen, G. (2011) On the Hermitian Positive Definite Solutions of Nonlinear Matrix Equation $X^s + A^* X^{-t_1} A + B^* X^{-t_2} B = Q$. *Mathematical Problems in Engineering*, **2011**, 1-18. https://doi.org/10.1155/2011/163585

[2] Vaezzadeh, S., Vaezpour, S.M., Saadati, R. and Park, C. (2013) The Iterative Methods for Solving Nonlinear Matrix Equation $X + A^H X^{-1} A + B^H X^{-1} B = I$. *Advances in Difference Equations*, **2013**, Article No. 229. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-229

[3] Ali, H. and Hossein, S.M. (2020) On the Positive Definite Solution of a Class of Pair of Nonlinear Matrix Equations. *Computational and Applied Mathematics*, **39**, Article No. 102. https://doi.org/10.1007/s40314-020-1127-7

[4] Al-Dubiban, A.M. (2013) On the Iterative Method for the System of Nonlinear Matrix Equations. *Abstract and Applied Analysis*, **2013**, 1-7. https://doi.org/10.1155/2013/685753

[5] Al-Dubiban, A.M. (2012) Iterative Algorithm for Solving a System of Nonlinear Matrix Equations. *Journal of Applied Mathematics*, **2012**, 1-22. https://doi.org/10.1155/2012/461407

[6] Shil, S. and Nashine, H.K. (2021) Latest Inversion-Free Iterative Scheme for Solving a Pair of Nonlinear Matrix Equations. *Journal of Mathematics*, **2021**, 1-22. https://doi.org/10.1155/2021/2667885

[7] Bhatia, R. (2007) Positive Definite Matrices. Princeton University Press.

[8] Peng, Z., El-Sayed, S.M. and Zhang, X. (2007) Iterative Methods for the Extremal Positive Definite Solution of the Matrix Equation $X + A^* X^{-1} A = Q$. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **200**, 520-527. https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.01.033