Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(6), 18-23
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.166152

Hans汉斯

最优化方法中拉格朗日函数的重要性探讨

杨志霞*，叶俊佑

新疆大学数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2026年4月12日；录用日期：2026年5月15日；发布日期：2026年6月15日

摘 要

拉格朗日函数是约束优化问题求解的核心工具，通过引入拉格朗日乘子将约束优化问题转化为无约束优化问题，构建了统一的理论与算法框架。本文阐述拉格朗日函数的数学定义与几何意义，结合简单案例说明乘子的影子价格解释，并系统分析其在最优化方法中的关键作用。其作为约束问题与无约束问题之间的桥梁，支撑KKT条件、对偶理论及增广拉格朗日方法、ADMM等主流优化算法的推导与设计，同时连接理论与工程、经济、机器学习等实际应用。研究表明，拉格朗日函数在最优化教学中具有主线地位，并持续推动大规模约束优化问题的算法创新。

关键词

拉格朗日函数，约束优化问题，拉格朗日乘子，KKT条件，对偶理论

Discussion on the Importance of Lagrangian Function in Optimization Methods

Zhixia Yang*, **Junyou Ye**

College of Mathematics and Systems Science, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Received: April 12, 2026; accepted: May 15, 2026; published: June 15, 2026

Abstract

The Lagrangian function is a core tool for solving constrained optimization problems. By introducing the Lagrange multiplier, it transforms constrained optimization problems into unconstrained ones, thereby establishing a unified theoretical and algorithmic framework. This paper elucidates the mathematical definition and geometric significance of the Lagrangian function, illustrates the interpretation of the multiplier's shadow price using a simple example, and systematically analyzes its pivotal role in the optimization problem. Serving as a bridge between constrained and unconstrained problems, the

*通讯作者。

文章引用: 杨志霞, 叶俊佑. 最优化方法中拉格朗日函数的重要性探讨[J]. 理论数学, 2026, 16(6): 18-23.
DOI: 10.12677/pm.2026.166152

Lagrangian function underpins the derivation and design of mainstream optimization algorithms such as the KKT conditions, duality theory, augmented Lagrangian methods, and ADMM, while also connecting theory with practical applications in engineering, economics, and machine learning. Research indicates that the Lagrangian function occupies a central position in optimization education and continues to drive algorithmic innovation for large-scale constrained optimization problems.

Keywords

Lagrangian Function, Constrained Optimization Problem, Lagrange Multiplier, KKT Conditions, Duality Theory

1. 引言

最优化方法[1] [2]的核心目标是在给定约束条件下，找到目标函数的极值(最大值或最小值)，其应用覆盖工科、理科、经济学等多个学科领域。在最优化问题中，约束条件的存在使得无约束优化的直接求解方法(如梯度下降法)无法直接应用，而拉格朗日函数[3] [4]通过引入拉格朗日乘子，将约束优化问题转化为无约束优化问题，构建了约束优化求解的统一框架。王宜举等指出[5]约束优化问题的 Lagrange 对偶理论是《最优化方法》课程的重要内容，也是难点内容。当前流行的交替方向乘子法[6] [7] (ADMM)也与拉格朗日函数密切相关。

在教学实践中，学生普遍存在对拉格朗日函数的推导逻辑理解不透彻、乘子意义模糊、无法灵活应用于复杂约束问题等情况。基于此，本文通过一个简单直观的案例，明确其几何意义和核心思想，并通过多维度分析拉格朗日函数在最优化方法中的重要性，助力学生掌握拉格朗日函数的思想精髓，提升最优化方法的学习积极性与应用能力。

2. 拉格朗日函数的定义和核心思想

2.1. 数学定义

拉格朗日函数针对约束优化问题构建，将目标函数与约束条件整合为统一的函数表达式，实现约束条件的内化处理。

针对一般的约束优化问题：

$$\begin{aligned} &\min_{x\in R^n} f(x) \\ &s.t.\ \ h_i(x)=0,\ i=1,2,\cdots,m, \\ &\qquad g_j(x)\ge 0, j=1,2,\cdots,l, \end{aligned} \tag{1}$$

其中，$f(x)$ 为目标函数，$h_i(x)=0$ 为等式约束条件，共 m 个，$g_j(x)\ge 0$ 为不等式约束条件，共 l 个，x 为 n 维决策变量。

优化问题(1)对应的拉格朗日函数定义为：

$$L(x,\lambda,\mu)=f(x)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i h_i(x)-\sum_{j=1}^{l}\mu_j g_j(x), \tag{2}$$

其中 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)^{\mathrm{T}}$ 为等式约束对应的拉格朗日乘子向量，$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_l)^{\mathrm{T}}$ 为不等式约束对应的拉

格朗日乘子向量，且满足非负约束 $\mu \ge 0$ 。

2.2. 几何意义及影子价格

本小节用一个简单的案例来说明拉格朗日函数的几何意义，以及拉格朗日乘子的经济意义，即影子价格[8]。

案例：假设你经营一家养殖厂，需要为牲畜配制饲料。有两种原料可选：原料 A 的价格为 2 元/公斤，原料 B 的价格为 4 元/公斤，目标是最小化总成本。同时，饲料必须满足最低的营养标准，原料 A 每公斤提供 1 单位营养，原料 B 每公斤也提供 1 单位营养。规定每份饲料必须至少含有 10 单位营养。

假设分别用 x_1 公斤原料 A 和 x_2 公斤原料 B 配置饲料，为满足以上要求，构建如下优化问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1,x_2) = 2x_1 + 4x_2, \\ \text{s.t.} \quad & h(x_1,x_2) = x_1 + x_2 = 10, \\ & g_1(x_1,x_2) = x_1 \ge 0, \\ & g_2(x_1,x_2) = x_2 \ge 0, \end{aligned} \tag{3}$$

其中等式约束可理解为营养不足不行，多余无用。事实上，线性规划问题(3)很容易利用图解法(见图 1)得其最优解为：$x^* = (x_1^*, x_2^*)^{\mathrm{T}} = (10,0)^{\mathrm{T}}$，对应的最优函数值为：$f^*(x^*) = 20$，即最优配方全部使用原料 A。

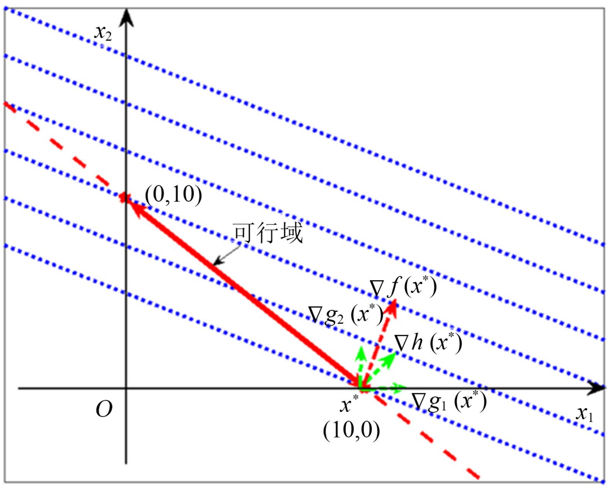

Figure 1. The geometric interpretation of Example 1
图 1. 案例 1 的几何意义

由于等式约束 $x_1 + x_2 = 10$ 是一条直线，结合两个非负约束，从图 1 可看出可行域是直线从点 $(0,10)^{\mathrm{T}}$ 到点 $(10,0)^{\mathrm{T}}$ 的线段。目标函数 $2x_1 + 4x_2 = c$ 是一族平行直线，c 越小越靠近原点。最优解 $x^* = (10,0)^{\mathrm{T}}$ 是可行域的右端点，此时，等式约束起作用，非负约束 $x_2 \ge 0$ 起作用(取等号)，非负约束 $x_1 \ge 0$ 不起作用(取严格大于号)。从几何上看，目标函数的梯度方向

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^{\mathrm{T}} = (2,4)^{\mathrm{T}}$$

与约束条件的梯度

$$\nabla h = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2} \right)^{\mathrm{T}} = (1,1)^{\mathrm{T}}, \quad \nabla g_1 = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}, \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right)^{\mathrm{T}} = (1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \nabla g_2 = \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1}, \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right)^{\mathrm{T}} = (0,1)^{\mathrm{T}},$$

共面，代数表达式为：

$$\nabla f = \lambda \nabla h + \mu_1 \nabla g_1 + \mu_2 \nabla g_2, \tag{4}$$

其中 $\lambda = 2$， $\mu_1 = 0$， $\mu_2 = 2$ 。

事实上，(4)式可通过如下拉格朗日函数关于优化问题(3)的决策变量 x_1, x_2 的梯度等于零而得到，即

$$\nabla_x L(x_1, x_2, \lambda, \mu_1, \mu_2) = 0, \tag{5}$$

其中 $L(x_1, x_2, \lambda, \mu_1, \mu_2) = 2x_2 + 4x_2 - \lambda(x_2 + x_2 - 10) - \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2$， λ 为等式约束的拉格朗日乘子， $\mu_1 \geq 0$ 和 $\mu_2 \geq 0$ 分别为不等约束的非负拉格朗日乘子， $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$ 。

从经济角度分析，令案例中的营养总量要求用 b 表示，那么当前的营养总量要求 $b = 10$。由于优化问题(3)中的等式约束对应的拉格朗日乘子 $\lambda = 2$，意味着当营养总量 b 每增加一个单位，总成本 f^* 将增加 2 元，即 $\Delta f^* = \lambda \Delta b = 2 \times 1 = 2$，本质是营养的边际成本为 2 元/单位。对于非负约束的拉格朗日乘子，由于非负约束 $x_1 \geq 0$ 不起作用，放松该约束不会降低成本，影子价格为 0，而非负约束 $x_2 \geq 0$ 起作用，该约束被限制在 0，若每减少 1 个单位 x_2，成本可降低 2 元，对应原料 B 的边际成本为 2 元/公斤。

从上述简单直观的案例可看出，拉格朗日函数的几何意义为，最优解处，目标函数梯度与所有起作用约束的梯度线性相关，而拉格朗日乘子对应于资源的边际价值。

3. 拉格朗日函数在最优化方法中的核心地位

3.1. 从约束问题到无约束问题的桥梁

拉格朗日函数的根本重要性在于其转换问题本质的能力。对于含有等式或不等式约束的优化问题，直接求解往往非常困难。拉格朗日乘子法通过引入拉格朗日乘子，将原约束问题与一个无约束的拉格朗日函数关联起来，这使得研究者能够利用成熟的无约束优化技术来解决约束问题，极大地扩展了可解问题的范围。

3.2. 各类优化理论的推导根基

最优化方法中的诸多重要理论，均以拉格朗日函数为基础推导而来。其中最具代表性的就是 Karush-Kuhn-Tucker (KKT)条件[9]，即 x^* 若问题(1)的局部最优解，则存在拉格朗日乘子 $\lambda_i^*, \mu_j^*, i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, l$, 使得如下条件成立：

稳定性条件为： $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x) - \sum_{j=1}^{l} \mu_j \nabla g_j(x) = 0,$

原始可行性条件： $h_i(x^*) = 0, i = 1, \cdots, m,$

原始可行性条件： $g_j(x^*) \geq 0, j = 1, \cdots, l,$

对偶可行性条件： $\mu_j^* \geq 0, j = 1, \cdots, l,$

互补松弛条件： $\mu_j^* g_j(x^*) = 0, j = 1, \cdots, l.$

事实上，以上条件是判断约束优化问题最优解的核心必要条件，也是绝大多数约束优化算法的理论依据。

除此之外，对偶理论、增广拉格朗日方法[10]、交替方向乘子法[8] (ADMM)、惩罚函数法、障碍函数法等重要优化理论与算法，都是在拉格朗日函数的基础上拓展改进而来。可以说，拉格朗日函数是现代最优化理论的基石，支撑起了整个约束优化的知识体系，在运筹学[11]、计算数学[12]、控制理论、机器学习等交叉学科中，都有着不可替代的核心地位。

3.3. 理论与实际应用的连接纽带

纯理论的最优化研究偏向数学推导，而实际工程问题、经济问题、机器学习问题，都带有明确的约束条件。拉格朗日函数既能完成严谨的理论推导，证明最优解的存在性与判定准则，又能转化为可落地的求解算法，适配各类实际场景。

从经济领域的成本最小化、收益最大化，到工程领域的路径优化、参数整定，再到计算机领域的支持向量机(SVM)、逻辑回归、模型正则化，拉格朗日函数都实现了从理论到实践的落地，成为连接数学理论与实际应用的关键纽带。

3.4 支撑各类优化算法的设计与改进

拉格朗日函数不仅是理论推导工具，更是优化算法设计的核心依据。经典的拉格朗日乘数法，直接依托拉格朗日函数求解等式约束优化问题；针对不等式约束问题，衍生出序列二次规划算法；为了克服传统拉格朗日函数的收敛缺陷，学者们提出了增广拉格朗日方法；在分布式优化、多智能体优化领域，交替方向乘子法(ADMM)也以拉格朗日函数为基础。

这些算法广泛应用于工程优化、数据处理、人工智能等领域，成为解决实际优化问题的利器。可以说，主流的约束优化算法，都离不开拉格朗日函数的理论支撑，其算法稳定性、求解效率都依托于拉格朗日函数的严谨性。

5. 结论

拉格朗日函数是最优化方法中的核心工具起着至关重要的作用，占据着基础性、枢纽性的学科地位。它统一了约束优化问题的求解框架，推导了最优解判定准则，构建了对偶理论体系，揭示了约束的实际价值，支撑了各类优化算法的设计，不仅推动了最优化理论的完善，更在工程、经济、计算机、自动化等领域实现了广泛落地。

在最优化教学中，拉格朗日函数是贯穿课程的主线，深刻理解其内涵与应用，是掌握约束优化的关键。随着人工智能、大数据技术的发展，高维、大规模、分布式约束优化问题越来越多，拉格朗日函数也将持续发挥作用，依托增广拉格朗日、ADMM 等改进方法，适配更复杂的应用场景。

未来，在教学研究中，应进一步简化理论推导的抽象感，结合工程实例强化实践教学，让学习者真正掌握拉格朗日函数的精髓；在理论研究中，可依托拉格朗日函数进一步优化算法，提升大规模优化问题的求解效率，拓展其在前沿科技领域的应用范围。

基金项目

本研究得到了新疆维吾尔自治区教育厅综合教改项目(XJGXJGZH-2024022)、新疆大学 2024 年研究生课程建设项目(XJDX2024YKCSZ15)资助。

参考文献

[1] 陈宝林. 最优化理论与算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2016.

[2] 王燕军, 梁治安. 最优化基础理论与方法[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2011.

[3] 孙敏, 葛静. 最优化方法课程研究性教学之初探——拉格朗日乘子法[J]. 菏泽学院学报, 2022, 44(2): 103-108.

[4] 胡根生. 拉格朗日乘子法在运筹学教学中的应用[J]. 牡丹江师范学院学报: 自然科学版, 2012(4): 64-66.

[5] 王宜举, 修乃华. 从约束优化问题的 Lagrange 对偶看《最优化方法》课程的驱动优化教学[J]. 创新教育研究, 2019, 7(5): 541-545.

[6] Boyd, S., Parikh, N., Chu, E., Peleato, B. and Eckstein, J. (2011) Distributed Optimization and Statistical Learning via

the Alternating Direction Method of Multipliers. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, **3**, 1-122. https://doi.org/10.1561/2200000016

[7] Han, D. (2022) A Survey on Some Recent Developments of Alternating Direction Method of Multipliers. *Journal of the Operations Research Society of China*, **10**, 1-52. https://doi.org/10.1007/s40305-021-00368-3

[8] (美)阿维纳什·K·迪克西特(Avinash K. Dixit). 经济理论中的最优化方法[M]. 上海: 上海人民出版社, 2006.

[9] Boyd, S., Vandenberghe, L. 凸优化[M]. 北京: 清华大学出版社, 2013.

[10] Nwachukwu, A. and Karbowski, A. (2025) Parallel and Distributed Machine Learning on Augmented Lagrangian Algorithms. *International Journal of Electronics and Telecommunications*, **71**, 1-10. https://doi.org/10.24425/ijet.2025.155472

[11] 胡运权. 运筹学教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2018.

[12] 李董辉. 数值最优化[M]. 北京: 科学出版社, 2015.