

具有从众行为的扩散捕食者 - 食饵模型的入侵行波解

蒲斌强, 张国宝

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2026年4月26日; 录用日期: 2026年5月29日; 发布日期: 2026年6月30日

摘要

本文主要研究具有从众行为的扩散捕食者 - 食饵模型。为了刻画捕食者的入侵共存现象, 我们特别关注了该模型的行波解(即入侵行波解)。通过构造一对适当的上下解并应用Schauder不动点定理, 证明了超临界波速下连接边界平衡点的行波解的存在性。

关键词

捕食者 - 食饵模型, 从众行为, 平方根功能响应, 入侵行波解

Invasion Traveling Waves of a Diffusive Predator-Prey Model with Herd Behavior

Binqiang Pu, Guobao Zhang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: April 26, 2026; accepted: May 29, 2026; published: June 30, 2026

Abstract

This paper focuses on the study of a diffusive predator-prey model with herd behavior. In order to characterize the invading coexistence phenomenon of predator, special attention is paid to traveling wave solutions (i.e., invasion traveling waves) of the model. By constructing a pair of suitable upper-lower solutions and applying Schauder's fixed point theorem, we obtain the existence of traveling wave solutions with super-critical speeds and connecting the boundary equilibrium at negative infinity.

Keywords

Predator-Prey Model, Herd Behavior, Square Root Functional Response, Invasion Traveling Waves

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

捕食者 - 食饵关系是自然界中不同物种间的基本关系之一。为了阐释这一现象, 人们利用微分方程来模拟捕食者与食饵之间的相互作用。经典的捕食者 - 食饵模型具有如下形式(参见, 例如[1] [2])

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u) - h(u, v)v, \\ \frac{dv}{dt} = ch(u, v)v - sv, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 u 和 v 分别表示食饵和捕食者的种群密度, 函数 $f(x)$ 是食饵的自然增长函数, $h(u, v)v$ 是捕获项, s 是捕食者在没有食饵情况下的死亡率, c 是捕食者的生物转化或消耗率。 $h(u, v)$ 被称为功能反应, 即单位时间内单位捕食者密度捕获的食饵密度。在经典的 Lotka-Volterra 模型中, 功能反应假设为 Holling I 型, 仅依赖于食饵密度且呈线性, 即 $h(u, v) = au$, 其中 a 是一个正的常数, 称为捕获率。此外, 通常假设食饵呈逻辑斯蒂增长, 即 $f(u) = ru(1 - u/K)$ 。因此, 模型(1.1)简化为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right) - auv, \\ \frac{dv}{dt} = -sv + cauv, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 r 为食饵种群的增长率, K 为其环境容纳量。当然, 还有其他一些功能性反应, 例如 Holling I-IV 类型、Beddington-DeAngelis 类型、比率依赖型等等。

在现实世界中, 许多食饵种群通过群体行为来抵御捕食者, 从而提高自身的生存能力。然而, 模型(1.2)无法准确描述这一现象。因此, Ajraldi 等人[3]提出了一个具有平方根功能反应的捕食者 - 食饵模型

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right) - a\sqrt{uv}, \\ \frac{dv}{dt} = -sv + ca\sqrt{uv}. \end{cases} \quad (1.3)$$

自此以后, 具有平方根功能响应的捕食者 - 食饵模型得到了广泛研究[4]-[7]。特别是, Braza [4]研究了具有 $r = K = a = 1$ 的(1.3)模型的稳态、稳定性及分岔, 并发现其在原点附近的解行为比标准模型更为微妙且有趣, 并且具有生态学意义。Xu、Yuan 和 Zhang [7]研究了具有更一般功能响应的模型(1.3)的全局动力学, 包括周期轨道不存在性以及极限环的存在性和唯一性。

从系统(1.3)的第二个方程可以看出, 捕食者的死亡率是线性的, 即 $-sv$ 。众所周知, 二次死亡率 $-sv^2$ 也被广泛研究。例如, Ghorai 和 Poria [8]研究了具有二次死亡率和 Holling II 型的扩散捕食者 - 食饵系统的影响。为了描述复杂时空种群动态的机制, 2013年, Yuan、Xu 和 Zhang [9]提出了如下反应扩散模型

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + u(1-u) - \sqrt{u}v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + \gamma v(-\beta v + \sqrt{u}). \end{cases} \quad (1.4)$$

其中 d_1, d_2, γ 和 β 为正的常数。在该模型中, d_1 和 d_2 分别表示物种 u 和 v 的扩散系数; γ 为转换率, 而 $\gamma\beta$ 表示捕食者的死亡率。在文献[9]中, 作者研究了(1.4)式的空间动力学。更确切地说, 通过线性稳定性分析, 他们得到了稳定模式的条件。此外, 应用标准的多尺度分析, 他们建立了激发模式的振幅方程, 这些方程决定了振幅对均匀和非均匀扰动的稳定性。后来, Xu 和 Song [10]探讨了模型(1.4)的 Hopf 分岔和 Turing 不稳定性。关于模型(1.4)及其变体的更多研究, 我们建议读者参考文献[11]-[15]。

系统(1.4)的空间齐次系统为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(1-u) - \sqrt{u}v, \\ \frac{dv}{dt} = \gamma v(-\beta v + \sqrt{u}). \end{cases} \quad (1.5)$$

显然, 常微分方程系统(1.5)总是存在两个平衡点 $(0, 0)$ 和 $(1, 0)$ 。当 $\beta > 1$ 时, 系统(1.5)存在一个正的常数平衡点 (u^*, v^*) , 其中 $u^* = \frac{\beta-1}{\beta}$ 和 $v^* = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\beta-1}{\beta}}$ 。此外, $(1, 0)$ 是系统(1.5)的一个不稳定平衡态, 而 (u^*, v^*) 是稳定的。这意味着可以观察到本地物种(食饵)和入侵物种(捕食者)之间的入侵共存现象。在数学上, 行波解是描述这种入侵共存现象的一种非常有效的方法。注意, 当 $c > 0$ 时, 系统(1.4)的行波解存在且连接 $(1, 0)$ 和 (u^*, v^*) , 意味着捕食者的成功入侵。因此, 我们将这种类型的行波解称为系统(1.4)的入侵行波解。

本文致力于证明系统(1.4)的入侵行波解的存在性。对于合作反应扩散系统, 已有较为通用的行波理论, 参见文献[16]-[20]。然而, 这些理论无法直接应用于捕食者-食饵模型。众所周知, 捕食者-食饵模型的行波解已得到广泛研究, 参见, 例如文献[21]-[27]。主要方法包括打靶法、Conley 指数和不动点定理。前两种方法使用起来较为困难。受文献[22][24][26]的启发, 我们将采用 Schauder 不动点定理以及上下解方法来证明系统(1.4)在速度为 $c > c^*$ 时入侵行波解的存在性, 其中 c^* 为某个正常数。对于合作系统, 找到上下解较为直接, 但对于非单调系统, 构造具有正确边界的上下解则非常困难。由于模型中存在平方根功能响应, 本文需要构造新的上下解对。

本文其余部分的结构安排如下。在第 2 节中, 我们给出系统(1.4)的入侵行波解的定义和本文的主要结论。在第 3 节中, 我们首先构造一对合适的上下解。然后, 通过应用 Schauder 不动点定理, 证明当波速 $c > c^*$ 时系统(1.4)的入侵行波解的存在性。

2. 预备知识和主要结果

定义 2.1 系统(1.4)的行波解(简称行波)是定义于所有 $x, t \in \mathfrak{R}$ 且具有以下形式的特殊整体解

$$u(x, t) = \varphi(\xi), \quad v(x, t) = \phi(\xi), \quad \xi = x + ct,$$

其中 $(\varphi, \phi) \in C^2(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^2)$ 为在常数波速 $c > 0$ 下沿一维空间域 \mathfrak{R} 传播的波形轮廓。

令 $\xi = x + ct \in \mathfrak{R}$ 。则 (φ, ϕ) 和 $c > 0$ 必须满足

$$\begin{cases} d_1 \varphi''(\xi) - c\varphi'(\xi) + \varphi(\xi)(1-\varphi(\xi)) - \sqrt{\varphi(\xi)}\phi(\xi) = 0, \\ d_2 \phi''(\xi) - c\phi'(\xi) + \gamma\phi(\xi)(-\beta\phi(\xi) + \sqrt{\varphi(\xi)}) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

由于我们关注的是系统(1.4)的入侵行波解, 因此施加以下渐近边界条件

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} (\varphi(\xi), \phi(\xi)) = (1, 0) \text{ 和 } \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (\varphi(\xi), \phi(\xi)) = (u^*, v^*). \tag{2.2}$$

本文将借助上下解结合 Schauder 不动点定理来证明行波解的存在性。为了构造一对合适的上下解, 我们对 β 做出以下更严格的假设。

$$(H) \quad \beta \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

注记。假设条件(H)是技术性的, 主要是为了验证上解, 见引理 3.2。

定理 2.2 假设(H)成立。当 $c > c^* = 2\sqrt{d_2\gamma}$ 时, 对于所有的 $\xi \in \mathfrak{R}$, 系统(2.1)存在解 $(\varphi(\xi), \phi(\xi))$ 满足

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} (\varphi(\xi), \phi(\xi)) = (1, 0)$$

和

$$\frac{1}{\beta} < \varphi(\xi) < 1, \quad 0 < \phi(\xi) < \frac{1}{\beta}.$$

3. 行波解的存在性

在系统(1.4)中作变量替换 $\omega_1 = 1 - u$ 和 $\omega_2 = v$, 可得

$$\begin{cases} \omega_{1t} = d_1 \omega_{1xx} - \omega_1(1 - \omega_1) + \sqrt{1 - \omega_1} \omega_2, \\ \omega_{2t} = d_2 \omega_{2xx} + \gamma \omega_2 (-\beta \omega_2 + \sqrt{1 - \omega_1}). \end{cases} \tag{3.1}$$

若我们将系统(3.1)的行波解记为 $(U(\xi), V(\xi))$, 即 $(U(\xi), V(\xi)) = (1 - \varphi, \phi)$, 则可得

$$\begin{cases} d_1 U''(\xi) - cU'(\xi) - U(\xi)(1 - U(\xi)) + \sqrt{1 - U(\xi)}V(\xi) = 0, \xi \in \mathfrak{R} \\ d_1 V''(\xi) - cV'(\xi) + \gamma V(\xi)(-\beta V(\xi) + \sqrt{1 - U(\xi)}) = 0, \xi \in \mathfrak{R}. \end{cases} \tag{3.2}$$

相应地, 边界条件(2.2)变为

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} (U(\xi), V(\xi)) = (0, 0) \text{ 和 } \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (U(\xi), V(\xi)) = (1 - u^*, v^*).$$

3.1. 上下解的构造

在本小节中, 我们致力于构造用于不动点方法的系统(3.2)的一对上下解。首先, 我们给出系统(3.2)的上下解的定义。

定义 3.1 称连续函数对 $\bar{\Phi} = (\bar{U}, \bar{V})$ 和 $\underline{\Phi} = (\underline{U}, \underline{V})$ 分别为系统(3.2)的上解和下解, 若它们在除有限多个点 $T = \{T_i \in \mathfrak{R}, i = 1, \dots, m\}$ 外均二阶可微, 且满足以下不等式

$$\begin{aligned} c\bar{U}'(\xi) &\geq d_1 \bar{U}''(\xi) - \bar{U}(\xi)(1 - \bar{U}(\xi)) + \sqrt{1 - \bar{U}(\xi)}\bar{V}(\xi), \\ c\bar{V}'(\xi) &\geq d_2 \bar{V}''(\xi) + \gamma \bar{V}(\xi)(-\beta \bar{V}(\xi) + \sqrt{1 - \underline{U}(\xi)}), \\ c\underline{U}'(\xi) &\leq d_1 \underline{U}''(\xi) - \underline{U}(\xi)(1 - \underline{U}(\xi)) + \sqrt{1 - \underline{U}(\xi)}\underline{V}(\xi), \\ c\underline{V}'(\xi) &\leq d_2 \underline{V}''(\xi) + \gamma \underline{V}(\xi)(-\beta \underline{V}(\xi) + \sqrt{1 - \bar{U}(\xi)}). \end{aligned}$$

接下来, 我们定义

$$\Delta(\lambda, c) = d_2 \lambda^2 - c\lambda + \gamma.$$

容易看出, 当 $c > c^* = 2\sqrt{d_2\gamma}$ 时, $\Delta(\lambda, c) = 0$ 有两个正根

$$\lambda_{21} = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4d_2\gamma}}{2d_2} \text{ 和 } \lambda_{22} = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4d_2\gamma}}{2d_2}.$$

对于足够大的 $q > 1$, 我们定义以下函数

$$g(\xi) = e^{\lambda_{21}\xi} - qe^{\eta\lambda_{21}\xi},$$

其中 $\eta > 1$ 满足

$$\eta\lambda_{21} < \min\{2\lambda_{21}, \sigma + \lambda_{21}, \lambda_{22}\}. \quad (3.3)$$

令 $\sigma > 0$ 满足 $\sigma < \min\{c/d_1, \lambda_{21}\}$ 。通过直接计算, 可知 $g(\xi)$ 有一个负零点。设 $g(\xi_4) = 0$ 。因此, 我们有 $\xi_4 = \frac{1}{(\eta-1)\lambda_{21}} \ln \frac{1}{q} < 0$ 。

基于上述分析, 对所有 $\xi \in \mathfrak{R}$, 我们定义以下连续函数如下

$$\bar{U}(\xi) = \min\left\{1 - \frac{1}{\beta}, Ke^{\sigma\xi}\right\}, \quad \bar{V}(\xi) = \min\left\{\frac{1}{\beta}, e^{\lambda_{21}\xi}\right\} \quad (3.4)$$

和

$$\underline{U}(\xi) = 0, \quad \underline{V}(\xi) = \max\{0, e^{\lambda_{21}\xi} - qe^{\eta\lambda_{21}\xi}\}, \quad (3.5)$$

其中 K, q 为稍后确定的正常数。

我们将证明, 当 $c > c^*$ 时, $(\bar{U}(\xi), \bar{V}(\xi))$ 和 $(\underline{U}(\xi), \underline{V}(\xi))$ 是系统(3.2)的一对上下解。

引理 3.2 假设 $\sigma < \min\{c/d_1, \lambda_{21}\}$, $K > \max\left\{\frac{\beta-1}{\beta}, 1/(c\sigma - d_1\sigma^2)\right\}$ 。则对任意 $\xi \neq \xi_1$, 函数 $\bar{U}(\xi)$ 满足

$$c\bar{U}'(\xi) \geq d_1\bar{U}''(\xi) - \bar{U}(\xi)(1 - \bar{U}(\xi)) + \sqrt{1 - \bar{U}(\xi)}\bar{V}(\xi),$$

其中 $\xi_1 = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\beta-1}{K\beta} < 0$ 。

证明: 当 $\xi > \xi_1$ 时, $\bar{U} = 1 - \frac{1}{\beta}$ 。注意到对所有 $\xi \in \mathfrak{R}$, 有 $\bar{V}(\xi) \leq \frac{1}{\beta}$ 。由(H)可得 $\beta \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, 则我们有

$$\begin{aligned} & d_1\bar{U}''(\xi) - c\bar{U}'(\xi) - \bar{U}(\xi)(1 - \bar{U}(\xi)) + \sqrt{1 - \bar{U}(\xi)}\bar{V}(\xi) \\ &= -\frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) + \sqrt{\frac{1}{\beta}}\bar{V}(\xi) \\ &\leq -\frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) + \sqrt{\frac{1}{\beta}}\frac{1}{\beta} \\ &= -\frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{1}{\beta} - \sqrt{\frac{1}{\beta}}\right) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

当 $\xi < \xi_1$ 时, $\bar{U} = Ke^{\sigma\xi}$, 则可得

$$\begin{aligned}
 & d_1 \bar{U}''(\xi) - c \bar{U}'(\xi) - \bar{U}(\xi)(1 - \bar{U}(\xi)) + \sqrt{1 - \bar{U}(\xi)} \bar{V}(\xi) \\
 & < d_1 \bar{U}''(\xi) - c \bar{U}'(\xi) + \sqrt{1 - \bar{U}(\xi)} \bar{V}(\xi) \\
 & \leq d_1 K \sigma^2 e^{\sigma \xi} - c K \sigma e^{\sigma \xi} + \sqrt{1 - K e^{\sigma \xi}} e^{\lambda_{21} \xi} \\
 & = e^{\sigma \xi} \left\{ K(d_1 \sigma^2 - c \sigma) + e^{(\lambda_{21} - \sigma) \xi} \right\} \\
 & = e^{\sigma \xi} \left\{ K(d_1 \sigma^2 - c \sigma) + 1 \right\} \\
 & < 0.
 \end{aligned}$$

证明完毕。

引理 3.3 对任意 $\xi \neq \xi_1$, 函数 $\bar{V}(\xi)$ 满足

$$c \bar{V}'(\xi) \geq d_2 \bar{V}''(\xi) + \gamma \bar{V}(\xi) \left(-\beta \bar{V}(\xi) + \sqrt{1 - \underline{U}(\xi)} \right),$$

其中 $\xi_2 = \frac{1}{\lambda_{21}} \ln \frac{1}{\beta} < 0$ 。

证明: 当 $\xi > \xi_2$ 时, 我们有 $\bar{V} = \frac{1}{\beta}$ 。注意到对所有 $\xi \in \mathfrak{R}$, 有 $\underline{U}(\xi) = 0$ 。于是,

$$\begin{aligned}
 & d_2 \bar{V}''(\xi) - c \bar{V}'(\xi) + \gamma \bar{V}(\xi) \left(-\beta \bar{V}(\xi) + \sqrt{1 - \underline{U}(\xi)} \right) \\
 & = d_2 \bar{V}''(\xi) - c \bar{V}'(\xi) + \gamma \bar{V}(\xi) \left(-\beta \bar{V}(\xi) + 1 \right) \\
 & = \gamma \frac{1}{\beta} \left(-\beta \frac{1}{\beta} + 1 \right) \\
 & = 0.
 \end{aligned}$$

当 $\xi < \xi_2$ 时, $\bar{V} = e^{\lambda_{21} \xi}$ 。因此,

$$\begin{aligned}
 & d_2 \bar{V}''(\xi) - c \bar{V}'(\xi) + \gamma \bar{V}(\xi) \left(-\beta \bar{V}(\xi) + \sqrt{1 - \underline{U}(\xi)} \right) \\
 & = d_2 \bar{V}''(\xi) - c \bar{V}'(\xi) + \gamma \bar{V}(\xi) \left(-\beta \bar{V}(\xi) + 1 \right) \\
 & \leq d_2 \bar{V}''(\xi) - c \bar{V}'(\xi) + \gamma \bar{V}(\xi) \\
 & = d_2 \lambda_{21}^2 e^{\lambda_{21} \xi} - c \lambda_{21} e^{\lambda_{21} \xi} + \gamma e^{\lambda_{21} \xi} \\
 & = (d_2 \lambda_{21}^2 - c \lambda_{21} + \gamma) e^{\lambda_{21} \xi} \\
 & = \Delta(\lambda_{21}, c) \\
 & = 0.
 \end{aligned}$$

证明完毕。

引理 3.4 对任意 $\xi \in \mathfrak{R}$, 函数 $\underline{U}(\xi)$ 满足

$$c \underline{U}'(\xi) \leq d_1 \underline{U}''(\xi) - \underline{U}(\xi)(1 - \underline{U}(\xi)) + \sqrt{1 - \underline{U}(\xi)} \underline{V}(\xi).$$

证明: 由于对所有的 $\xi \in \mathfrak{R}$, 都有 $\underline{U}(\xi) = 0$, 则很容易看出

$$d_1 \underline{U}''(\xi) - c \underline{U}'(\xi) - \underline{U}(\xi)(1 - \underline{U}(\xi)) + \sqrt{1 - \underline{U}(\xi)} \underline{V}(\xi) \geq \underline{V}(\xi) \geq 0.$$

证明完毕。

引理 3.5 假设 η 满足(3.3)且

$$q > \max \left\{ -\frac{(\beta + K)\gamma}{\Delta(\eta \lambda_{21}, c)}, 1 \right\},$$

则对于任意的 $\xi \neq \xi_4$, 函数 $V(\xi)$ 满足

$$cV'(\xi) \leq d_2V''(\xi) + \gamma V(\xi) \left(-\beta V(\xi) + \sqrt{1 - \bar{U}(\xi)} \right) = 0,$$

其中 $\xi_4 = \frac{1}{(\eta-1)\lambda_{21}} \ln \frac{1}{q} < 0$ 。

证明: 当 $\xi > \xi_4$ 时, $V(\xi) = 0$ 。因此, 我们可以看到

$$d_2V''(\xi) - cV'(\xi) + \gamma V(\xi) \left(-\beta V(\xi) + \sqrt{1 - \bar{U}(\xi)} \right) = 0.$$

当 $\xi < \xi_4$ 时, $V(\xi) = e^{\lambda_{21}\xi} - qe^{\eta\lambda_{21}\xi}$ 和 $\bar{U}(\xi) = Ke^{\sigma\xi}$ 。通过计算可得

$$\begin{aligned} & d_2V''(\xi) - cV'(\xi) + \gamma V(\xi) \left(-\beta V(\xi) + \sqrt{1 - \bar{U}(\xi)} \right) \\ & > d_2V''(\xi) - cV'(\xi) + \gamma V(\xi) \left(-\beta V(\xi) + 1 - \bar{U}(\xi) \right) \\ & > \left(d_2\lambda_{21}^2 e^{\lambda_{21}\xi} - c\lambda_{21} e^{\lambda_{21}\xi} + \gamma e^{\lambda_{21}\xi} \right) - \beta \gamma e^{2\lambda_{21}\xi} - K\gamma e^{(\sigma+\lambda_{21})\xi} \\ & \quad - \left(d_2q\eta^2 \lambda_{21}^2 e^{\eta\lambda_{21}\xi} - cq\eta\lambda_{21} e^{\eta\lambda_{21}\xi} + q\gamma e^{\eta\lambda_{21}\xi} \right) \\ & = \left(d_2\lambda_{21}^2 - c\lambda_{21} + \gamma \right) e^{\lambda_{21}\xi} - \beta \gamma e^{2\lambda_{21}\xi} - K\gamma e^{(\sigma+\lambda_{21})\xi} \\ & \quad - \left(d_2\eta^2 \lambda_{21}^2 - c\eta\lambda_{21} + \gamma \right) q e^{\eta\lambda_{21}\xi} \\ & = \Delta(\lambda_{21}, c) e^{\lambda_{21}\xi} - \Delta(\eta\lambda_{21}, c) q e^{\eta\lambda_{21}\xi} - \beta \gamma e^{2\lambda_{21}\xi} - K\gamma e^{(\sigma+\lambda_{21})\xi} \\ & = -\Delta(\eta\lambda_{21}, c) q e^{\eta\lambda_{21}\xi} - \beta \gamma e^{2\lambda_{21}\xi} - K\gamma e^{(\sigma+\lambda_{21})\xi} \\ & = e^{\eta\lambda_{21}\xi} \left\{ -q\Delta(\eta\lambda_{21}, c) - \beta \gamma e^{(2-\eta)\lambda_{21}\xi} - K\gamma e^{(\sigma+\lambda_{21}-\eta\lambda_{21})\xi} \right\} \\ & \geq e^{\eta\lambda_{21}\xi} \left\{ -q\Delta(\eta\lambda_{21}, c) - (\beta + K)\gamma \right\}. \end{aligned}$$

注意 $\Delta(\eta\lambda_{21}, c) < 0$ 。然后通过选择 $q > -\frac{(\beta+K)\gamma}{\Delta(\eta\lambda_{21}, c)} + 1$, 我们得到

$$d_2V''(\xi) - cV'(\xi) + \gamma V(\xi) \left(-\beta V(\xi) + \sqrt{1 - \bar{U}(\xi)} \right) \geq 0.$$

证明完毕。

3.2. 非临界波速的存在性

在本小节中, 我们将通过 Schauder 不动点定理结合上下解, 证明当波速为 $c > c^*$ 时, 系统(3.2)存在连接平衡态 $(0, 0)$ 的正解。设 μ 为一个正的常数, 其可以足够小。

对于 $\Phi(\xi) = (\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi))$, 定义

$$B_\mu(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^2) = \left\{ \Phi(\cdot) \in C(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^2) : |\Phi(\cdot)|_\mu < \infty \right\},$$

其中,

$$|\Phi|_\mu = \max \left\{ \sup_{\xi \in \mathfrak{R}} |\varphi_1(\xi)| e^{-\mu|\xi|}, \sup_{\xi \in \mathfrak{R}} |\varphi_2(\xi)| e^{-\mu|\xi|} \right\}.$$

容易验证, $B_\mu(R, R^2)$ 是带有衰减范数 $|\cdot|_\mu$ 的巴拿赫空间, 其中 $|\cdot|$ 是 \mathfrak{R}^2 中的标准上确界范数。

现在我们定义 $B_\mu(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^2)$ 的一个子集, 在该子集上我们将应用 Schauder 不动点定理

$$\Gamma = \left\{ (U, V) \in C(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^2) : \underline{U}(\xi) \leq U(\xi) \leq \bar{U}(\xi), \underline{V}(\xi) \leq V(\xi) \leq \bar{V}(\xi), \xi \in \mathfrak{R} \right\},$$

其中 (\bar{U}, \bar{V}) 为由(3.4)给出的上解, $(\underline{U}, \underline{V})$ 为由(3.5)给出的下解。注意到 (\bar{U}, \bar{V}) 和 $(\underline{U}, \underline{V}) \in \Gamma$, 则 Γ 非空。不难验证 Γ 在 $B_\mu(R, R^2)$ 中是有界、闭且凸的。

设 $\beta_1 > 0$ 和 $\beta_2 > 0$ 为两个足够大的正常数。系统(3.2)可以转化为以下形式

$$\begin{cases} d_1 U''(\xi) - cU'(\xi) - \beta_1 U(\xi) + F_1(U, V)(\xi) = 0, & \xi \in \mathfrak{R}, \\ d_2 V''(\xi) - cV'(\xi) - \beta_2 V(\xi) + F_2(U, V)(\xi) = 0, & \xi \in \mathfrak{R}, \end{cases}$$

其中,

$$F_1(U, V)(\xi) := \beta_1 U(\xi) - U(\xi)(1 - U(\xi)) + \sqrt{1 - U(\xi)} V(\xi), \quad \xi \in \mathfrak{R},$$

$$F_2(U, V)(\xi) := \beta_2 V(\xi) + \gamma V(\xi) (-\beta V(\xi) + \sqrt{1 - U(\xi)}), \quad \xi \in \mathfrak{R}.$$

记 $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ij}(c), i, j = 1, 2$ 。常数 $\Lambda_{i1} < 0 < \Lambda_{i2}$ 满足由特征方程给出的条件

$$d_i \lambda^2 - c\lambda - \beta_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

其形式为

$$\Lambda_{i1} = \frac{c - \sqrt{c^2 + 4d_i \beta_i}}{2d_i}, \quad \Lambda_{i2} = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4d_i \beta_i}}{2d_i}.$$

我们通过定义一个算子 $P = (P_1, P_2) : \Gamma \rightarrow C(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^2)$ 来表示

$$P_1(U, V)(\xi) = \frac{1}{d_1 \Lambda_1} \left[\int_{-\infty}^{\xi} e^{\Lambda_{11}(\xi-s)} + \int_{\xi}^{\infty} e^{\Lambda_{12}(\xi-s)} \right] F_1(U, V)(s) ds,$$

$$P_2(U, V)(\xi) = \frac{1}{d_2 \Lambda_2} \left[\int_{-\infty}^{\xi} e^{\Lambda_{21}(\xi-s)} + \int_{\xi}^{\infty} e^{\Lambda_{22}(\xi-s)} \right] F_2(U, V)(s) ds,$$

其中, $\Lambda_1 = \Lambda_{12} - \Lambda_{11}$, $\Lambda_2 = \Lambda_{22} - \Lambda_{21}$, $(U, V) \in \Gamma$, $\xi \in \mathfrak{R}$ 。

很容易验证 P 在 Γ 中的不动点就是系统(3.2)的非负解。我们将利用 Schauder 不动点定理来证明 P 在 Γ 中不动点的存在性。因此, 我们需要验证关于 P 应用 Schauder 不动点定理的条件。

引理 3.6 $P(\Gamma) \subset \Gamma$ 。

本引理结论易证, 此处省略。

引理 3.7 对于 $\mu > 0$ 足够小, $P = (P_1, P_2) : \Gamma \rightarrow C(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^2)$ 关于范数 $|\cdot|_\mu$ 在 $B_\mu(R, R^2)$ 中是连续的。

证明: 假设 $\Phi_i = (U_i, V_i) \in \Gamma$ 。对任意的 $\xi \in \mathfrak{R}$, 则我们有

$$0 \leq U_i(\xi) \leq 1 \text{ 和 } 0 \leq V_i(\xi) \leq 1,$$

其中 $i = 1, 2$ 。因此,

$$\begin{aligned} & \left| F_2(\Phi_1)(\xi) - F_2(\Phi_2)(\xi) \right| e^{-\mu|\xi|} \\ &= \left| \beta_2 [V_1(\xi) - V_2(\xi)] - \gamma \beta_2 [V_1^2(\xi) - V_2^2(\xi)] + \gamma \sqrt{1 - U(\xi)} [V_1(\xi) - V_2(\xi)] \right| e^{-\mu|\xi|} \\ &= \left| \beta_2 [V_1(\xi) - V_2(\xi)] - \gamma \beta_2 [V_1(\xi) - V_2(\xi)] [V_1(\xi) + V_2(\xi)] + \gamma \sqrt{1 - U(\xi)} [V_1(\xi) - V_2(\xi)] \right| e^{-\mu|\xi|} \\ &\leq \left| (\beta_2 + 2\gamma \beta_2) [V_1(\xi) - V_2(\xi)] + \gamma \sqrt{1 - U(\xi)} [V_1(\xi) - V_2(\xi)] \right| e^{-\mu|\xi|} \\ &\leq [\beta_2 + 2\gamma \beta_2 + \gamma] |\Phi_1 - \Phi_2|_\mu \\ &=: M_1 |\Phi_1 - \Phi_2|_\mu, \end{aligned}$$

其中, $M_1 = \beta_2 + 2\gamma\beta + \gamma > 0$ 。因此

$$\begin{aligned} & |P_2(\Phi_1)(\xi) - P_2(\Phi_2)(\xi)|e^{-\mu|\xi|} \\ & \leq \frac{e^{-\mu|\xi|}}{d_2\Lambda_2} \left[\int_{-\infty}^{\xi} e^{\Lambda_{21}(\xi-s)} |F_2(\Phi_1)(\xi) - F_2(\Phi_2)(\xi)| ds + \int_{\xi}^{+\infty} e^{\Lambda_{22}(\xi-s)} |F_2(\Phi_1)(\xi) - F_2(\Phi_2)(\xi)| ds \right] \\ & \leq \frac{M_1 e^{-\mu|\xi|}}{d_2\Lambda_2} \left[\int_{-\infty}^{\xi} e^{\Lambda_{21}(\xi-s)+\mu|s|} ds + \int_{\xi}^{+\infty} e^{\Lambda_{21}(\xi-s)+\mu|s|} ds \right] |\Phi_1 - \Phi_2|_{\mu}. \end{aligned}$$

设 $\mu < \min\{-\Lambda_{11}, \Lambda_{12}\}$ 。若 $\xi < 0$, 则得到

$$\begin{aligned} & |P_2(\Phi_1)(\xi) - P_2(\Phi_2)(\xi)|e^{-\mu|\xi|} \\ & \leq \frac{M_1 e^{\mu\xi}}{d_2\Lambda_2} \left[e^{\Lambda_{21}\xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-(\Lambda_{21}+\mu)s} ds + e^{\Lambda_{22}\xi} \int_{\xi}^0 e^{-(\Lambda_{22}+\mu)s} ds + e^{\Lambda_{22}\xi} \int_0^{+\infty} e^{(\mu-\Lambda_{22})s} ds \right] |\Phi_1 - \Phi_2|_{\mu} \\ & = \frac{M_1}{d_2\Lambda_2} \left[\frac{1}{-\Lambda_{21}-\mu} + \frac{1-e^{(\Lambda_{22}+\mu)\xi}}{\Lambda_{22}+\mu} + \frac{e^{(\Lambda_{22}+\mu)\xi}}{\Lambda_{22}-\mu} \right] |\Phi_1 - \Phi_2|_{\mu} \\ & \leq \frac{M_1}{d_2\Lambda_2} \left[\frac{1}{-\Lambda_{21}-\mu} + \frac{1}{\Lambda_{22}+\mu} + \frac{1}{\Lambda_{22}-\mu} \right] |\Phi_1 - \Phi_2|_{\mu}. \end{aligned}$$

若 $\xi \geq 0$, 则可得

$$\begin{aligned} & |P_2(\Phi_1)(\xi) - P_2(\Phi_2)(\xi)|e^{-\mu|\xi|} \\ & \leq \frac{M_1 e^{-\mu\xi}}{d_2\Lambda_2} \left[e^{\Lambda_{21}\xi} \int_{-\infty}^0 e^{-(\Lambda_{21}+\mu)s} ds + e^{\Lambda_{21}\xi} \int_0^{\xi} e^{(\mu-\Lambda_{21})s} ds + e^{\Lambda_{22}\xi} \int_{\xi}^{+\infty} e^{(\mu-\Lambda_{22})s} ds \right] |\Phi_1 - \Phi_2|_{\mu} \\ & = \frac{M_1}{d_2\Lambda_2} \left[\frac{e^{(\Lambda_{21}-\mu)\xi}}{-\Lambda_{21}-\mu} + \frac{1-e^{(\Lambda_{21}-\mu)\xi}}{\mu-\Lambda_{21}} + \frac{1}{\Lambda_{22}-\mu} \right] |\Phi_1 - \Phi_2|_{\mu} \\ & \leq \frac{M_1}{d_2\Lambda_2} \left[\frac{1}{-\Lambda_{21}-\mu} + \frac{1}{\mu-\Lambda_{21}} + \frac{1}{\Lambda_{22}-\mu} \right] |\Phi_1 - \Phi_2|_{\mu}. \end{aligned}$$

因此, 可得

$$|P_2(\Phi_1) - P_2(\Phi_2)|_{\mu} \leq M_2 |\Phi_1 - \Phi_2|_{\mu},$$

其中,

$$M_2 = \frac{M_1}{d_2\Lambda_1} \max \left[\frac{1}{-\Lambda_{21}-\mu} + \frac{1}{\Lambda_{22}+\mu} + \frac{1}{\Lambda_{22}-\mu}, \frac{1}{-\Lambda_{21}-\mu} + \frac{1}{\mu-\Lambda_{21}} + \frac{1}{\Lambda_{22}-\mu} \right],$$

这进一步意味着

$$\sup_{\xi \in \mathfrak{R}} |P_2(\Phi_1)(\xi) - P_2(\Phi_2)(\xi)|e^{-\mu|\xi|} \leq M_2 |\Phi_1 - \Phi_2|_{\mu}.$$

因此, $P_2: \Gamma \rightarrow C(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^2)$ 关于范数 $|\cdot|_{\mu}$ 在 $B_{\mu}(R, R^2)$ 中是连续的。同样, 可以证明 $P_1: \Gamma \rightarrow C(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^2)$ 关于范数 $|\cdot|_{\mu}$ 在 $B_{\mu}(R, R^2)$ 中也是连续的。证明完毕。

引理 3.8 在范数 $|\cdot|_{\mu}$ 下, 算子 $P = (P_1, P_2): \Gamma \rightarrow \Gamma$ 在 $B_{\mu}(R, R^2)$ 中是紧算子。

证明: 假设 $\Phi = (U, V) \in \Gamma$ 。则有

$$|F_1(\Phi)(\xi)| = \left| \beta_1 U(\xi) - U(\xi)(1 - U(\xi)) + \sqrt{1 - U(\xi)} V(\xi) \right| \leq M_3 := \beta_1 + 3.$$

因此,

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{d\xi} P_1(\Phi)(\xi) \right| &= \frac{1}{d_1 \Lambda_1} \left| \Lambda_{11} \int_{-\infty}^{\xi} e^{\Lambda_{11}(\xi-s)} F_1(\Phi)(s) ds + \Lambda_{12} \int_{\xi}^{+\infty} e^{\Lambda_{12}(\xi-s)} F_1(\Phi)(s) ds \right| \\ &\leq \frac{M_3}{d_1 \Lambda_1} \left[|\Lambda_{11}| \int_{-\infty}^{\xi} e^{\Lambda_{11}(\xi-s)} ds + \Lambda_{12} \int_{\xi}^{+\infty} e^{\Lambda_{12}(\xi-s)} ds \right] \\ &= \frac{2M_3}{d_1 \Lambda_1} = \frac{2M_3}{\sqrt{c^2 + 4d_1 \beta_1}} \leq \frac{2M_3}{\sqrt{4d_1 \beta_1}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

同样地,

$$|F_2(\Phi)(\xi)| = \left| \left[\beta_2 + \gamma(-\beta V(\xi) + \sqrt{1 - U(\xi)}) \right] V(\xi) \right| \leq M_4 := \beta_2 + \gamma\beta + 1.$$

然后,

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{d\xi} P_2(\Phi)(\xi) \right| &= \frac{1}{d_2 \Lambda_2} \left| \Lambda_{21} \int_{-\infty}^{\xi} e^{\Lambda_{21}(\xi-s)} F_2(\Phi)(s) ds + \Lambda_{22} \int_{\xi}^{+\infty} e^{\Lambda_{22}(\xi-s)} F_2(\Phi)(s) ds \right| \\ &\leq \frac{M_4}{d_2 \Lambda_2} \left[|\Lambda_{21}| \int_{-\infty}^{\xi} e^{\Lambda_{21}(\xi-s)} ds + \Lambda_{22} \int_{\xi}^{+\infty} e^{\Lambda_{22}(\xi-s)} ds \right] \\ &= \frac{2M_4}{d_2 \Lambda_2} \leq \frac{2M_4}{\sqrt{4d_2 \beta_2}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

显然, (3.6)和(3.7)意味着

$$\left| \frac{d}{d\xi} P_1(\Phi)(\xi) \right|_{\mu} \leq \frac{2M_3}{\sqrt{4d_1 \beta_1}}, \quad \left| \frac{d}{d\xi} P_2(\Phi)(\xi) \right|_{\mu} \leq \frac{2M_4}{\sqrt{4d_2 \beta_2}}.$$

因此, $\left| \frac{d}{d\xi} P_i(\Phi)(\xi) \right|_{\mu}$ 是有界的, $i=1,2$. 这表明 $P(\Gamma)$ 在范数 $|\cdot|_{\mu}$ 下是一致有界且等度连续的.

为了得到一个收敛序列, 我们考虑一个连续的截断算子. 对任意正整数 n , 定义

$$P^n(\Phi)(\xi) = \begin{cases} P(\Phi)(-n), & \xi \in [-\infty, -n], \\ P(\Phi)(\xi), & \xi \in [-n, n], \\ P(\Phi)(n), & \xi \in [n, +\infty]. \end{cases}$$

显然, $P^n : \Gamma \rightarrow B_{\mu}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^2)$ 是连续的. 此外, $P^n(\Gamma)$ 关于范数 $|\cdot|_{\mu}$ 在 $B_{\mu}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^2)$ 中是一致有界的且等度连续的. 根据 Arzela-Ascoli 定理, $P^n(\Phi(\cdot))(\xi)$ 存在收敛子列. 因此, $P^n : \Gamma \rightarrow B_{\mu}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^2)$ 是一族紧算子. 此外, 我们将证明当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $P^n \rightarrow P$ 在范数 $|\cdot|_{\mu}$ 下收敛. 由于

$$\begin{aligned} P_2(\Phi)(\xi) &= \frac{M_3}{d_2 \Lambda_2} \left[\int_{-\infty}^{\xi} e^{\Lambda_{21}(\xi-s)} ds + \int_{\xi}^{+\infty} e^{\Lambda_{22}(\xi-s)} ds \right] \\ &= \frac{M_3}{d_2 |\Lambda_{21}| \Lambda_2}, \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow +\infty$, 我们有

$$\begin{aligned}
& \left| P_2^n(\Phi) - P_2(\Phi) \right|_\mu \\
&= \sup_{\xi \in \mathfrak{R}} \left| P_2^n(\Phi)(\xi) - P_2(\Phi)(\xi) \right|_\mu e^{-\mu|\xi|} \\
&= \sup_{\xi \in (-\infty, -n] \cup [n, +\infty)} \left| P_2^n(\Phi)(\xi) - P_2(\Phi)(\xi) \right|_\mu e^{-\mu|\xi|} \\
&= \frac{2M_3}{d_2 |\Lambda_{21}| \Lambda_{22}} e^{-\mu n} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

同样地, 我们可以证明, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\left| P_1^n(\Phi) - P_1(\Phi) \right|_\mu \rightarrow 0$ 。因此, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$\left| P^n(\Phi) - P(\Phi) \right|_\mu \rightarrow 0$ 。根据文献[28]中的命题 2.12, 我们得出 $P: \Gamma \rightarrow B_\mu(R, R^2)$ 是紧的。证明完毕。

定理 2.2 的证明: 上述引理 3.6~3.8 表明, Schauder 不动点定理的条件得到满足。因此, 算子 P 在 Γ 中至少存在一个满足(3.2)的不动点。由于 $\underline{U}(\xi) < U(\xi) < \bar{U}(\xi)$ 和 $\underline{V}(\xi) < V(\xi) < \bar{V}(\xi)$, 由(3.4)和(3.5), 很容易看出 $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} (U(\xi), V(\xi)) = (0, 0)$, 即得 $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} (\varphi(\xi), \phi(\xi)) = (1, 0)$ 。现在我们验证 $\frac{1}{\beta} < \varphi(\xi) < 1$, $0 < \phi(\xi) < \frac{1}{\beta}$, 只需验证 $0 < U(\xi) < 1 - \frac{1}{\beta}$, $0 < V(\xi) < \frac{1}{\beta}$ 成立。注意到 $(U(\xi), V(\xi)) \in \Gamma$ 是算子 P 的不动点。则 $P_2(U, V)(\xi) = V(\xi)$ 且

$$\begin{aligned}
P_2(U, V)(\xi) &\geq P_2(\underline{U}, \underline{V})(\xi) \\
&\leq \frac{1}{d_2 \Lambda_2} \left[\int_{-\infty}^{\xi} e^{\Lambda_{21}(\xi-s)} F_2(\Phi)(s) ds + \int_{\xi}^{+\infty} e^{\Lambda_{22}(\xi-s)} F_2(\Phi)(s) ds \right] \\
&\leq \frac{1}{d_2 \Lambda_2} \left[\int_{-\infty}^{\xi} e^{\Lambda_{21}(\xi-s)} + \int_{\xi}^{+\infty} e^{\Lambda_{22}(\xi-s)} \right] \underline{V}(s) ds \\
&> 0, \quad \forall \xi \in \mathfrak{R}.
\end{aligned}$$

通过类似的方法, 我们可以证明其他不等式。定理 2.2 证毕。

4. 结论

本文通过构造一对适当的上下解并应用 Schauder 不动点定理, 证明了一类具有从众行为的扩散捕食者-食饵模型的超临界波速下连接边界平衡点的行波解的存在性。众所周知, 行波解可以描述捕食者入侵食饵栖息地后产生的共存现象。本文只证明了行波解在负无穷远处连接边界平衡点, 接下来我们将继续研究行波解在正无穷远处连接正平衡点。与此同时, 我们将进一步考虑临界和次临界波速行波解的存在性。

基金项目

国家自然科学基金(12261081)。

参考文献

- [1] Bazykin, A.D. (1998) *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*. World Scientific.
- [2] Murray, J.D. (1989) *Mathematical Biology*. Springer.
- [3] Ajraldi, V., Pittavino, M. and Venturino, E. (2001) Modeling Herd Behavior in Population Systems. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **12**, 2319-2338. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.02.002>
- [4] Braza, P.A. (2012) Predator-Prey Dynamics with Square Root Functional Responses. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **13**, 1837-1843. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.12.014>
- [5] Tang, X. and Song, Y. (2015) Cross-Diffusion Induced Spatiotemporal Patterns in a Predator-Prey Model with Herd

- Behavior. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **24**, 36-49. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.12.006>
- [6] Tang, X., Song, Y. and Zhang, T. (2016) Turing-Hopf Bifurcation Analysis of a Predator-Prey Model with Herd Behavior and Cross-Diffusion. *Nonlinear Dynamics*, **86**, 73-89. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-2873-3>
- [7] Xu, C., Yuan, S. and Zhang, T. (2016) Global Dynamics of a Predator-Prey Model with Defense Mechanism for Prey. *Applied Mathematics Letters*, **62**, 42-48. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2016.06.013>
- [8] Ghorai, S. and Poria, S. (2017) Emergent Impacts of Quadratic Mortality on Pattern Formation in a Predator-Prey System. *Nonlinear Dynamics*, **87**, 2715-2734. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-3222-2>
- [9] Yuan, S., Xu, C. and Zhang, T. (2013) Spatial Dynamics in a Predator-Prey Model with Herd Behavior. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **23**, Article 033102. <https://doi.org/10.1063/1.4812724>
- [10] Xu, Z. and Song, Y. (2015) Bifurcation Analysis of a Diffusive Predator-Prey System with a Herd Behavior and Quadratic Mortality. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **38**, 2994-3006. <https://doi.org/10.1002/mma.3275>
- [11] Djilali, S. and Bentout, S. (2020) Spatiotemporal Patterns in a Diffusive Predator-Prey Model with Prey Social Behavior. *Acta Applicandae Mathematicae*, **169**, 125-143. <https://doi.org/10.1007/s10440-019-00291-z>
- [12] Li, Y., Li, S. and Zhang, F. (2020) Dynamics of a Diffusive Predator-Prey Model with Herd Behavior. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, **25**, 19-35. <https://doi.org/10.15388/namc.2020.25.15723>
- [13] Pal, S., Ghorai, S. and Banerjee, M. (2018) Analysis of a Prey-Predator Model with Non-Local Interaction in the Prey Population. *Bulletin of Mathematical Biology*, **80**, 906-925. <https://doi.org/10.1007/s11538-018-0410-x>
- [14] Peng, Y. and Zhang, G. (2020) Dynamics Analysis of a Predator-Prey Model with Herd Behavior and Nonlocal Prey Competition. *Mathematics and Computers in Simulation*, **170**, 366-378. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2019.11.012>
- [15] Singh, T. and Banerjee, S. (2019) Spatiotemporal Model of a Predator-Prey System with Herd Behavior and Quadratic Mortality. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **29**, Article 1950049. <https://doi.org/10.1142/s0218127419500494>
- [16] Fang, J. and Zhao, X.Q. (2014) Traveling Waves for Monotone Semiflows with Weak Compactness. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **46**, 3678-3704. <https://doi.org/10.1137/140953939>
- [17] Liang, X. and Zhao, X.Q. (2007) Asymptotic Speeds of Spread and Traveling Waves for Monotone Semiflows with Applications. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **61**, 137-138. <https://doi.org/10.1002/cpa.20221>
- [18] Ma, S.W. (2001) Traveling Wavefronts for Delayed Reaction-Diffusion Systems via a Fixed Point Theorem. *Journal of Differential Equations*, **171**, 294-314. <https://doi.org/10.1006/jdeq.2000.3846>
- [19] Weinberger, H.F., Lewis, M.A. and Li, B. (2002) Analysis of Linear Determinacy for Spread in Cooperative Models. *Journal of Mathematical Biology*, **45**, 183-218. <https://doi.org/10.1007/s002850200145>
- [20] Wu, J. and Zou, X. (2001) Traveling Wave Fronts of Reaction-Diffusion Systems with Delay. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **13**, 651-687. <https://doi.org/10.1023/a:1016690424892>
- [21] Deng, D. and Zhang, D.P. (2019) Existence of Travelling Waves with the Critical Speed for an Influenza Model with Treatment. *European Journal of Applied Mathematics*, **31**, 232-245. <https://doi.org/10.1017/s0956792518000700>
- [22] Lin, G. (2014) Invasion Traveling Wave Solutions of a Predator-Prey System. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **96**, 47-58. <https://doi.org/10.1016/j.na.2013.10.024>
- [23] Lin, G. and Ruan, S. (2014) Traveling Wave Solutions for Delayed Reaction-Diffusion Systems and Applications to Lotka-Volterra Competition-Diffusion Models with Distributed Delays. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **26**, 583-605. <https://doi.org/10.1007/s10884-014-9355-4>
- [24] Wang, X.W., Zhang, G.B. and Hao, Y.C. (2025) Traveling Wave Solutions for a Nonlocal Dispersal Predator-Prey System with Stage Structure in the Prey Species. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **76**, Article 107. <https://doi.org/10.1007/s00033-025-02488-9>
- [25] Zhang, G.B., Li, W.T. and Lin, G. (2009) Traveling Waves in Delayed Predator-Prey Systems with Nonlocal Diffusion and Stage Structure. *Mathematical and Computer Modelling*, **49**, 1021-1029. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2008.09.007>
- [26] Zhang, T.R. and Jin, Y. (2017) Traveling Waves for a Reaction-Diffusion-Advection Predator-Prey Model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **36**, 203-232. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2017.01.011>
- [27] Zhang, T.R., Wang, W.D. and Wang, K.F. (2016) Minimal Wave Speed for a Class of Non-Cooperative Diffusion-Reaction System. *Journal of Differential Equations*, **260**, 2763-2791. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.10.017>
- [28] Zeidler, E. (1986) *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications I*. Springer.