Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(6), 72-81
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.166158

从连分数到有理逼近的理论研究

贺　龙

太原师范学院数学与统计学院，山西　晋中

收稿日期：2026年5月5日；录用日期：2026年6月10日；发布日期：2026年6月29日

摘　要

连分数理论作为数学分析中的重要工具，在数的表示、逼近理论及数值计算中发挥着独特作用。本文以连分数理论为基础，结合数值逼近中的有理逼近方法，系统梳理了从经典连分数理论到现代有理逼近的发展脉络。文章首先回顾连分数的基本性质及其在实数表示中的作用，继而探讨渐近分数作为最佳有理逼近的核心理论，最后引入Padé逼近等现代有理逼近方法，揭示连分数思想在分析逼近中的深刻影响。研究表明，连分数不仅提供了最佳有理逼近的理论基础，其构造思想和收敛性分析也为现代数值逼近方法的发展提供了重要启示。

关键词

连分数，有理逼近，最佳逼近，Padé逼近，收敛性分析

From Continued Fractions to Rational Approximation: A Theoretical Study

Long He

School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: May 5, 2026; accepted: June 10, 2026; published: June 29, 2026

Abstract

As an important tool in mathematical analysis, continued fraction theory plays a unique role in number representation, approximation theory, and numerical computation. This thesis, based on continued fraction theory and combined with rational approximation methods in numerical approximation, systematically reviews the development from classical continued fraction theory to modern rational approximation. The article first reviews the basic properties of continued fractions and their role in real number representation, then discusses the core theory of convergents as best rational approximations, and finally introduces modern rational approximation methods such as

文章引用：贺龙. 从连分数到有理逼近的理论研究[J]. 理论数学, 2026, 16(6): 72-81.
DOI: 10.12677/pm.2026.166158

Padé approximation, revealing the profound influence of continued fraction ideas in analytic approximation. Research shows that continued fractions not only provide the theoretical foundation for best rational approximation, but their constructive ideas and convergence analysis also offer important insights for the development of modern numerical approximation methods.

Keywords

Continued Fractions, Rational Approximation, Best Approximation, Padé Approximation, Convergence Analysis

1. 引言

在数值分析与逼近理论中，如何用简单函数有效地逼近复杂函数一直是一个核心问题。多项式逼近虽然因其线性和光滑性而被广泛使用，但在处理具有极点、无界区域或振荡剧烈的函数时往往表现不佳。有理函数作为多项式的比值，能够更灵活地捕捉函数的奇异性和渐近行为，因而在逼近论中占据重要地位。

连分数作为一种特殊的数的表示形式，其历史可追溯至欧几里得算法和丢番图逼近的早期研究。辛钦 A.Я [1]在其经典著作《连分数》中系统阐述了这一理论的数学基础，指出连分数“是数学分析、概率论、力学、特别是数论中的重要工具之一”。连分数的独特价值在于：它不仅提供了用有理数逼近实数的系统方法，而且其渐近分数序列在某种意义下给出了“最佳”有理逼近。近二十年来，连分数的度量理论和遍历性质也得到了系统的发展[2] [3]。

本文旨在构建从经典连分数理论到现代有理逼近方法的逻辑桥梁。我们首先回顾连分数的基本性质及其在实数表示中的作用，然后深入探讨渐近分数作为最佳逼近的核心理论，最后介绍 Padé 逼近等现代方法，展示连分数思想在分析逼近中的持久影响。

2. 连分数的基本理论

2.1. 连分数的定义与表示

最简连分数具有如下形式：

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots}}$$

其中元素 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 在最一般情形下为独立变量。为方便表示，通常记作 $[a_0;a_1,a_2,\cdots]$。当元素个数有限时称为有限连分数，此时它表示一个有理数；当元素个数无限且 $a_0;a_1,a_2,\cdots$ 为正整数时，连分数收敛于某个实数。我们有如下定理[1]：

定理 1 每一个实数 a 都对应着唯一的以这个数为值的连分数。如果数 a 是有理数，则这个连分数是有限的；如果这它是无理数，则连分数是无限的。

该定理表明连分数表示实数的一个核心结果是：每一个实数都对应着唯一的连分数展开式。对于有理数，展开式是有限地，通常记为 $[a_0;a_1,a_2,\cdots,a_n]$；对于无理数，展开式是无限的，记为 $[a_0;a_1,a_2,\cdots]$。

这一性质使得连分数成为表示实数的有力工具。

例 1 将有理数 $\frac{43}{30}$ 展开为连分数。

解：反复使用带余除法

$$\frac{43}{30}=1+\frac{13}{30}=1+\frac{1}{\frac{30}{13}},$$

$$\frac{30}{13}=2+\frac{4}{13}=2+\frac{1}{\frac{13}{4}},$$

$$\frac{13}{4}=3+\frac{1}{4},$$

因此，

$$\frac{43}{30}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}=[1;2,3,4],$$

这是一个有限连分数表示有理数的例子。无理数的连分数展开是无限的，无规律的，但二次无理数(有理系数二次方程的实根)的连分数展开必定是循环的，这是拉格朗日发现的深刻结果。

定义 1 无限简单连分数 $\alpha=[a_0;a_1,a_2,\cdots]$，其中 $a_0\in Z,a_1,a_2\in N^+$，若存在整数 $s\geq 0,t\geq 1$，使得对所有 $k\geq 0,1\leq i\leq t$，都有 $a_{s+i}=a_{s+i+kt}$，则称 α 为循环连分数。记为

$$\alpha=\left[a_0;a_1,a_2,\cdots,a_s,\overline{a_{s+1},\cdots,a_{s+t}}\right]$$

我们有定理：

定理 2 任何循环连分数表示二次无理数；反之，任何二次无理数可用循环连分数来表示。

例 2 求黄金比例的连分数。

解：数 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 满足方程 $\alpha^2-\alpha-1=0$，即 $\alpha=1+\frac{1}{\alpha}$。

反复代入自身得

$$\alpha=1+\frac{1}{\alpha}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\alpha}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}},$$

因此 $\alpha=[1;1,1,\cdots]=\left[\overline{1}\right]$。

这是最简单的无限循环连分数。这一性质不仅揭示了二次无理数的算术特性，也为超越数的构造提供了判据——如果一个数允许有理分数以超代数阶逼近，则它必为超越数。

2.2. 渐近分数及其计算

在数学分析中我们知道任何无理数可以由有理数列去逼近，而有理数可以写成分数的形式，我们如何去找一个有理数列去逼近实数呢？从用简单分数逼近复杂数的实际需求中慢慢诞生了“渐近分数”这个概念，它完全依附于连分数的发展[4]。

定义 2 对于连分数$\left[a_0;a_1,a_2,\cdots\right]$，其第$k$个节$s_k=\left[a_0;a_1,a_2,\cdots,s_k\right]$的标准表示式$\frac{p_k}{q_k}$称为$k$阶渐近分数。渐近分数的分子和分母满足递推关系：

$$p_k=a_kp_{k-1}+p_{k-2},\quad q_k=a_kq_{k-1}+q_{k-2}\ (k\ge 2)$$

这一简洁的递推公式是连分数理论的核心，它使得渐近分数的计算极为高效，也可说明连分数的收敛性。

渐近分数具有以下重要性质：

1) 最佳逼近性：所有渐近分数都是既约的，且相邻渐近分数满足

$$q_kp_{k-1}-p_kq_{k-1}=(-1)^k$$

这一恒等式保证了渐近分数序列的收敛性。

2) 逼近误差界：对于无限连分数表示的数α，有$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{q_kq_{k+1}}$，以及下界估计

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|>\frac{1}{q_k\left(q_k+q_{k+1}\right)}.$$

3) 分母增长性：分母序列满足$q_k\ge 2^{(k-1)/2}$，其增长速度不慢于几何级数。

这些性质为连分数在逼近论中的应用奠定了坚实基础。

3. 最佳有理逼近理论

根据上述渐进分数的定义以及重要的性质，我们可以得到由渐进分数去逼近无理数的一些理论。许多研究者[5]都给出了不同的逼近理论，如 Milinkovic [6]系统讨论了连分数、中间分数与第一类和第二类最佳逼近之间的关系。

3.1. 最佳逼近的定义与分类

给定无理数α，我们希望用分母尽可能小的有理数$\frac{p}{q}$，以给定的精度逼近α. 根据度量逼近质量的不同标准，可以定义两种类型的最佳逼近[7]。

第一类最佳逼近：若对任意满足$0<d\le b$且$\frac{c}{d}\ne\frac{a}{b}$的有理数，均有$\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|<\left|\alpha-\frac{c}{d}\right|$，则称$\frac{a}{b}$为$\alpha$的第一类最佳逼近。

第二类最佳逼近：若对任意满足$0<d\le b$且$\frac{c}{d}\ne\frac{a}{b}$的有理数，均有$\left|b\alpha-a\right|<\left|d\alpha-c\right|$，则称$\frac{a}{b}$为$\alpha$的第二类最佳逼近。

3.2. 渐近分数作为最佳逼近

对于任意一个无理数，我们都可以把它展开成无限简单连分数，并用其渐近分数去逼近这个无理数。随着渐近分数的阶数越高，逼近的精度就越高。连分数理论中具有核心地位的定理揭示了渐近分数与最佳逼近之间的深刻联系[8]。

定理 3 (最佳逼近特征)任何第一类最佳逼近必为渐近分数或中间分数；

定理 4 任何第二类最佳逼近必为渐近分数；几乎所有的渐近分数都是第二类最佳逼近。

上述定理说明渐近分数是寻找最佳有理逼近最自然、最有效的工具。连分数产生的渐近分数，其分

母完全由被逼近数所确定，因此能更精准地反映数的逼近特性。

3.3. 逼近阶的估计

对于用渐近分数逼近实数的精度，有以下重要结果：

1) 对于任意无理数 α，三个连续渐近分数中至少有一个满足 $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}q^2}$

常数 $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 是最优的，例如对于黄金比例数 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，对任意 $c<\frac{1}{\sqrt{5}}$，不等式 $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{c}{q^2}$ 只有有限多个解。

2) 从度量论角度看，几乎所有实数都允许以任意高于 $\frac{1}{q^2}$ 阶的速度逼近；元素为有界的数(如二次无理数)则仅允许以不超过 $\frac{1}{q^2}$ 阶的速度逼近。

这些结果精确描绘了不同类型无理数的逼近特性，为理解数的算术复杂性提供了有效工具。渐进分数逼近无理数的理论把实数有理逼近问题完全划归为连分数渐进分数的研究，给出了最优逼近、误差阶、逼近唯一性的完整判定。基于连分数逼近数的相关理论和性质，我们可以很好理解有理函数逼近任意函数的相关理论。

在数值逼近理论中，Lagrange 插值与 Newton 插值为典型的整数阶多项式逼近，通过在离散插值节点上强制函数值相等实现对连续函数的拟合。受次数离散取整限制，高次插值易产生 Runge 震荡现象，在区间边界产生剧烈震荡，全局逼近效果不佳，且对含有奇点、极点的函数拟合能力较弱。

第三节的讨论揭示了连分数在实数有理逼近中的核心地位，渐近分数以最优方式逼近无理数，其误差阶与分母增长规律均由连分数元素唯一确定。这一思想不仅限于数的逼近，更可自然推广至函数逼近领域。实数域上，连分数本质是用有理分数对无理数做最佳有理逼近，只用整数分子、整数分母，对单点数值做逼近，解决的是数的逼近问题，是一维、离散、针对常数的有理逼近。类似地，我们可以考虑把连分数的思想函数化，通过两个整数多项式的商来逼近所给的连续函数，已达到更好的逼近效果。同样根据连分数展开生成有理函数序列，以渐进方式逼近目标函数。从数到函数的跨越，关键在于将算术中的带余除法替换为函数系数的辗转相除，从而构造出函数的有理逼近——Padé 逼近。

4. Padé逼近与连分数的联系

4.1. Padé逼近的基本思想

在现代数值逼近理论中，Padé 逼近[9]是有理逼近的重要方法。

Padé 逼近由法国数学家 Henri Padé 在其 1892 年的博士论文中系统建立，用有理函数给出远比泰勒级数宽泛的逼近域。在现代发展中，Padé 逼近已成为数值分析的核心工具，在矩阵指数的计算、控制工程、信号处理等领域发挥巨大作用。近年来，Padé 逼近相关算法也有重要发展，如 Hermite-Padé 逼近算法[10]，最小二乘 Padé 逼近算法[11]等。

有理逼近仍属于简单函数，虽然较多项式要复杂，但用它来近似表示函数时更加灵活、有效、可以在极点附近取得很好的逼近效果。Padé 逼近就是一种关于函数值的特殊类型的有理分式逼近法，它的思想是以尽量快的速度与泰勒级数展开式相匹配。本节考察 Padé 逼近的存在唯一性，误差阶。这里不妨设 $x_0=0$。Padé 逼近也可以按下述方式表述。

设 $f(x)$ 在原点附近用幂级数所定义：

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}c_jx^j$$

有理函数 $R_{m,n}(x)=\dfrac{p_m(x)}{q_n(x)}$，其中 $p_m(x),q_n(x)$ 分别为次数不高于 m,n 次的多项式且是不可约的。

定义 3 令 $x_0,y_0,\cdots,y_{m+n}$ 是给定的常数，Padé 插值问题是寻找有理函数 $R(x)\in R_{m,n}(x)$ 使

$$R^{(k)}(x_0)=y_k,k=0,1,\cdots,m+n$$

如果选择 $y_k=f^k(x_0)$，称满足上式的有理函数 $R(x)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的 $[m/n]$ 次的 Padé **逼近**。$[m/n]$ 次的 Padé 逼近式中，多项式 $p_m(x)$ 和 $q_n(x)$ 系数通过下述方程可以确定。

$$f(x)-R_{m,n}(x)=o\left(x^{m+n+1}\right)$$

即

$$f(x)-p_m(x)/q_n(x)=o\left(x^{n+m+1}\right)$$

因此需要满足

$$\sum_{j=0}^{m+n}c_jx^j+o\left(x^{m+n+1}\right)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n}$$

即有理函数与幂级数展开的前 $m+n+1$ 项匹配。根据上述定义和分析，下面我们给出有理逼近定理的充要条件和它的计算方法[8]。为在 $R_{m,n}(x)$ 中寻找满足上式的有理函数，而不是多项式，首先将商的求导问题转化为乘积的求导问题。

定理 5 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有直到 $m+n$ 阶导数，令 $g(x)=f(x)q_n(x)-p_m(x)$，$R_{m,n}(x)=\dfrac{p_m(x)}{q_n(x)}$，并且假设 $q_n(0)\neq 0$，那么 $R_{m,n}^{(k)}(0)=f^{(k)}(0)$ 的充要条件是 $g^{(k)}(0)=0,k=0,1,\cdots,m+n$

证明 令 $h(x)=\dfrac{1}{q_n(x)}$，于是由定理假设，有 $f(x)-R_{m,n}(x)=g(x)h(x)$，应用 Leibnitz 关于乘积上的求导公式从上式得到

$$f^{(k)}(0)-R_{m,n}^{(k)}(0)=\sum_{j=0}^{k}C_k^jg^{(j)}(0)h^{(k-j)}(0), \tag{1}$$

若 $g^{(j)}(0)=0,j=0,1,\cdots,m+n$，那么(1)式蕴含着 $f^{(k)}(0)=R_{m,n}^{(k)}(0)$；反之，如果 $R_{m,n}^{(k)}(0)=f^{(k)}(0),k=0,1,\cdots,m+n$ 成立，那么(1)左端为 0。在(1)式中令 $k=0$ 得到等式 $0=g(0)h(0)$，但由定理假设 $h(0)=\dfrac{1}{q_n(0)}\neq 0$，于是 $g(0)=0$。

完全类似，在(1)式中令 $k=1$ 有 $0=g(0)h'(0)+g'(0)h(0)$，由于有 $g(0)=0$，$h(0)\neq 0$。继续这样的讨论，就可以证明 $g^{(k)}(0)=0,k=0,1,\cdots,m+n$。证毕。

下面讨论 Padé 逼近的计算方法，记 $p_m(x)=\sum_{j=0}^{m}a_jx^j$，$q_n(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$，并且假设 $p_m(x)$ 和 $q_n(x)$ 无公因子，此外为了使 $\dfrac{p_m(0)}{q_n(0)}$ 有定义，必须有 $q_n(0)\neq 0$。由于 $b_0=q_n(0)$，在下面讨论中假设 $b_0=1$。

定理 6 令 $p_m(x)=\sum_{j=0}^{m}a_jx^j$，$q_n(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$，$b_0=1$，$R_{m,n}(x)=\dfrac{p_m(x)}{q_n(x)}$，并约定 $c_j=\dfrac{y_j}{j!}$，当 $j>m$ 时

$a_j=0$，当 $j>n$ 时 $b_j=0$. 那么 Padé 逼近插值问题等价于下列方程组的求解。

$$a_k-\sum_{j=0}^{k-1}c_jb_{k-j}=c_k, k=0,1,\cdots,m+n. \tag{2}$$

证明 记 $f(x)=\sum_{j=0}^{m+n}c_jx^j=\sum_{j=0}^{m+n}y_j\frac{x^j}{j!}$，从定理 5 知 Pade 插值问题等价于下列关系式：

$$(fq_n-p_m)^{(k)}(0)=0, k=0,1,\cdots,m+n,$$

现在，由于 $p_m^{(k)}(0)=k!a_k$，并应用 Leibnitz 公式

$$(fq_n)^{(k)}(0)=k!\sum_{j=0}^{k}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}\frac{q_n^{(k-j)}(0)}{(k-j)!}=k!\sum_{j=0}^{k}c_jb_{k-j},$$

故有 $0=(fq_n-p_m)^{(k)}(0)=k!\sum_{j=0}^{k}c_jb_{k-j}=k!a_k$。若约定记号 $j<0$ 时 $c_j=0$，那么可写成下列 Toeplitz 矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & -c_0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & -c_0 & -c_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{m-n} & \cdots & -c_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_{m-n+1} & \cdots & -c_m \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_{m-n+2} & \cdots & -c_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_m & \cdots & -c_{m+n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \\ c_{m+1} \\ c_{m+2} \\ \vdots \\ c_{m+n} \end{bmatrix}$$

定理 7 记矩阵 $H=\begin{bmatrix} c_{m-n+1} & \cdots & c_{m-1} & c_m \\ c_{m-n+2} & \cdots & c_m & c_{m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_m & \cdots & c_{m+n-2} & c_{m+n-1} \end{bmatrix}$，若 H 非奇异，则插值的解存在且唯一。

由泰勒系数 c_k 建立 Padé 方程组的关键是将逼近条件转化为关于分母系数 b_j 的线性方程组，然后回代得到分子系数 a_j。定理 6 提供的方程 (2) 形式简洁，直接来源于导数的 Leibnitz 公式，易于编程实现和理论分析。实际计算时，通常将 $k=m+1,\cdots,m+n$ 的方程写成 Toeplitz 矩阵，通过求解线性系统得到 b_j，再代入 $k=0,\cdots,m$ 的方程得到 a_j。

例 3 给定函数 $f(x)=\ln(1+x)$，取 $x_0=0, y_k=f^{(k)}(0), k=0,1,\cdots,5$，构造泰勒多项式 $P_5(x)$ 和 $[3/2]$ 次的 Padé 逼近，并分别近似计算 ln(2)。

解 $\ln(1+x)$ 的泰勒级数为

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\cdots, |x|<1.$$

令 $c_k=\frac{y_k}{k!}$，取前 5 项 $c_0=0, c_1=1, c_2=-\frac{1}{2}, c_3=\frac{1}{3}, c_4=-\frac{1}{4}, c_5=\frac{1}{5}$。构造对应的泰勒多项式为

$$P_5(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5},$$

此时 $\ln 2 \approx P_5(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 0.78333$，对应误差为

$$\ln 2 - P_5(1) \approx 0.69315 - 0.78333 = -0.09018.$$

设满足条件的 Padé 逼近函数为 $\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{1 + b_1 x + b_2 x^2}$，由(2)式知 $a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$ 满足下列方程组：

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right)\left(1 + b_1 x + b_2 x^2\right) - \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right) = o\left(x^6\right),$$

即有

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 - b_1 = -\frac{1}{2} \\ a_3 - b_2 + \frac{1}{2} b_1 = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} b_2 - \frac{1}{3} b_1 = -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} b_2 + \frac{1}{4} b_1 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

得到系数解 $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = \frac{7}{10}, a_3 = \frac{1}{30}; b_1 = \frac{6}{5}, b_2 = \frac{3}{10}$。代入化简得到 Pade 逼近函数为

$$R_{3,2}(x) = \frac{30x + 21x^2 + x^3}{30 + 36x + 9x^2},$$

此时 $\ln 2 \approx R_{3,2}(1) = 0.69333$，对应误差为 $\ln 2 - R_{3,2}(1) \approx -0.0018$，此时同样的数据点，有理插值更精确。

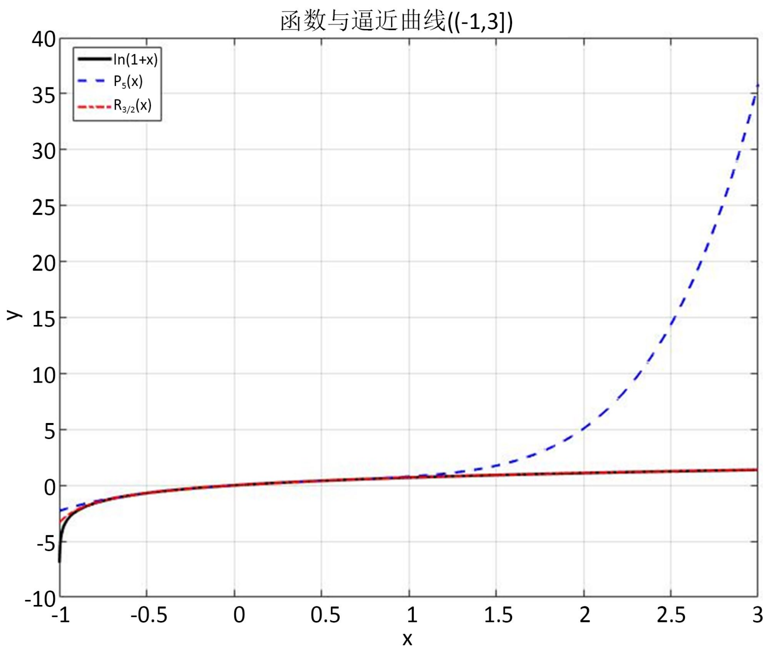

Figure 1. Comparison of Taylor approximation and Padé approximation
图 1. 泰勒逼近与帕德逼近的比较

例 3 算的是单点处的逼近误差，只能比较某一固定点上泰勒多项式与帕德逼近的精度，无法反映函数在整个区间上的逼近效果。我们在区间 $\left[-1,3\right]$ 上绘制函数 $f\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)$、$P_5\left(x\right)$ 和 $R_{3,2}\left(x\right)$ 的图像(如图 1)，从整体角度对比二者的逼近效果：可以看出，泰勒多项式仅在展开点附近精度较高，偏离后误差快速发散、波动剧烈；而 Padé 逼近为有理分式形式，在整个区间内整体误差更小、稳定性更强，在整个区间上几乎与真值重合，全局逼近效果显著优于同阶泰勒多项式。因此考察区间整体误差，更能体现 Padé 逼近的优势。

Padé 逼近函数 $R_{3,2}\left(x\right)$ 的分母 $30+36x+9x^2$ 的两个实根为数值约为-2.449 和-1.551，均不在数 $f\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)$ 的定义域内，因此在有效逼近区间内 Padé 逼近无奇异点，曲线连续光滑，极点不影响实轴上的逼近效果。这一性质展示了有理逼近的一个重要优势：即使分母多项式存在复极点，只要这些极点被排除在逼近区间之外，就保证了在目标区间内全局逼近的稳定性，这也是帕德逼近在更大范围优于泰勒多项式的重要原因。

4.2. Padé逼近与连分数的内在联系

Padé 逼近与连分数之间存在着深刻的联系[12]。在前面我们的例题中，求一个数的连分式，我们用带余除法，它本质上就是辗转相除法。求一个函数的有理逼近，简单情形下，不必解方程组，直接做多项式辗转相除，逐层截断就得到连分式形式的有理逼近，而且它就是某个阶的帕德逼近。对同一个函数，连分式展开和帕德逼近常常给出相同的有理函数。

许多函数的连分数展开式恰好就是其 Padé 逼近表的对角线或次对角线元素。例如，指数函数 e^x 的连分数展开

$$\mathrm{e}^x=1+\cfrac{x}{1-\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{3-\cfrac{x}{4+\cfrac{x}{5-\cdots}}}}}$$

其渐近分数恰好对应于 Padé 逼近序列。这种联系说明：连分数是生成 Padé 逼近的自然框架，其递推结构与 Padé 表的结构完全吻合。

从数值计算角度看，Padé 逼近通过匹配幂级数系数构造有理逼近，而连分数则通过递推关系自然地产生最佳有理逼近序列。两者殊途同归，都体现了有理函数在逼近复杂函数时的优越性[3]。

4.3. 连分数逼近与多项式逼近的比较

4.3.1. 有理逼近的优势

与多项式逼近相比，基于连分数的有理逼近具有以下优势：

1、处理极点：当被逼近函数存在极点时，多项式逼近往往需要极高次数才能获得满意精度，而有理逼近可以自然地捕捉函数的奇异性。

2、收敛区域：许多函数的幂级数收敛半径有限，但连分数展开可能在全平面(除极点外)收敛，从而提供更大范围的有效逼近。

3、经济性：相同次数下，有理函数通常比多项式具有更强的表达能力，可以用更少的参数达到同等的逼近精度。

然而，有理逼近也面临计算的复杂性——有理函数的求值涉及除法运算，其算术运算远比多项式复杂。这也限制了连分数作为日常计算工具的广泛应用。

4.3.2. 在数值分析中的回响

连分数的思想深刻影响了现代数值分析的发展，其精髓在于将复杂无理数或有理函数层层分解为简单整数的递归结构，从而为逼近论、加速收敛及高精度算法提供了天然框架。具体的应用有：

1、有理谱方法：在求解微分方程时，有理谱方法利用有理函数作为基函数，在处理具有边界层或奇性解的问题时表现出色[13]。

2、Padé 型方法：在时间推进格式、模型降阶、信号处理等领域，Padé 逼近被广泛应用于构造高效的数值算法[14]。

3、连分数插值：Thiele 型连分数插值可以直接从离散数据构造有理插值函数，避免了高次多项式插值的 Runge 现象。

5. 结论

从经典连分数理论到现代有理逼近方法，我们见证了数学思想的延续与创新。连分数不仅为无理数的表示和逼近提供了优美而深刻的理论框架，其构造方法和收敛性分析也为后世的有理逼近方法奠定了思想基础。

在数值分析日益依赖于计算机的今天，有理逼近因其在复杂函数逼近中的独特优势而焕发新的生命力，而连分数作为有理逼近的源头活水，其理论价值历久弥新。从连分数到分析逼近的发展历程告诉我们，数学中最深刻的思想往往产生于对简单问题的深入思考。

参考文献

[1] 辛钦 A.Я. 连分数[M]. 刘诗俊, 刘绍越, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 1965: 3-91.

[2] Sebe, G.I. and Lascu, D. (2025) Metrical and Ergodic Theory of Continued Fraction Algorithms. Springer, 51-83.

[3] Kim, D.H., Lee, S.B. and Liao, L. (2022) Odd-Odd Continued Fraction Algorithm. *Monatshefte für Mathematik*, **198**, 323-344. https://doi.org/10.1007/s00605-022-01704-2

[4] Khinchin, A.Y. (1964) Continued Fractions. University of Chicago Press, 3-85.

[5] Zhuravlev, V.G. (2020) The Best Approximation of Algebraic Numbers by Multidimensional Continued Fractions. *Journal of Mathematical Sciences*, **249**, 32-53. https://doi.org/10.1007/s10958-020-04918-7

[6] Milinkovic, L., Malešević, B.J. and Banjac, B. (2020) Continued Fractions, Intermediate Fractions and Their Relation to the Best Approximations. *Journal of Science and Arts*, **20**, 545-560. https://doi.org/10.46939/j.sci.arts-20.3-a05

[7] 王仁宏. 数值逼近[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012: 215-230.

[8] 蒋尔雄, 赵风光, 苏仰锋. 数值逼近[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2008: 3-20.

[9] 杨畅, 史晓冉. 数值逼近[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 219-229.

[10] Rosenkilde, J. and Storjohann, A. (2021) Algorithms for Simultaneous Hermite-Padé Approximations. *Journal of Symbolic Computation*, **102**, 279-303. https://doi.org/10.1016/j.jsc.2019.07.026

[11] Bonizzoni, F., Nobile, F., Perugia, I. and Pradovera, D. (2020) Fast Least-Squares Padé Approximation of Problems with Normal Operators and Meromorphic Structure. *Mathematics of Computation*, **89**, 1229-1257. https://doi.org/10.1090/mcom/3511

[12] Baker, G.A. and Graves-Morris, P. (1996) Padé Approximants. 2nd Edition, Cambridge University Press, 1-10. https://doi.org/10.1017/cbo9780511530074

[13] Olver, S. and Townsend, A. (2017) A Fast and Well-Conditioned Spectral Method. *Journal of Computational Physics*, **332**, 290-315.

[14] Gonnet, P., Güttel, S. and Trefethen, L.N. (2013) Robust Padé Approximation via SVD. *SIAM Review*, **55**, 101-117. https://doi.org/10.1137/110853236