

L重卷积L函数相关的傅里叶系数和的性质

张东鑫

华北水利水电大学数学与统计学院, 河南 郑州

收稿日期: 2026年4月21日; 录用日期: 2026年5月15日; 发布日期: 2026年5月26日

摘要

设 f 是全模群 $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ 上的全纯尖点形式, 这类形式是所有Hecke算子 T_n 的公共本征函数。设 H_k^* 表示 $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ 上具有偶整数权 k 的标准化本原全纯Hecke尖点形式构成的集合。本文主要关注与一般乘积L-函数相关的系数 $\sum_{n \leq X} \lambda_{f \otimes f \otimes \dots \otimes_{l_1} f}^{l_1}(n) \lambda_{g \otimes g \otimes \dots \otimes_{l_2} g}^{l_2}(n)$ 的均值, 这里 $\lambda_{f \otimes f \otimes \dots \otimes_{l_1} f}^{l_1}(n)$ 代表 l_1 次卷积的 l_1 次幂。

关键词

傅里叶系数, 自守形式, L-函数

Properties of Sums of Fourier Coefficients Related to L-Functions of L-Fold Convolutions

Dongxin Zhang

College of Mathematics and Statistics, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou Henan

Received: April 21, 2026; accepted: May 15, 2026; published: May 26, 2026

Abstract

Let f be a holomorphic cusp form for the full modular group $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$, which is a simultaneous eigenfunction of all Hecke operators T_n . Let H_k^* denote the set of normalized primitive holomorphic Hecke cusp forms of even integral weight k for $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$. We focus on the average

behavior of coefficients associated with general product L -functions

$\sum_{n \leq X} \lambda_{f \otimes f \otimes \dots \otimes_{l_1} f}^{t_1}(n) \lambda_{g \otimes g \otimes \dots \otimes_{l_2} g}^{t_2}(n)$, the notation $\lambda_{f \otimes f \otimes \dots \otimes_{l_1} f}^{t_1}(n)$ here represents the t_1 -th power of the coefficients of the l_1 -fold convolution of f .

Keywords

Fourier Coefficients, Automorphic Forms, L -Functions

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文研究全模群 $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ 的全纯尖点形式, 这类形式是所有 Hecke 算子 T_n 的共同本征函数。记 H_k^* 为 $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ 上偶整数权为 k 的标准化本原全纯 Hecke 尖点形式的集合。本原形式(或称新形式, newform)是指并非由更低水平(lower level)模形式提升得到的尖点形式; 在 Petersson 内积下, 本原形式的集合是旧形式(oldform)集合的正交补。该理论最初由 Atkin 和 Lehne [1]建立。对任意 $f \in H_k^*$, 在尖点 ∞ 的傅里叶展开形式为

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n) n^{\frac{k-1}{2}} e(nz), \quad \Im(z) > 0,$$

其中 $e(nz) = e^{2\pi i n z}$, $\lambda_f(n)$ 表示 f 的第 n 个归一化傅里叶系数(Hecke 特征值), 即满足 $\lambda_f(1) = 1$ 。根据 Hecke 算子理论, $\lambda_f(n)$ 是实的并且满足乘法性质:

$$\lambda_f(m) \lambda_f(n) = \sum_{d|(m,n)} \lambda_f\left(\frac{mn}{d^2}\right),$$

其中 $m, n \geq 1$ 是整数。

1974 年, P. Deligne [2]证明了拉马努金 - 彼得孙猜想:

$$|\lambda_f(n)| \leq d(n) \ll n^\epsilon, \quad (1.1)$$

这里 $d(n)$ 是经典除数函数。根据(1.1), Deligne 的界等价于存在 $\alpha_f(p), \beta_f(p) \in \mathbb{C}$ 满足

$$\alpha_f(p) + \beta_f(p) = \lambda_f(p), \alpha_f(p) \beta_f(p) = |\alpha_f(p)| = |\beta_f(p)| = 1. \quad (1.2)$$

更一般地, 对于所有正整数 $l \geq 1$, 有

$$\lambda_f(p^l) = \alpha_f(p)^l + \alpha_f(p)^{l-1} \beta_f(p) + \dots + \alpha_f(p) \beta_f(p)^{l-1} + \beta_f(p)^l. \quad (1.3)$$

对 $\Re(s) > 1$, $f \in H_k^*$ 相关的 Hecke L -函数 $L(f, s)$ 定义为:

$$L(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha_f(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta_f(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

其中 p 代表素数, 求和范围为所有素数组成的集合。

设 $f \in H_k^*$ 和 $g \in H_k^*$ 是两个不同的 Hecke 特征形式。吕广世[3]得到了该结果

$$\sum_{n \leq X} \lambda_f(n) \lambda_g(n) \ll X^{\frac{3}{5}} (\log X)^{\frac{2\theta}{3}}, \quad (1.4)$$

以及一些其他类似的结果, 其中 $\theta = 1 - \frac{8}{3\pi} = 0.1512\dots$ 。后来, 通过使用 Sato-Tate [4] 猜想, 得出了更好的结果, 即

$$\sum_{n \leq X} \lambda_f(n) \lambda_g(n) \ll X^{\frac{3}{5}} (\log X)^{\frac{64}{9\pi^2} - 1}. \quad (1.5)$$

华国栋[5]在某些自然条件下建立了渐进公式

$$\sum_{n \leq X} \lambda_f^2(n^i) \lambda_g^2(n^i) = cX + O\left(X^{\frac{(ij+i+j+2)(ij+i+j)}{(ij+i+j+2)(ij+i+j)+2} + \varepsilon}\right), \quad (1.6)$$

其中 $1 \leq i \leq j$ 是任意固定整数, $c > 0$ 是某个适当的常数。

受上述结果的启发, 本文研究了不同 L -函数卷积的傅里叶系数性质。

2. 主要结果

定理 1.1 令 $f, g \in H_k^*$ 是两个不同的 Hecke 特征形, $l_1, l_2 \geq 3$ 为任意固定整数定义

$$T_{l_1, l_2, t_1, t_2}(f, g, X) := \sum_{n \leq X} \lambda_{f \otimes f \otimes \dots \otimes_{l_1} f}^{t_1}(n) \lambda_{g \otimes g \otimes \dots \otimes_{l_2} g}^{t_2}(n) \quad (2.1)$$

$$K_{l,r} := \binom{l}{r}, \quad \eta_{l,r} := K_{l,r} - K_{l,r-1}.$$

其中 t_1, t_2 是任意大于 0 的正整数。对于任意 $\varepsilon > 0$, 我们有

(i) 当 l_1, t_1 和 l_2, t_2 每一组中至少有一个偶数时,

$$T_{l_1, l_2, t_1, t_2}(f, g, X) := xP_{t_1, t_2}(f, g, X) + O\left(X^{1 - \frac{1}{\alpha_{t_1, t_2}} + \varepsilon}\right)$$

其中 $xP_{t_1, t_2}(f, g, X)$ 是一个关于 t 的阶为 $\eta_{t_1, \eta_1} \eta_{t_2, \eta_2} - 1$ 的多项式, 首项系数为正, 并有

$$\begin{aligned} \alpha_{t_1, t_2} &= \frac{8}{7} \eta_{t_1, m_1} \eta_{t_2, m_2} + \frac{9}{2} \eta_{t_1, m_1-1} \eta_{t_2, m_2-1} + \frac{6}{5} (\eta_{t_1, m_1-1} + \eta_{t_2, m_2-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\eta_1=0}^{m_1-2} \sum_{\eta_2=0}^{m_2-2} (t_1 l_1 - 2r_1 + 1)(t_2 l_2 - 2r_2 + 1) \eta_{t_1, \eta_1} \eta_{t_2, \eta_2} + \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

(ii) 当 l_1, t_1 , 和 l_2, t_2 中其中一组有两个奇数时,

$$T_{l_1, l_2, t_1, t_2}(f, g, X) = O\left(X^{1 - \frac{1}{\beta_{t_1, t_2}} + \varepsilon}\right),$$

其中

$$\beta_{t_1, t_2} = \frac{2}{3} \eta_{t_1, m_1} \eta_{t_2, m_2} + \frac{1}{2} \sum_{\eta_1=0}^{m_1-2} \sum_{\eta_2=0}^{m_2-2} (t_1 l_1 - 2r_1 + 1)(t_2 l_2 - 2r_2 + 1) \eta_{t_1, \eta_1} \eta_{t_2, \eta_2}.$$

(iii) 当 l_1, t_1 , 和 l_2, t_2 全为奇数,

$$T_{t_1, t_2}(f, g, X) = O\left(X^{\frac{1}{\gamma_{t_1, t_2}} + \varepsilon}\right),$$

其中

$$\gamma_{t_1, t_2} = 2^{t_1 + t_2 - 1} + 1.$$

3. 引理

令 $f \in H_k^*$ 是 Hecke 特征形, 与 f 相关的 j 次对称幂 L -函数定义为

$$L(\text{sym}^j f, s) = \prod_p \prod_{m=0}^j (1 - \alpha_f(p)^{j-m} \beta_f(p)^m)^{-1}, \Re(s) > 1, \quad (3.1)$$

这里 $\alpha_f(p)$ 和 $\beta_f(p)$ 是两个复数, 满足

$$\alpha_f(p) + \beta_f(p) = \lambda_f(p), \alpha_f(p)\beta_f(p) = |\alpha_f(p)| = |\beta_f(p)| = 1. \quad (3.2)$$

我们将它展开为 Dirichlet 级数: 对于 $\Re(s) > 1$,

$$L(\text{sym}^j f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{sym}^j f}(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{\lambda_{\text{sym}^j f}(p)}{p^s} + \dots + \frac{\lambda_{\text{sym}^j f}(p^m)}{p^{ms}} + \dots \right) \quad (3.3)$$

显然, $\lambda_{\text{sym}^j f}(n)$ 是实的可乘函数。特别地, 对于 $j=1$, 有 $L(\text{sym}^1 f, s) = L(f, s)$ 。此外, 通常有

$$\lambda_f(p^j) = \lambda_{\text{sym}^j f}(p) = \sum_{m=0}^j \alpha_f(p)^{j-m} \beta_f(p)^m, \quad (3.4)$$

令 $f, g \in H_k^*$ 是两个不同的 Hecke 特征形, 与 $\text{sym}^i f$ 和 $\text{sym}^j g$ 相关的 Rankin-Selberg L -函数定义为

$$L(\text{sym}^i f \times \text{sym}^j g, s) = \prod_p \prod_{m=0}^i \prod_{m'=0}^j (1 - \alpha_f(p)^{i-2m} \alpha_g(p)^{j-2m'} p^{-s})^{-1}, \Re(s) > 1. \quad (3.5)$$

对于 $\Re(s) > 1$, 我们可以将其展开为 Dirichlet 级数

$$\begin{aligned} L(\text{sym}^i f \times \text{sym}^j g, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{sym}^i f \times \text{sym}^j g}(n)}{n^s} \\ &= \prod_p \left(1 + \sum_{r \geq 1} \frac{\lambda_{\text{sym}^i f \times \text{sym}^j g}(p^r)}{p^{rs}} \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中 $\lambda_{\text{sym}^i f \times \text{sym}^j g}(n)$ 是实的且满足可乘性。

类似地, 可以定义扭乘 Rankin-Selberg L -函数

$$\begin{aligned} &L(\text{sym}^i f \times \text{sym}^j g \otimes \chi, s) \\ &= \prod_p \prod_{m=0}^i \prod_{m'=0}^j (1 - \alpha_f(p)^{i-2m} \beta_f(p)^m \alpha_g(p)^{j-2m'} \beta_g(p)^{m'} \chi(p) p^{-s})^{-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{sym}^i f \times \text{sym}^j g}(n) \chi(n)}{n^s}, \Re(s) > 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

容易看出

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{sym}^i f \times \text{sym}^j g}(p) &= \sum_{m=0}^i \sum_{m'=0}^j \alpha_f(p)^{i-2m} \alpha_g(p)^{j-2m'} \\ &= \lambda_{\text{sym}^i f}(p) \lambda_{\text{sym}^j g}(p).\end{aligned}\quad (3.8)$$

从(3.1), (3.2), (3.3), (3.6), (3.8)可以发现

$$\left| \lambda_{\text{sym}^i f}(n) \right| \leq d_{j+1}(n), \quad \left| \lambda_{\text{sym}^i f \times \text{sym}^j g}(n) \right| \leq d_{(i+1)(j+1)}(n).$$

设 $l_1, l_2 \geq 3$ 为任意固定的正整数, 考虑与 $\lambda_{f \otimes f \otimes \dots \otimes_{l_1} f}(n) \lambda_{g \otimes g \otimes \dots \otimes_{l_2} g}(n)$ 相关的生成函数, 对 $\Re(s) > 1$, 定义

$$\mathfrak{F}^*(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_{f \otimes f \otimes \dots \otimes_{l_1} f}(n) \lambda_{g \otimes g \otimes \dots \otimes_{l_2} g}(n)}{n^s} \quad (3.9)$$

为方便起见, 我们定义

$$K_{l,r} := \binom{l}{r}, \quad \eta_{l,r} := K_{l,r} - K_{l,r-1}. \quad (3.10)$$

易得

$$\binom{l}{r} - \binom{l}{r-1} = \begin{cases} \frac{l-2r+1}{l-r+1} \binom{l}{r}, & \text{若 } r > 0, \\ 1, & \text{若 } r = 0. \end{cases}$$

引理 2.1. 设 $l_1, l_2 \geq 3$ 为任意固定的正整数, 对于 $\Re(s) > 1$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^*(s) &= G_{l_1, l_2}(s) V_{l_1, l_2}(s), \\ G_{l_1, l_2}(s) &= \prod_{\eta_1=0}^{\frac{l_1}{2}} \prod_{\eta_2=0}^{\frac{l_2}{2}} \left(L(\text{sym}^{\eta_1-2\eta_1} f \times \text{sym}^{\eta_2-2\eta_2} g, s)^{\eta_{l_1, \eta_1} \eta_{l_2, \eta_2}} \right),\end{aligned}\quad (3.11)$$

证明 由

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^*(s) &= \prod_p \left(1 + \frac{\lambda_f^{l_1}(p) \lambda_g^{l_2}(p)}{p^s} \right) \\ &= F_{l_1, l_2}(s) \times \prod_p \left(1 + \frac{\lambda_f^{l_1}(p^2) \lambda_g^{l_2}(p^2) - b(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right) \\ &:= F_{l_1, l_2}(s) U_{l_1, l_2}(s)^*.\end{aligned}$$

$\lambda_{f \otimes f \otimes \dots \otimes_{l_1} f}(n) \lambda_{g \otimes g \otimes \dots \otimes_{l_2} g}(n)$ 满足可乘性并且满足平凡的界

$$\lambda_{f \otimes f \otimes \dots \otimes_{l_1} f}(n) \lambda_{g \otimes g \otimes \dots \otimes_{l_2} g}(n) \ll n^\epsilon \quad (3.12)$$

对 $\Re(s) > 1$, 我们有

$$\mathfrak{F}^*(s) = \prod_p \left(1 + \frac{\lambda_f^{l_1}(p) \lambda_g^{l_2}(p)}{p^s} \right). \quad (3.13)$$

从华国栋[5] (21), 有

$$\lambda_{f \otimes f \otimes \dots \otimes f} (n) = \lambda_f^l (p) = \left(\sum_{r=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \eta_{l,r} \lambda_{\text{sym}_f^{l-2r}} (p) \right) \quad (3.14)$$

以及

$$\lambda'_{f \otimes f \otimes \dots \otimes f} (n) = \lambda_f^{l'} (p) = \left(\sum_{r=0}^{\lfloor l'/2 \rfloor} \eta_{l',r} \lambda_{\text{sym}_f^{l'-2r}} (p) \right) \quad (3.15)$$

从上式可以得到

$$\begin{aligned} & \lambda_{f \otimes f \otimes \dots \otimes f}^{l_1} (n) \lambda_{g \otimes g \otimes \dots \otimes g}^{l_2} (n) \\ &= \left(\sum_{\eta_1=0}^{m_1} \eta_{l_1, \eta_1} \lambda_{\text{sym}_f^{l_1-2\eta_1}} (p) \right) \left(\sum_{\eta_2=0}^{m_2} \eta_{l_2, \eta_2} \lambda_{\text{sym}_g^{l_2-2\eta_2}} (p) \right) \\ &= \sum_{\eta_1=0}^{m_1} \sum_{\eta_2=0}^{m_2} \eta_{l_1, \eta_1} \eta_{l_2, \eta_2} \lambda_{\text{sym}_f^{l_1-2\eta_1} \times \text{sym}_g^{l_2-2\eta_2}} (p) \end{aligned}$$

定义

$$F_{l_1, l_2} (s) = \prod_{\eta_1=0}^{m_1} \prod_{\eta_2=0}^{m_2} \left(L \left(\text{sym}_f^{l_1-2\eta_1} f \times \text{sym}_g^{l_2-2\eta_2} g, s \right)^{\eta_{l_1, \eta_1} \eta_{l_2, \eta_2}} \right), \quad (3.16)$$

那么它可以被表示为

$$F_{l_1, l_2} (s) = \prod_p \left(1 + \sum_{j \geq 1} \frac{b(p^j)}{p^{js}} \right), \quad (3.17)$$

这里

$$b(p) = \lambda_f^{l_1} (p) \lambda_g^{l_2} (p).$$

由(3.13), (3.16)和(3.17), 对于 $\Re(s) > 1$, 得到

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^* (s) &= \prod_p \left(1 + \frac{\lambda_f^{l_1} (p) \lambda_g^{l_2} (p)}{p^s} \right) \\ &= F_{l_1, l_2} (s) \times \prod_p \left(1 + \frac{\lambda_f^{l_1} (p^2) \lambda_g^{l_2} (p^2) - b(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right) \\ &:= F_{l_1, l_2} (s) U_{l_1, l_2} (s). \end{aligned}$$

令 $\mathbf{d} := (d_{i,j})_{0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J}$, $\mathbf{m} = (m_0, \dots, m_I)$, $\mathbf{n} = (n_0, \dots, n_J)$, $d_{i,j}, m_i, n_j \geq 0$, 设

$$A(\mathbf{d}, \mathbf{m}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J d_{i,j} (m_i + 1) (n_j + 1).$$

定义

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}^{\mathbf{d}} (f, g, s) := \prod_{i=0}^I \prod_{j=0}^J L \left(\text{sym}^{m_i} f \times \text{sym}^{n_j} g, s \right)^{d_{i,j}}, \quad (3.18)$$

引理 2.2. 设 $f \in H_k^*$ 和 $g \in H_{k'}^*$ 是两个不同的 Hecke 特征型, 并设 $d_{i,j}$, $m_i, n_j \in \mathbb{N}$. 令 $\mathcal{L}_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}^{\mathbf{d}} (f, g, s)$ 如公式(3.18)所定义, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 我们有

$$\int_T^{2T} \left| \mathcal{L}_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}^{\mathbf{d}} (f, g, \sigma + it) \right|^2 dt \ll_{f, g, \varepsilon, \mathbf{d}, \mathbf{m}, \mathbf{n}} T^{2A(\mathbf{d}, \mathbf{m}, \mathbf{n})(1-\sigma)+\varepsilon} \quad (3.19)$$

对 $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 + \varepsilon$, $|t| \geq 1$,

$$\mathcal{L}_{m,n}^d(f, g, \sigma + it) \ll_{f,g,\varepsilon,d,m,n} (1+|t|)^{A(d,m,n)(1-\sigma)+\varepsilon} \quad (3.20)$$

对 $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 + \varepsilon$, $|t| \geq 1$ 。

证明 参考蒋玉蛟[6]引理 2.6。

引理 2.3. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, $T \geq 1$ 一致成立

$$\int_1^T \left| \zeta\left(\frac{5}{7} + it\right) \right|^{12} dt \ll T^{1+\varepsilon}, \quad (3.21)$$

对所有 $\frac{1}{2} \leq \delta \leq 2$, $|t| \geq 1$ 一致成立

$$\zeta(\delta + it) \ll (1+|t|)^{\max\{\frac{12}{43}(1-\delta), 0\} + \varepsilon}. \quad (3.22)$$

证明 第一个结果是由 Ivić [7]建立的, 第二个结果是 Bourgain [8]的突破。

引理 2.4. 对于任意的 $\frac{1}{2} \leq \delta \leq 2$, $T \geq 1$ 一致成立

$$\int_1^T \left| \zeta\left(f, \frac{1}{2} + it\right) \right|^6 dt \ll T^{2+\varepsilon}, \quad (3.23)$$

对 $\frac{1}{2} \leq \delta \leq 2$, $|t| \geq 1$ 一致成立

$$L(f, \delta + it) \ll (1+|t|)^{\max\{\frac{2}{3}(1-\delta), 0\} + \varepsilon}, \quad (3.24)$$

证明 第一个结果在 Jutila [9]中给出, 第二个结果由 Good [10]证明。

引理 2.5. 对任意的 $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{2} \leq \delta \leq 2$, $|t| \geq 1$ 一致成立

$$L(\text{sym}^2 f, \delta + it) \ll (1+|t|)^{\max\{\frac{8}{7}(1-\delta), 0\} + \varepsilon}. \quad (3.25)$$

证明 该结果来自 Dasgupta, Leung 和 Young [11]。

4. 定理 1.1 的证明

对 Dirichlet 级数 $A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$, 佩龙公式给出离散和与复积分的等价关系:

$$\sum_{n \leq X} a(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} A(s) \frac{X^s}{s} ds, \quad \sigma_0 > 1$$

为消除端点的跳跃性, 引入平滑函数。设 $1 \leq Y < \frac{X}{2}$, 引入梅林函数 $w(x)$, 满足

$$w(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in [2Y, X], \\ 0, & \text{if } x < Y, x > X + Y, \end{cases}$$

梅林函数 $w(x)$ 无端点奇性; 导数有界, 保证了梅林变换衰减。

对所有的 $r \geq 0$, 有 $w^{(r)}(x) \ll_r Y^{-r}$, $t \in [0, 1]$ 。根据华国栋[5], $\hat{w}(s)$, $w(t)$ 的梅林变换满足

$$\hat{w} = \frac{1}{s(s+1)\cdots(s+m-1)} \int_0^\infty w^{(m)}(x) x^{s+m-1} dx \ll \frac{Y}{X^{1-\sigma}} \left(\frac{X}{|s|Y} \right)^m,$$

对任意的 $m \geq 1$, $\sigma = \Re(s)$ 。接下来开始证明:

由佩龙公式和平滑化, 得

$$\begin{aligned} T_{l_1, l_2, l_1, l_2}(f, g, X) &:= \sum_{n \leq X} \lambda_{f \otimes f \otimes \dots \otimes_{l_1} f}^{l_1}(n) \lambda_{g \otimes g \otimes \dots \otimes_{l_2} g}^{l_2}(n) \\ &= \text{Res}_{s=1} \left(\mathfrak{F}^*(s) \frac{X^s}{s} \right) + |E_{l_1, l_2}| + O(X^{-A}) + O(Y^{1+\varepsilon}), \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中

$$E_{l_1, l_2} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \hat{w}(s) \mathfrak{F}^*(s) ds$$

对于任意的 $\sigma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 其中 $\mathfrak{F}^*(s)$ 定义于(2-9), $A > 0$ 为任意大的实数, $T = X^{1+\varepsilon} Y$, Y 在稍后确定。

我们先观察主项, $\mathfrak{F}^*(s)$ 在 $s=1$ 处有高阶极点, 阶数为 $m = \eta_{l_1, l_1} \eta_{l_2, l_2} - 1$, 它的洛朗展开式为

$$\zeta^*(s) = \frac{C_m}{(s-1)^m} + \frac{C_{m-1}}{(s-1)^{m-1}} + \cdots + \frac{C_1}{s-1} + O(1), \quad s \rightarrow 1,$$

对 $\frac{X^s}{s} \mathfrak{F}^*(s)$, 在 $s=1$ 处的留数为

$$\text{Res}_{s=1} \left(\frac{X^s}{s} \mathfrak{F}^*(s) \right) = C_m \cdot \frac{X(\log X)^{m-1}}{(m-1)!} + C_{m-1} \cdot \frac{X(\log X)^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + C_1 X,$$

可合并为多项式

$$\text{Res}_{s=1} \left(\frac{X^s}{s} \mathfrak{F}^*(s) \right) = X \cdot P_{l_1, l_2}(\log X),$$

其中 $P_{l_1, l_2}(x)$ 为次数为 $m-1$ 的实系数多项式, 首项系数由最高阶洛朗系数 C_m 决定, 低次项系数由 C_{m-1}, \dots, C_1 依次确定。

通过引理 2.1 中对 $\mathfrak{F}^*(s)$ 的分解, 我们得到

$$\begin{aligned} E_{l_1, l_2} &\ll X^{\sigma_0} \int_{-T}^T \frac{|G_{l_1, l_2}(\sigma_0 + it)|}{|\sigma_0 + it|} dt \\ &\ll X^{\sigma_0} \left\{ \int_0^1 + \int_1^T \right\} \frac{|G_{l_1, l_2}(\sigma_0 + it)|}{|\sigma_0 + it|} dt \end{aligned}$$

首先计算当 $t \in [0, 1]$ 时, 分母 $|\sigma_0 + it| \gg 1$, L -函数在有界竖直线段上有界, 故

$$\int_0^1 \frac{|G_{l_1, l_2}(\sigma_0 + it)|}{|\sigma_0 + it|} dt \ll 1.$$

接下来对区间 $[1, T]$ 应用二进分解法, 将区间 $[1, T]$ 划分为 $[1, T] = \sum_{k=0}^K [2^k, 2^{k+1}]$, $2^K \leq T < 2^{K+1}$, 其中区间个数满足 $K \ll \log T$ 。对任意二进区间 $[T_1, 2T_1]$, 利用分母下界 $|\sigma_0 + it| \geq t \geq T_1$, 有二进区间估计

$$\int_{T_1}^{2T_1} \frac{|G_{l_1, l_2}(\sigma_0 + it)|}{|\sigma_0 + it|} dt \leq \frac{1}{T_1} \int_{T_1}^{2T_1} |G_{l_1, l_2}(\sigma_0 + it)| dt,$$

定义核心积分 $J_{l_1, l_2}(T_1)$

$$J_{l_1, l_2}(T_1) := T_1^{-1} \int_{T_1}^{2T_1} |G_{l_1, l_2}(\sigma_0 + it)| dt,$$

代入得

$$\int_{T_1}^{2T_1} \frac{|G_{l_1, l_2}(\sigma_0 + it)|}{|\sigma_0 + it|} dt \leq J_{l_1, l_2}(T_1),$$

对所有二进区间求和并利用最大值放缩, 得到

$$\int_1^T \frac{|G_{l_1, l_2}(\sigma_0 + it)|}{|\sigma_0 + it|} dt \ll \log T \max_{2 \leq T_1 \leq T/2} J_{l_1, l_2}(T_1),$$

合并两部分估计得到

$$E_{l_1, l_2} \ll X^{\sigma_0} + X^{\sigma_0} \log T \max_{2 \leq T_1 \leq T/2} J_{l_1, l_2}(T_1). \quad (4.2)$$

我们根据 l_1, l_2, t_1, t_2 的奇偶来划分情况。

(i) 当 l_1, t_1 , 和 l_2, t_2 每一组中至少有一个偶数时, 设 $\delta_0 = \frac{1}{2} + \varepsilon$ 。根据引理 2.1 和(3-11)中对 $\mathfrak{F}^*(s)$ 的分解, 以及柯西-施瓦兹不等式, 我们得到

$$\begin{aligned} J_{t_1 l_1, t_2 l_2}(T) &\ll \frac{1}{T} \int_T^{2T} |g_{t_1 l_1, t_2 l_2}(\sigma_0 + it)| dt \\ &\ll \frac{1}{T} \sup_{T \leq t \leq 2T} \left(|\zeta(\sigma_0 + it)|^{n_{l_1, m_1} n_{t_2 l_2, m_2}} |L(\text{sym}^2 f, \sigma_0 + it)|^{n_{l_1, m_1 - 1}} \right. \\ &\quad \times |L(\text{sym}^2 g, \sigma_0 + it)|^{n_{t_2 l_2, m_2 - 1}} |L(\text{sym}^2 f \times \text{sym}^2 g, \sigma_0 + it)|^{n_{l_1, m_1 - 1} n_{t_2 l_2, m_2 - 1}} \left. \right) \\ &\quad \times \left(\int_T^{2T} |L(\text{sym}^2 f, \sigma_0 + it) L(\text{sym}^2 g, \sigma_0 + it)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\int_T^{2T} \left| \prod_{\eta_1=0}^{m_1-2} \prod_{\eta_2=0}^{m_2-2} L(\text{sym}^{t_1 l_1 - 2\eta_1} f \times \text{sym}^{t_2 l_2 - 2\eta_2} g, \sigma_0 + it) \right|^{n_{l_1, \eta_1} n_{t_2 l_2, \eta_2}} dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

通过(3.22), (3.25)和引理 2.2, 也即应用亚凸性界, 再应用均值定理我们得到指数计算

$$\begin{aligned} J_{t_1 l_1, t_2 l_2}(T) &\ll T^{-1 + \frac{8}{7} \times \frac{1}{2} \times n_{l_1, m_1} n_{t_2 l_2, m_2} + \frac{6}{5} \times \frac{1}{2} (n_{l_1, m_1 - 1} + n_{t_2 l_2, m_2 - 1})} \\ &\quad \times T^{\frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times \frac{1}{2} \times n_{l_1, m_1 - 1} n_{t_2 l_2, m_2 - 1} + 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} \\ &\quad \times T^{\sum_{\eta_1=0}^{m_1-2} \sum_{\eta_2=0}^{m_2-2} (t_1 l_1 - 2\eta_1 + 1)(t_2 l_2 - 2\eta_2 + 1) n_{l_1, \eta_1} n_{t_2 l_2, \eta_2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} \\ &\ll T^{\frac{4}{7} n_{l_1, m_1} n_{t_2 l_2, m_2} + \frac{9}{4} n_{l_1, m_1 - 1} n_{t_2 l_2, m_2 - 1} + \frac{3}{5} (n_{l_1, m_1 - 1} + n_{t_2 l_2, m_2 - 1})} \\ &\quad \times T^{\frac{1}{4} \sum_{\eta_1=0}^{m_1-2} \sum_{\eta_2=0}^{m_2-2} (t_1 l_1 - 2\eta_1 + 1)(t_2 l_2 - 2\eta_2 + 1) n_{l_1, \eta_1} n_{t_2 l_2, \eta_2} - \frac{7}{10}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

将(4.3)代入(4.2), 得到

$$E_{l_1, l_2} \ll X^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + X^{\frac{1}{2}+\varepsilon} T^{\frac{4}{7}n_{l_1, m_1}n_{l_2, m_2} + \frac{9}{4}n_{l_1, m_1-1}n_{l_2, m_2-1} + \frac{3}{5}(n_{l_1, m_1-1} + n_{l_2, m_2-1})} \tag{4.4}$$

$$\times T^{\frac{1}{4} \sum_{\eta=0}^{m_1-2} \sum_{r_2=0}^{m_2-2} (l_1-2\eta+1)(l_2-2r_2+1)n_{l_1, \eta}n_{l_2, r_2} - \frac{7}{10} + \varepsilon}.$$

已知函数 $\mathfrak{F}^*(s)$ 在 $s=1$ 处有阶为 $n_{l_1, \eta_1}n_{l_2, \eta_2} - 1$ 的极点。将(4.4)代入(4.1)，我们得到

$$T_{l_1, l_2}(f, g, X) = XP_{l_1, l_2}(\log X) + O\left(X^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) + O\left(X^{\frac{1}{2}+\varepsilon} T^{\hat{\alpha}_{l_1, l_2} - 1}\right) + O(Y^{1+\varepsilon}) + O(X^{-A}), \tag{4.5}$$

这里

$$\hat{\alpha}_{l_1, l_2} = \frac{8}{14}n_{l_1, m_1}n_{l_2, m_2} + \frac{9}{4}n_{l_1, m_1-1}n_{l_2, m_2-1} + \frac{3}{5}(n_{l_1, m_1-1} + n_{l_2, m_2-1})$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{\eta_1=0}^{m_1-2} \sum_{r_2=0}^{m_2-2} (l_1-2\eta_1+1)(l_2-2r_2+1)n_{l_1, \eta_1}n_{l_2, r_2} + \frac{3}{10}.$$

通过代入 $T = X^{1+\varepsilon}Y$ 并选择 $Y = X^{\frac{1}{2\hat{\alpha}_{l_1, l_2}} + \varepsilon}$ 对于(4.5)，我们得到最终指数

$$S_{l_1, l_2}(f, g, X) = XP_{l_1, l_2}(\log X) + O\left(X^{\frac{1}{2\hat{\alpha}_{l_1, l_2}} + \varepsilon}\right)$$

$$= XP_{l_1, l_2}(\log X) + O\left(X^{\frac{1}{\hat{\alpha}_{l_1, l_2}} + \varepsilon}\right), \tag{4.6}$$

这里

$$\alpha_{l_1, l_2} = 2\hat{\alpha}_{l_1, l_2}$$

$$= \frac{8}{7}n_{l_1, m_1}n_{l_2, m_2} + \frac{9}{2}n_{l_1, m_1-1}n_{l_2, m_2-1} + \frac{6}{5}(n_{l_1, m_1-1} + n_{l_2, m_2-1})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\eta_1=0}^{m_1-2} \sum_{r_2=0}^{m_2-2} (l_1-2\eta_1+1)(l_2-2r_2+1)n_{l_1, \eta_1}n_{l_2, r_2} + \frac{3}{5}.$$

这就完成了每一组至少一个为偶数情况的证明。

(ii) 当 l_1, t_1 和 l_2, t_2 中其中一组有两个奇数时。我们取 $\sigma_0 = \frac{1}{2} + \varepsilon$ ，根据引理 3.1 中 $\mathfrak{F}^*(s)$ 的分解，利用柯西 - 施瓦兹不等式，得到

$$J_{l_1, l_2}(T) \ll \frac{1}{T} \int_T^{2T} |F_{l_1, l_2}(\sigma_0 + it)| dt$$

$$\ll \frac{1}{T} \sup_{T \leq t \leq 2T} \left(|L(g, \sigma_0 + it)|^{n_{l_1, m_1}n_{l_2, m_2} - 3} \right) \left(\int_T^{2T} |L(g, \sigma_0 + it)|^6 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left(\int_T^{2T} \left| \prod_{\eta_1=0}^{m_1-1} \prod_{r_2=0}^{m_2-1} L(\text{sym}^{l_1-2\eta_1} f \times \text{sym}^{l_2-2r_2} g, \sigma_0 + it) \right|^{n_{l_1, \eta_1}n_{l_2, r_2}} dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

通过引理 2.4, (4.24), (4.19)，得到

$$J_{l_1, l_2}(T) \ll T^{-1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times (n_{l_1, m_1}n_{l_2, m_2} - 3) + 2 \times \frac{1}{2} \sum_{\eta_1=0}^{m_1-1} \sum_{r_2=0}^{m_2-1} (l_1-2\eta_1+1)(l_2-2r_2+1)n_{l_1, \eta_1}n_{l_2, r_2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}$$

$$\ll T^{\frac{1}{3}n_{l_1, m_1}n_{l_2, m_2} + \frac{1}{4} \sum_{\eta_1=0}^{m_1-1} \sum_{r_2=0}^{m_2-1} (l_1-2\eta_1+1)(l_2-2r_2+1)n_{l_1, \eta_1}n_{l_2, r_2} - 1}. \tag{4.7}$$

将估计值代入(4.7)到(4.2)得到

$$E_{t_1 l_1, t_2 l_2} \ll X^{\frac{1}{2}+\varepsilon} T^{\frac{1}{3}n_{t_1 l_1, m_1} n_{t_2 l_2, m_2} + \frac{1}{4} \sum_{r_1=0}^{m_1-1} \sum_{r_2=0}^{m_2-1} (t_1 l_1 - 2r_1 + 1)(t_2 l_2 - 2r_2 + 1) n_{t_1 l_1, r_1} n_{t_2 l_2, r_2}^{-1}} + X^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \quad (4.8)$$

根据引理 2.1, 我们知道 $\mathfrak{F}^*(s)$ 在半平面 $\Re(s) > \frac{1}{2}$ 上是全纯的。将(4.8)代入(4.1)得到

$$T_{t_1 l_1, t_2 l_2}(f, g, X) = O\left(X^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) + O\left(X^{\frac{1}{2}+\varepsilon} T^{\beta_{t_1 l_1, t_2 l_2} - 1}\right) + O(Y^{1+\varepsilon}) + O(X^{-A}), \quad (4.9)$$

这里

$$\hat{\beta}_{t_1 l_1, t_2 l_2} = \frac{1}{3} n_{t_1 l_1, m_1} n_{t_2 l_2, m_2} + \frac{1}{4} \sum_{r_1=0}^{m_1-1} \sum_{r_2=0}^{m_2-1} (t_1 l_1 - 2r_1 + 1)(t_2 l_2 - 2r_2 + 1) n_{t_1 l_1, r_1} n_{t_2 l_2, r_2}$$

通过代入 $T = X^{1+\varepsilon} Y$ 并选择 $Y = X^{\frac{1-\frac{1}{\hat{\beta}_{t_1 l_1, t_2 l_2}}+\varepsilon}{2}}$ 对于(4.9), 我们得到

$$T_{t_1 l_1, t_2 l_2}(f, g, X) = O\left(X^{\frac{1-\frac{1}{\hat{\beta}_{t_1 l_1, t_2 l_2}}+\varepsilon}{2}}\right), \quad (4.10)$$

这里

$$\begin{aligned} \beta_{t_1 l_1, t_2 l_2} &= 2\hat{\beta}_{t_1 l_1, t_2 l_2} \\ &= \frac{2}{3} n_{t_1 l_1, m_1} n_{t_2 l_2, m_2} + \frac{1}{2} \sum_{r_1=0}^{m_1-1} \sum_{r_2=0}^{m_2-1} (t_1 l_1 - 2r_1 + 1)(t_2 l_2 - 2r_2 + 1) n_{t_1 l_1, r_1} n_{t_2 l_2, r_2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

(iii) 当 l_1, t_1 和 l_2, t_2 全为奇数时。从(3.9)中我们得知 $\mathfrak{F}^*(s)$ 是一个阶为 $2^{t_1 l_1 + t_2 l_2}$ 的 L 级数, 通过(3.19)和施瓦兹不等式以及高阶函数的次凸性, 得到

$$\begin{aligned} J_{t_1 l_1, t_2 l_2}(T) &\ll \frac{1}{T} \int_T^{2T} |F_{t_1 l_1, t_2 l_2}(\sigma_0 + it)| dt \\ &\ll \frac{1}{T} \left(\int_T^{2T} |F_{t_1 l_1, t_2 l_2}(\sigma_0 + it)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} \\ &\ll T^{-1+2\eta_{t_1 l_1, t_2 l_2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \\ &\ll T^{2^{t_1 l_1 + t_2 l_2} - 2 - \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

类似于(ii)地证明, 得到

$$T_{t_1 l_1, t_2 l_2}(f, g, X) = O\left(X^{\frac{1-\frac{1}{\eta_{t_1 l_1, t_2 l_2}}+\varepsilon}{2}}\right),$$

其中

$$\gamma_{t_1 l_1, t_2 l_2} = 2^{t_1 l_1 + t_2 l_2 - 1} + 1.$$

定理 1.1 证毕。

5. 结语

本文构造的生成函数与 L -函数分解框架, 可兼容奇偶重数、奇偶幂次的不同情形, 为同类高次乘积

L -函数系数均值问题提供了统一处理路径。一般 L -函数卷积的均值估计与变号问题密切相关。立足于现有成果, 该方向仍存在诸多值得深入挖掘的研究空间: 将特殊集合上的均值结果应用于数论中表示数估计、自守形式傅里叶系数符号变化等经典问题, 挖掘该类均值估计的实际应用价值, 推动自守 L -函数理论与其他数论分支的交叉融合。

参考文献

- [1] Atkin, A.O.L. and Lehner, J. (1970) Hecke Operators on $\Gamma_0(m)$. *Mathematische Annalen*, **185**, 134-160.
<https://doi.org/10.1007/bf01359701>
- [2] Deligne, P. (1974) La conjecture de weil: I. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, **43**, 273-307.
<https://doi.org/10.1007/bf02684373>
- [3] Lü, G. (2014) Sums of Absolute Values of Cusp Form Coefficients and Their Application. *Journal of Number Theory*, **139**, 29-43. <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2013.12.011>
- [4] Wong, P. (2019) On the Chebotarev-Sato-Tate Phenomenon. *Journal of Number Theory*, **196**, 272-290.
<https://doi.org/10.1016/j.jnt.2018.09.010>
- [5] Hua, G. (2025) On the Asymptotics of Coefficients Associated to L-Fold Product L-Functions and Its Applications. *The Ramanujan Journal*, **66**, 31-42. <https://doi.org/10.1007/s11139-024-01003-4>
- [6] Jiang, Y. and Lü, G. (2014) On the Higher Mean over Arithmetic Progressions of Fourier Coefficients of Cusp Forms. *Acta Arithmetica*, **166**, 231-252. <https://doi.org/10.4064/aa166-3-2>
- [7] Iwaniec, H. (1997) Topics in Classical Automorphic Forms. American Mathematical Society.
<https://doi.org/10.1090/gsm/017>
- [8] Bourgain, J. (2016) Decoupling, Exponential Sums and the Riemann Zeta Function. *Journal of the American Mathematical Society*, **30**, 205-224. <https://doi.org/10.1090/jams/860>
- [9] Jutila, M. (1987) Lectures on a Method in the Theory of Exponential Sums. Springer.
- [10] Good, A. (1982) The Square Mean of Dirichlet Series Associated with Cusp Forms. *Mathematika*, **29**, 278-295.
<https://doi.org/10.1112/s0025579300012377>
- [11] Dasgupta, A., Leung, W.H. and Young, M.P. (2024) The second Moment of the GL3 Standard L-Function on the Critical Line. arXiv:2407.06962.