

# 商空间诱导变换的最小多项式

刘海兵, 李鹏吉, 周芳\*, 关晋瑞

太原师范学院数学与统计学院, 山西 晋中

收稿日期: 2026年4月27日; 录用日期: 2026年5月26日; 发布日期: 2026年6月15日

## 摘要

本文给出了商空间诱导变换的定义, 推导了诱导变换的基本性质; 针对诱导变换的最小多项式, 证明其整除原线性变换最小多项式的核心定理, 并阐明其与子空间诱导变换最小多项式的最小公倍式关系; 分析了诱导变换最小多项式与若尔当标准形的内在联系; 最后给出典型应用。

## 关键词

商空间, 线性变换, 诱导变换, 最小多项式

# Minimal Polynomial of Induced Transformation on Quotient Space

Haibing Liu, Pengji Li, Fang Zhou\*, Jinrui Guan

School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: April 27, 2026; accepted: May 26, 2026; published: June 15, 2026

## Abstract

This paper presents the definition of the induced transformation of a quotient space and deduces the basic properties of induced transformations. For the minimal polynomial of the induced transformation, it proves the core theorem that it divides the minimal polynomial of the original linear transformation, clarifies its relationship with the least common multiple of the minimal polynomials of induced transformations on subspaces, analyzes the intrinsic connection between the minimal polynomial of induced transformations and the Jordan canonical form; and finally provides typical applications.

\*通讯作者。

## Keywords

### Quotient Space, Linear Transformation, Induced Transformation, Minimal Polynomial

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

商空间与诱导变换是高等代数中连接空间分解、线性变换、多项式理论、矩阵标准形的关键工具，广泛用于不变子空间判定、哈密尔顿-凯莱定理证明、若尔当标准形等核心问题。现有经典教材中对商空间与诱导变换虽有系统阐述，但对诱导变换的最小多项式及其与原变换、子空间限制变换、矩阵标准型的整体关联，仍缺乏可直接用于证明的结论。商空间的诱导变换也是线性变换，主要应用于线性代数和拓扑学两个领域。

刘用麟[1]系统研究了商空间的同构定理及其应用，建立了商空间与补空间之间的同构关系，并利用商空间同构定理给出了线性映射基本定理(第一同构定理)的新证明，同时将商空间理论应用于线性方程组解的结构分析与矩阵秩不等式的证明，为高等代数中同构思想的具体运用提供了典型范例。但其工作侧重同构定理的等价刻画与证明技巧，未深入讨论商空间同构定理在诱导变换最小多项式研究中的应用，未建立商空间同构与最小多项式整除关系、最小公倍式关系的内在联系。在商映射与拓扑性质方面，郭瑞芝[2]研究了商映射的连续性、连通性、紧致性、可数紧等拓扑不变性，将商空间方法推广到拓扑空间范畴。但其工作属于拓扑线性空间框架，不涉及数域上有限维线性空间的多项式零化、最小多项式、标准形等代数核心问题，无法直接用于高等代数的标准形存在性与分解证明。

在高等代数教材([3]，第6章、第12章)中，给出了商空间、不变子空间、诱导变换、最小多项式与若尔当标准形的基本定义，指出限制变换与诱导变换的特征多项式满足乘积关系，但未给出诱导变换最小多项式整除原变换最小多项式的严格证明，也未给出直和分解下最小公倍式定理。丘维声([4]，下册第9章)用商空间方法证明了循环分解与有理标准形，但对于诱导变换的最小多项式未单独建立定理、未给出完整证明。高等代数([5]，第7章)强调不变因子与友矩阵结构，但同样缺少商空间诱导变换最小多项式的理论。

本文证明了三个核心定理，分别从不同层面揭示了线性变换、诱导变换以及最小多项式之间的紧密联系。定理1建立了多项式作用于线性变换后在商空间上诱导变换的对应关系；定理2证明了诱导变换的最小多项式与原线性变换最小多项式之间的整除关系；定理3则明确了在不变子空间直和的情形下，商空间诱导变换的最小多项式与子空间诱导变换的最小多项式之间的关系。在此基础上，本文进一步建立诱导变换最小多项式与若尔当标准形的联系，揭示商空间约化、最小多项式与标准形构造的统一逻辑。文中的符号和术语是标准的，详见参考文献[4][6]。

## 2. 预备知识

为便于理论证明，引入以下商空间的定义。

**定义 1** 设  $V$  是数域  $P$  上的线性空间， $W$  是  $V$  的一个子空间。在  $V$  上定义二元关系  $\sim$ ： $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \in W$ ，这是一个等价关系。元素  $\alpha$  的等价类称为  $W$  的陪集  $\alpha + W$ ，即

$$\bar{\alpha} = \alpha + W = \{\alpha + \beta \mid \beta \in W\}.$$

所有陪集构成的集合称为  $V$  对子空间  $W$  的商集，记作  $\bar{V}$ ： $\bar{V} = \{\alpha + W \mid \alpha \in V\}$ 。在  $\bar{V}$  上定义加法和数

量乘法: 设  $\alpha_1 + W = \alpha + W$ ,  $\beta_1 + W = \beta + W$ , 则  $\alpha_1 - \alpha \in W$ ,  $\beta_1 - \beta \in W$ 。从而

$$(\alpha_1 + \beta_1) - (\alpha + \beta) = (\alpha_1 - \alpha) + (\beta_1 - \beta) \in W,$$

$$k\alpha_1 - k\alpha = k(\alpha_1 - \alpha) \in W.$$

因此  $(\alpha_1 + \beta_1) + W = (\alpha + \beta) + W$ ,  $k\alpha_1 + W = k\alpha + W$ 。这些运算与陪集代表的选取无关, 且满足线性空间的所有运算法则, 从而  $\bar{V}$  是数域  $P$  上的线性空间, 称为  $V$  的商空间。

**定义 2 [5]** 设  $\mathcal{A}$  是数域  $P$  上向量空间  $V$  到  $U$  中的映射, 如果  $\mathcal{A}$  适合下列条件:

1)  $\mathcal{A}(\alpha + \beta) = \mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{A}(\beta)$ ,  $\alpha, \beta \in V$ ;

2)  $\mathcal{A}(k\alpha) = k\mathcal{A}(\alpha)$ ,  $\alpha \in V$ ,  $k \in P$ ,

则称  $\mathcal{A}$  是向量空间  $V$  到  $U$  的线性映射。同一向量空间  $V$  上的线性映射称为  $V$  上的线性变换。

### 3. 主要结果

#### 3.1. 线性空间的诱导变换

以下设  $W$  是  $V$  的  $\mathcal{A}$ -不变子空间, 构造商空间  $\bar{V}$  上的变换  $\mathcal{A}(x+W) = \mathcal{A}(x) + W$ , 不难验证其为线性变换, 称为  $\mathcal{A}$  在商空间  $\bar{V}$  上的诱导变换。因为  $W$  是  $\mathcal{A}$  的不变子空间, 所以这个表达式能够唯一地确定这个变换。

定义诱导变换:  $\bar{\mathcal{A}}: \bar{\alpha} \rightarrow \overline{\mathcal{A}(\alpha)}$ , 即  $\bar{\mathcal{A}}(\alpha+W) = \mathcal{A}(\alpha) + W$ ,  $\bar{\mathcal{A}}(\bar{\alpha}) = \overline{\mathcal{A}(\alpha)}$ 。我们首先证明下述引理。

**引理 1**  $V$  是数域  $P$  上的线性空间,  $W$  是  $V$  的  $\mathcal{A}$ -不变子空间, 其中  $\mathcal{A}$  为  $V$  的线性变换, 则商空间  $\bar{V}$  上的诱导变换  $\bar{\mathcal{A}}$  是线性变换。

**证明** 1)  $\forall \alpha, \beta \in V$ ,  $\bar{\mathcal{A}}[(\alpha+W) + (\beta+W)] = \bar{\mathcal{A}}[(\alpha+\beta)+W] = \mathcal{A}(\alpha+\beta) + W = \mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{A}(\beta) + W = \bar{\mathcal{A}}(\alpha+W) + \bar{\mathcal{A}}(\beta+W)$ ;

2)  $\bar{\mathcal{A}}[k(\alpha+W)] = \bar{\mathcal{A}}[k\alpha+W] = \mathcal{A}(k\alpha) + W = k\mathcal{A}(\alpha) + W = k\bar{\mathcal{A}}(\alpha+W)$ 。证毕。

**定理 1** 设  $V$  是数域  $P$  上的线性空间,  $\mathcal{A}$  是  $V$  的任意一个线性变换,  $W$  是  $V$  的  $\mathcal{A}$ -不变子空间, 设  $f(x) \in P[x]$ , 则  $f(\bar{\mathcal{A}})$  是  $f(\mathcal{A})$  在商空间  $\bar{V}$  上的诱导变换。

**证明** 设  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \in P[x]$ , 那么就有

$$f(\mathcal{A}) = a_n \mathcal{A}^n + a_{n-1} \mathcal{A}^{n-1} + \cdots + a_0 \mathcal{E}$$

由引理 1 容易知道  $\bar{\mathcal{A}}$  是  $\bar{V}$  的线性变换, 下面证明  $f(\bar{\mathcal{A}})$  仍是  $\bar{V}$  的线性变换。

首先, 因为  $\forall \alpha, \beta \in V$ , 那么就有  $\forall \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \bar{V}$ , 由引理 1 可推导出到下面两个结论:

$$\begin{aligned} f(\bar{\mathcal{A}})(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) &= (a_n \bar{\mathcal{A}}^n + a_{n-1} \bar{\mathcal{A}}^{n-1} + \cdots + a_0 \mathcal{E})(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \\ &= a_n \bar{\mathcal{A}}^n(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) + a_{n-1} \bar{\mathcal{A}}^{n-1}(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) + \cdots + a_0 \mathcal{E}(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \\ 1) &= [a_n \bar{\mathcal{A}}^n(\bar{\alpha}) + a_{n-1} \bar{\mathcal{A}}^{n-1}(\bar{\alpha}) + \cdots + a_0 \mathcal{E}(\bar{\alpha})] \\ &\quad + [a_n \bar{\mathcal{A}}^n(\bar{\beta}) + a_{n-1} \bar{\mathcal{A}}^{n-1}(\bar{\beta}) + \cdots + a_0 \mathcal{E}(\bar{\beta})] \\ &= f(\bar{\mathcal{A}})(\bar{\alpha}) + f(\bar{\mathcal{A}})(\bar{\beta}) \end{aligned}$$

$$2) f(\bar{\mathcal{A}})(k\bar{\alpha}) = (a_n \bar{\mathcal{A}}^n + a_{n-1} \bar{\mathcal{A}}^{n-1} + \cdots + a_0 \mathcal{E})(k\bar{\alpha}) = kf(\bar{\mathcal{A}})(\bar{\alpha})$$

由上可知,  $f(\bar{\mathcal{A}})$  是  $\bar{V}$  上的线性变换。下面我们继续证明  $f(\bar{\mathcal{A}})$  是  $\bar{V}$  上的诱导变换。

我们可取  $f(\bar{\mathcal{A}})$  中的通项记为:  $a_k x^k$ , 当  $k=1$  时,  $\bar{\mathcal{A}}(\alpha+W) = \mathcal{A}(\alpha)+W$ ; 当  $k>1$  时, 假设  $\mathcal{A}^{k-1}(\alpha+W) = \mathcal{A}^{k-1}(\alpha)+W$  是成立的, 那么就有  $\bar{\mathcal{A}}[\mathcal{A}^{k-1}(\alpha+W)] = \mathcal{A}[\mathcal{A}^{k-1}(\alpha)+W] = \mathcal{A}^k(\alpha)+W$ , 归纳可得:  $\bar{\mathcal{A}}^k(\alpha+W) = \mathcal{A}^k(\alpha)+W$  因此可得知,  $f(\bar{\mathcal{A}})(\bar{\alpha}) = (a_n \bar{\mathcal{A}}^n + a_{n-1} \bar{\mathcal{A}}^{n-1} + \dots + a_0 \mathcal{E})(\bar{\alpha}) = (a_n \mathcal{A}^n + a_{n-1} \mathcal{A}^{n-1} + \dots + a_0 \mathcal{E})(\alpha) + W = f(\mathcal{A}) + W$ 。所以  $f(\bar{\mathcal{A}})$  是  $f(\mathcal{A})$  在  $\bar{V}$  上的诱导变换, 证毕。

### 3.2. 诱导变换的最小多项式

根据哈密顿 - 凯莱定理, 对于数域  $P$  上的  $n$  阶矩阵  $A$ , 总存在数域  $P$  上的一个多项式  $f(x)$ , 使得  $f(A) = O$ 。如果多项式  $f(x)$  满足  $f(A) = 0$ , 则称  $f(x)$  以  $A$  为根。在以  $A$  为根的多项式中, 次数最低的首项系数为 1 的多项式称为  $A$  的最小多项式。矩阵  $A$  的最小多项式是唯一的, 见文献[3]。

将  $\bar{V}$  的所有诱导变换构成的集合记为  $L(\bar{V})$ ,  $V$  的所有线性变换构成的集合记为  $L(V)$ 。

**定理 2** 设  $V$  是数域  $P$  上的线性空间,  $W$  是  $V$  的  $\mathcal{A}$ -不变子空间(即  $\mathcal{A}(w) \subseteq W$ )。设  $\bar{m}(x)$  为  $\bar{\mathcal{A}}$  诱导变换的最小多项式,  $m(x)$  为  $\mathcal{A} \in L(V)$  的最小多项式, 则  $\bar{m}(x) | m(x)$ 。

**证明** 由于  $m(x)$  为  $\mathcal{A}$  的最小多项式, 那么就有  $m(\mathcal{A}) = O$ , 即对于  $\forall \alpha \in V$ , 都有  $m(\mathcal{A})(\alpha) = 0$ 。下面我们需证  $m(\bar{\mathcal{A}}) = \bar{O}$ ,  $\bar{m}(x) | m(x)$ 。由上可得  $\forall \bar{\alpha} \in \bar{V}$ ,  $m(\bar{\mathcal{A}})(\bar{\alpha}) = m(\bar{\mathcal{A}})(\alpha+W)$ , 又因为  $\bar{\mathcal{A}}(\alpha+W) = \mathcal{A}(\alpha)+W$ , 那么  $\bar{\mathcal{A}}^2(\alpha+W) = \bar{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\alpha)+W) = \mathcal{A}^2(\alpha)+W$ , 以此类推, 我们可以得到  $\bar{\mathcal{A}}^k(\alpha+W) = \mathcal{A}^k(\alpha)+W$ 。现在设  $m(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ , 将  $\bar{\mathcal{A}}(\alpha+W)$  代入到  $m(x)$  中, 我们可以

$$m[\bar{\mathcal{A}}(\alpha+W)] = a_n \bar{\mathcal{A}}^n(\alpha+W) + a_{n-1} \bar{\mathcal{A}}^{n-1}(\alpha+W) + a_0 \mathcal{E}(\alpha+W)$$

得到 
$$= a_n (\mathcal{A}^n(\alpha)+W) + a_{n-1} (\mathcal{A}^{n-1}(\alpha)+W) + \dots + a_0 (\mathcal{E}(\alpha)+W)$$
, 那么就可以推出 
$$= a_n \mathcal{A}^n(\alpha) + a_{n-1} \mathcal{A}^{n-1}(\alpha) + \dots + a_0 \mathcal{E}(\alpha) + W$$
 
$$= m(\mathcal{A}) + W$$

$\bar{m}(\bar{\mathcal{A}}(\bar{\alpha})) = \bar{m}(\bar{\mathcal{A}})(\bar{\alpha}) = m(\mathcal{A})(\alpha) + W = \bar{O}$  (其中  $\bar{O}$  为商空间里的零向量)。设  $m(x) = q(x)\bar{m}(x) + r(x)$ , 接下来需要证明  $r(x) = 0$ 。将  $\bar{\mathcal{A}}$  代入  $m(x)$  中得  $m(\bar{\mathcal{A}}) = q(\bar{\mathcal{A}})\bar{m}(\bar{\mathcal{A}}) + r(\bar{\mathcal{A}})$ , 由于  $m(\bar{\mathcal{A}}) = \bar{O}$ ,  $\bar{m}(\bar{\mathcal{A}}) = \bar{O}$ , 所以可以推出  $r(\bar{\mathcal{A}}) = \bar{O}$ 。因此可得  $\bar{m}(x) | m(x)$ , 证毕。

### 3.3. 诱导变换的最小公倍式

**引理 3** 设  $V$  是数域  $P$  上的向量空间, 且  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$  是  $\mathcal{A}$ -不变子空间直和, 其中  $I$  为有限集, 设  $W$  是  $V$  的子空间, 则存在线性映射  $\mathcal{A}: V/(W \cap V_i) \rightarrow \bar{V}$ 。

**证明** 设  $U_i = W \cap V_i$ , 定义自然映射  $\mathcal{A}: V \rightarrow \bar{V}$ ,  $\mathcal{A}(V) = V+W$ 。因为  $U_i = W \cap V_i \subseteq \ker(\mathcal{A}/W)$ , 根据线性映射的诱导性质, 存在唯一的线性映射  $\bar{\mathcal{A}}_i: V_i/U_i \rightarrow \bar{V}$ ,  $\bar{\mathcal{A}}_i(V_i+U_i) = \bar{\mathcal{A}}_i(V_i) = V_i+W$ 。求和可得  $\mathcal{A}(\bigoplus_{i \in I} (U_i + V_i)) = \sum_{i \in I} \bar{\mathcal{A}}(U_i + V_i) = \sum_{i \in I} (V_i + W) = \sum_{i \in I} V_i + W$ , 由  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$  可知存在唯一分解  $V = \sum_{i \in I} V_i$ , 于是  $\mathcal{A}(\bigoplus_{i \in I} (U_i + V_i)) = V+W$ , 此处  $\bar{\mathcal{A}}_i$  为线性映射,  $\mathcal{A}$  为其直和仍保持线性, 即可得  $\mathcal{A}(\bigoplus_{i \in I} \bar{V}_i) = \bar{V}$ 。

**定理 3** 设线性空间  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$  为  $\mathcal{A}$ -不变子空间直和, 其中  $I$  为有限集,  $W$  为  $V$  的任意  $\mathcal{A}$ -不变子空间,  $\bar{V}$  (商空间)的诱导变换后最小多项式  $m(x)$  是  $V_i/(W \cap V_i)$  上的限制变换  $\bar{\mathcal{A}}_i|_{V_i/(W \cap V_i)}$  的最小多项式  $m_i(x)$  的最小公倍式。

**证明** 令  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$ ，设  $M(X) = lcm(m_1(x), m_2(x), \dots, m_n(x))$ ，根据引理 3 可知， $\bigoplus_{i \in [1, n]} V_i / (W \cap V_i) = \bar{V}$ ，所以可以得到

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}}(\bar{V}) &= \bar{\mathcal{A}}\left[\bigoplus_{i \in [1, n]} V_i / (W \cap V_i)\right], \\ M\left(\bar{\mathcal{A}}\Big|_{\bar{V}}\right) &= M\left(\bar{\mathcal{A}}\Big|_{\bigoplus_{i \in [1, n]} V_i / (W \cap V_i)}\right). \end{aligned}$$

另外可知， $M\left(\bar{\mathcal{A}}\Big|_{\bigoplus_{i \in [1, n]} V_i / (W \cap V_i)}\right) = M\left(\bar{\mathcal{A}}\Big|_{V_1 / (W \cap V_1)}\right) + M\left(\bar{\mathcal{A}}\Big|_{V_2 / (W \cap V_2)}\right) + \dots + M\left(\bar{\mathcal{A}}\Big|_{V_n / (W \cap V_n)}\right) = \bar{0}$ （零变换），所以可以得到

$$M\left(\bar{\mathcal{A}}\Big|_{\bar{V}}\right) = \bar{0}.$$

又因为  $m(x)$  是  $\bar{\mathcal{A}}\Big|_{\bar{V}}$  的最小多项式(即:  $M\left(\bar{\mathcal{A}}\Big|_{\bar{V}}\right) = \bar{0}$ )，得知:  $m(x) | M(x)$ 。而且  $\forall i \in [1, n]$ ，都有  $m_i(x) = 0 \Rightarrow m(x) = 0$ ，此处  $x \in V_i / (W \cap V_i)$ ，也就是说  $M\left(\bar{\mathcal{A}}\Big|_{V_i / (W \cap V_i)}\right) = 0$ ，故而  $m_i(x) | m(x)$ ，又由于:  $M(X) = lcm(m_1(x), m_2(x), \dots, m_n(x))$ ，所以:  $M(x) | m(x)$ ，证毕。

### 3.4. 诱导变换的最小多项式与若尔当标准形的联系

构造线性变换标准型的本质，是将空间逐次商去不变子空间以简化变换结构。诱导变换的最小多项式精确刻画每一步商约后变换的剩余复杂度，成为连接商空间理论与标准形理论的核心不变量。

#### 3.4.1. 线性变换多项式和诱导变换多项式的关系

1) 特征多项式:  $f_{\mathcal{A}}(\lambda) = f_{\mathcal{A}|_W}(\lambda) \cdot f_{\bar{\mathcal{A}}}(\lambda)$

取  $W$  的一组基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ，将其扩充为  $V$  的一组基  $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_{n+k}$ ，由线性变换  $\mathcal{A}$  在  $W$  下的限制变换，可知  $\mathcal{A}$  在该基下的矩阵可表示为上三角分块矩阵  $A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ O & A_2 \end{pmatrix}$ ，其中  $A_1$  是  $\mathcal{A}|_W$  (限制变换) 的矩阵，故  $\mathcal{A}$  在  $W$  下的限制变换的特征多项式  $f_{\mathcal{A}|_W}(\lambda) = |\lambda E - A_1|$ ；又因为  $A_2$  是  $\bar{\mathcal{A}}$  (诱导变换) 的矩阵，故  $f_{\bar{\mathcal{A}}}(\lambda) = |\lambda E - A_2|$ 。所以就得到三个对应特征多项式的关系:  $f_{\mathcal{A}}(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda E - A_1 & C \\ O & \lambda E - A_2 \end{vmatrix} = |\lambda E - A_1| \cdot |\lambda E - A_2| = f_{\mathcal{A}|_W} \cdot f_{\bar{\mathcal{A}}}(\lambda)$ 。

2) 极小多项式:  $lcm(m_{\mathcal{A}|_W}(x), m_{\bar{\mathcal{A}}}(x)) | m_{\mathcal{A}}(x)$

由前面所推得的定理 1.2 可知， $m_{\bar{\mathcal{A}}}(x) | m_{\mathcal{A}}(x)$ ，又由于变换  $\mathcal{A}$  的最小多项式  $m_{\mathcal{A}}(x) = 0$ ， $\mathcal{A}|_W$  是  $\mathcal{A}$  在  $W$  上的限制变换，自然可得此限制变换的最小多项式:  $m_{\mathcal{A}|_W}(x) = 0$ ，所以  $m_{\mathcal{A}|_W}(x) | m_{\mathcal{A}}(x)$ ，即可推导出  $lcm(m_{\mathcal{A}|_W}(x), m_{\bar{\mathcal{A}}}(x)) | m_{\mathcal{A}}(x)$ 。

上述整除性与乘积关系是若尔当标准形构造的多项式基础。

#### 3.4.2. 与若尔当标准形的联系

复数域上线性变换  $\mathcal{A}$  存在若尔当标准形的充要条件是其最小多项式可分解为一次因式幂:

$$m(x) = (x - \lambda_1)^{k_1} (x - \lambda_2)^{k_2} \dots (x - \lambda_s)^{k_s},$$

其中  $k_i$  是特征值  $\lambda_i$  对应最大若尔当块的阶数，各若尔当块的最小多项式为初等因子  $(x - \lambda_i)^{l_i}$ 。

取  $W$  为根子空间或若尔当块生成的不变子空间, 商空间诱导变换  $\bar{A}$  的最小多项式满足:

$$\bar{m}(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{\bar{k}_i}, \quad \bar{k}_i \leq k_i,$$

即诱导变换不产生新的特征值, 仅保留原特征值且不增大若尔当块阶数, 其若尔当标准形是原变换若尔当标准形的子分块矩阵。逐次商去一维不变子空间的过程, 等价于逐步分解出若尔当块, 每一步诱导变换的最小多项式均为原最小多项式的因子, 与若尔当块的初等因子结构完全匹配。

下例运用诱导变换最小多项式整除性来判断不变子空间的存在性。

**例 1** 设  $V$  是数域  $P$  上的 3 维线性空间, 线性变换  $A: V \rightarrow V$  的最小多项式  $m(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ , 证明存在  $A$ -不变子空间  $W \subseteq V$  ( $0 \subset W \subset V$ )。

**证明** 首先证明  $W$  是  $A$ -不变子空间, 再证明  $W \neq 0$  且  $W \neq V$ 。

对任意  $\xi \in W$ ,  $f(A)\xi = 0$ , 则  $f(A)(A\xi) = A[f(A)\xi] = A(0) = 0$ , 故  $A\xi \in W$ , 即  $W$  是  $A$ -不变子空间。又因为  $m(\lambda)$  零化  $A$ , 故而  $f(A)g(A) = m(A) = O$ , 则  $g(A)V \subseteq W$ , 若  $W = 0$ , 则  $g(A) = O$ , 与  $m(\lambda)$  是最低次零化多项式相矛盾, 故  $W \neq 0$ ; 若  $W = V$ , 则  $f(A) = O$ , 同样与  $m(\lambda)$  是最低次零化多项式相矛盾, 故  $W \neq V$ 。

综上, 若  $m(\lambda)$  可约, 则  $A$  有非平凡不变子空间; 反之, 若  $A$  不可约, 则  $m(\lambda)$  必不可约。结合已知推导矛盾: 已知  $A$  的最小多项式  $m(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ , 显然可分解为两个次数  $\geq 1$  的多项式乘积。若假设  $V$  无平凡不变子空间, 则  $A$  不可约, 其最小多项式需不可约, 与  $m(\lambda)$  可约矛盾, 故假设不成立。

因此, 可得  $A$  必有非平凡  $A$ -不变子空间  $W \subseteq V$  ( $0 \subset W \subset V$ )。证毕。

#### 4. 结语

在标准形理论中, 空间分解成循环子空间或根子空间的过程, 本质上是反复做“商空间约化”, 诱导变换的最小多项式刻画了商掉一个不变子空间后, 变换复杂度的剩余量。若尔当标准形和商空间诱导变化都遵循商变换的最小多项式整除原变换的最小多项式, 且与直和分解下的最小公倍式相容。

本文通过三个核心定理系统刻画商空间诱导变换的最小多项式性质, 并结合实例展示其在不变子空间判定、最小多项式计算、多项式与诱导变换对应等问题中的应用。诱导变换的最小多项式使标准形的构造与多项式整除关系自然统一, 相关结论可进一步推广至高维线性空间与更一般线性变换, 为线性代数理论研究 with 问题求解提供有效方法。

#### 基金项目

山西省基础研究计划(自由探索类)青年项目(202303021212254)。

#### 参考文献

- [1] 刘用麟. 商空间的同构定理及其应用[J]. 南平师专学报, 2006(4): 1-3+6.
- [2] 郭瑞芝. 关于商映射与商空间的性质[J]. 湖南工业大学学报, 2010, 24(1): 5-9.
- [3] 北京大学数学系前代数小组, 编. 王萼芳, 石生明, 王立中, 修订. 高等代数(第六版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2025: 227.
- [4] 丘维声. 高等代数(下册) [M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [5] 复旦大学数学科学学院, 主编. 高等代数(第三版) [M]. 上海: 复旦大学出版社, 2015.
- [6] 北京大学数学系前代数小组, 编. 王萼芳, 石生明, 修订. 高等代数(第五版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.