

# 人链图的意大利支配问题

陈岚茜<sup>1</sup>, 李 鹏<sup>2</sup>

<sup>1</sup>重庆理工大学数学科学学院, 重庆

<sup>2</sup>汉江师范学院数学与统计学院, 湖北 十堰

收稿日期: 2026年5月6日; 录用日期: 2026年6月9日; 发布日期: 2026年6月30日

## 摘 要

意大利支配问题是罗马支配问题的一种变形, 要求每个未赋值顶点至少邻接两个赋值为1的顶点或至少邻接一个赋值为2的顶点。人链图是一类具有规则结构的特定图类。本文在Meiyanathan等人工作的基础上, 研究人链图的意大利支配问题。通过图的结构分解和分类讨论, 给出了人链图意大利支配数的表达式, 丰富了该类图在意大利支配问题上的研究。

## 关键词

意大利支配, 人链图, 意大利支配数

# Italian Domination in Human Chain Graphs

Lanxi Chen<sup>1</sup>, Peng Li<sup>2</sup>

<sup>1</sup>School of Mathematical Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing

<sup>2</sup>School of Mathematics and Statistics, Hanjiang Normal University, Shiyan Hubei

Received: May 6, 2026; accepted: June 9, 2026; published: June 30, 2026

## Abstract

Italian domination is a generalization of Roman domination, requiring that every unassigned vertex is adjacent to at least two vertices assigned 1 or at least one vertex assigned 2. A human chain graph is a special class of cactus graphs. Based on the work of Meiyanathan *et al.*, this paper studies the Italian domination problem on human chain graphs. By structural decomposition and case analysis, the exact expression of the Italian domination number for human chain graphs is obtained, which enriches the theoretical results on Italian domination for cactus graphs.

## Keywords

Italian Domination, Human Chain Graph, Italian Domination Number



## 1. 引言

2004 年, Cockayne 等人[1]给出了图的罗马支配函数的定义, 对于任意图  $G=(V, E)$ , 存在函数  $f:V \rightarrow \{0,1,2\}$ , 如果对任意顶点  $v \in V(G)$ , 当  $f(v)=0$  时, 其开邻域中至少存在一个权值为 2 的顶点  $u$ , 即  $f(u)=2$ , 则称  $f$  为图  $G$  的罗马支配函数。图中所有顶点权值和称为罗马支配函数的权值, 记为  $w(f)=\sum_{v \in V} f(v)$ 。权重的最小值称为图  $G$  的罗马支配数, 记为  $\gamma_r(G)$ 。

意大利支配问题是罗马支配问题的变体, 也称为罗马  $\{2\}$ -支配。

2016 年, Chellali 等人[2]定义了意大利支配函数。图  $G=(V, E)$  的函数  $f:V(G) \rightarrow \{0,1,2\}$ , 满足对任意  $f(v)=0$  的顶点  $v \in V$ , 均有  $\sum_{u \in N(v)} f(u) \geq 2$ , 则称  $f$  为  $G$  的一个意大利支配函数。该函数的权值定义为  $f(V)=\sum_{u \in V} f(u)$ 。所有意大利支配函数中的最小权值称为图  $G$  的意大利支配数, 记为  $\gamma_i(G)$ , 达到该最小权值的函数称为图  $G$  的  $\gamma_i$ -函数, 缩写为 IDF。

并给出了意大利支配数与经典支配数之间的基本不等式链。

2017 年 Henning 等人[3]将罗马  $\{2\}$ -支配命名为意大利支配, 并刻画了图  $T$  是  $n \geq 2, \gamma_i(T) \geq \gamma(T)+1$  且满足  $\gamma_i(T)=\gamma(T)+1$  和  $\gamma_i(T)=2\gamma(T)$  的树图。同年 Maryam 和 Nader [4]给出了意大利支配数与双罗马支配数  $\gamma_{dR}(G)$  之间的上下界。此后, 研究者们围绕意大利支配问题展开了深入研究, 相关文献可参见文献[5]-[8]。

2018 年, Anitha 等人[9]定义了人链图。设  $G=HC_{n,m}(p, q)$  是一个简单、有限且无向的人链图, 其中  $n \in N, m \geq 3$ , 顶点数  $p=2mn+n+1$ , 边数  $q=2mn+2n$ 。当  $n=1$  时,  $HC_{1,m}(p, q)$  为人链图, 即链中仅有一个个体。如图 1。

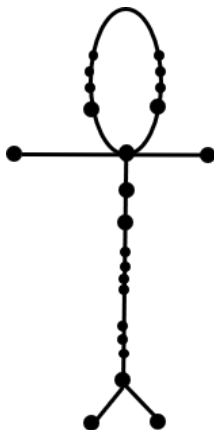


Figure 1. Schematic diagram of human chain graph  $HC_{1,m}$  when  $n=1$

图 1. 当  $n=1$  时, 人链图  $HC_{1,m}$  的示意图

2021 年 Meiyathan 等人[10]给出了人链图的支配数、边支配数和罗马支配数。

受 Meiyathan 等人[10]工作的启发, 本文进一步研究人链图的意大利支配问题, 给出其意大利支配数的表达式。

## 2. 预备知识

本文中所涉及的图均为无向的简单图。设  $G=(V,E)$  是一个顶点集为  $V(G)$ 、边集为  $E(G)$  的无向简单图, 其顶点数和边数分别用  $n(G)$  和  $m(G)$  表示。顶点  $v \in V(G)$  的开邻域是集合  $N(v)=\{u:uv \in E\}$ , 闭邻域是集合  $N[v]=N(v) \cup \{v\}$ 。用  $d_G(v)$  或者  $d(v)$  表示  $G$  中顶点  $v$  的度。设  $\delta(G)$  和  $\Delta=\Delta(G)$  分别表示  $G$  中顶点的最小度和最大度。图  $G$  中两个顶点  $v$  和  $u$  之间的距离, 记作  $d_G(u,v)$ , 是  $G$  中的一条  $(u,v)$ -路径的最小长度。 $G$  的直径  $diam(G)$  是  $G$  中顶点对之间的最大距离。图  $G$  中的一条直径路径, 是指长度等于图的直径的最短路径。如果移除点  $v$  之后, 图  $G$  连通分支数量增加, 则称点  $v$  为  $G$  的一个割点。对于一个实数  $x$ , 用  $\lceil x \rceil$  表示不小于  $x$  的最小整数, 用  $\lfloor x \rfloor$  表示不大于  $x$  的最大整数, 则有  $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$ 。用  $P_n$  表示  $n$  阶的路径, 用  $C_n$  表示  $n$  阶的环, 用  $S_n$  表示  $n$  阶的星图。

## 3. 几类特殊图的意大利支配问题

### 3.1. 路径图的意大利支配问题

**命题 3.1** [2] 图  $G$  为满足  $\Delta(G) \leq 2$  的图, 其  $\gamma_1(G) = \gamma_2(G)$ 。

**命题 3.2** [2] 对任意  $n$  阶路  $P_n$ , 其意大利支配数为  $\gamma_1(P_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ 。

**命题 3.3** [2] 对任意  $m$  阶的环  $C_m$ , 其意大利支配数为  $\gamma_1(G) = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ 。

**推论 3.1** 图  $G$  是一个  $n$  阶的路径, 有  $\gamma_1(P_n) = \gamma_2(P_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ 。

**证明:** 由命题 3.2 可知, 其意大利支配数为  $\gamma_1(P_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ 。由于路中顶点的最大度为 2, 即满足  $\Delta(G) \leq 2$ 。再根据命题 3.1 可知  $\gamma_1(P_n) = \gamma_2(P_n)$ 。因此, 有  $\gamma_1(P_n) = \gamma_2(P_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ 。□

路径是一类简单的连通图, 其最小意大利支配函数具有特殊的结构。特别地, 当路径足够长时, 有以下推论。

**引理 3.1** 图  $P_n$  是一个  $n$  阶的路径图, 且  $n \geq 4$ 。则其  $P_n$  的任意一个最小意大利支配函数  $f=(V_0, V_1, V_2)$ , 都满足  $V_2 = \emptyset$ 。

**证明:** 假设存在最小意大利支配函数  $f$  使得  $V_2 \neq \emptyset$ , 则存在  $v \in V_2$ , 即  $f(v) = 2$ 。由于  $P_n$  中顶点的最大度为 2, 则  $\deg(v) \leq 2$ 。考虑  $v$  的度数, 分两种情况讨论。

情形 1:  $\deg(v) = 1$ , 即  $v$  是路径的一个端点。此时  $v$  只有一个邻点  $u$ 。由于  $f(v) = 2$ , 其邻点  $u$  即使赋值为 0, 也满足意大利支配条件。构造新函数  $f'$  如下: 令  $f'(v) = 1$ ,  $f'(u) = f(u) + 1$ 。注意  $f(u)$  不可能为 2, 否则总权重更大。若  $f(u) = 0$ , 则  $f'(u) = 1$ ; 若  $f(u) = 1$ , 则  $f'(u) = 2$ 。此时, 若  $f(u) = 0$  且  $u$  除  $v$  外还有另一个邻点  $w$ 。这是因为  $n \geq 4$  且  $v$  是端点,  $u$  至少有一个其他邻点。则  $u$  的意大利支配条件在  $f'$  下可由  $f'(v) = 1$  和  $f'(w) = f(w)$  共同满足。计算权值变化:  $\Delta w = (1-2) + \delta$ , 其中  $\delta$  是  $u$  权值的增加量,  $\delta \leq 1$ 。故  $\Delta w \leq 0$ 。若  $\Delta w = 0$ , 则  $f'$  也是最小意大利支配函数, 但  $v$  的权值将为 1, 重复此过程可消除该端点处的权值 2; 若  $\Delta w < 0$ , 则与  $f$  的最小性矛盾。

对于  $v$  的每个邻点  $u \in N(v)$ , 若  $f(u) = 0$  且在原函数  $f$  中,  $u$  除了  $v$  之外只有一个赋值为正的邻点, 即  $u$  依赖  $v$  的赋值来满足其意大利支配条件, 则由于  $n \geq 4$  且  $P_n$  的结构, 可以在  $u$  的邻域  $N(u)$  中选择另外一个顶点  $w(w \neq v)$ , 并令  $f'(w) = 1$  以确保  $u$  在  $f'$  下的意大利支配条件成立。 $P_n$  的连通性及长度保证这样的顶点存在; 对于其他所有顶点  $x \notin \{v\} \cup N(v)$ , 令  $f'(x) = f(x)$ 。

情形 2:  $\deg(v) = 2$ , 即  $v$  有两个邻点  $u_1, u_2$ 。由于  $f(v) = 2$ ,  $u_1, u_2$  可以取 0。构造新函数  $g'$ : 令  $g'(v) = 1$ 。为了保持  $u_1, u_2$  的意大利支配条件, 对每个  $i \in \{1, 2\}$ , 若  $f(u_i) = 0$  且另一个除  $v$  外邻点为  $w_i$ , 这是因为  $n \geq 4$ , 路径内部顶点的度均为 2, 端点已有情形 1 处理, 因此  $w_i$  存在。则考虑  $w_i$  的赋值情况: 若  $f(w_i) = 0$ , 则  $f'(w_i) = 1$ ; 若  $f(w_i) = 1$ , 则保持不变, 此时  $u_i$  的邻域中有  $f(v) = 1$  和  $f(w_i) = 1$ , 总和为 2, 满足条件; 若  $f(w_i) = 2$ , 则更优, 无需调整。

每个  $u_i$  至多需要增加 1 权值。设需要调整的邻点个数为  $k$ , 其中  $k = 0, 1, 2$ , 则权值变化为  $\Delta w = (1-2) + k = k - 1$ 。若  $k \leq 1$ , 则  $\Delta w \leq 0$ ; 若  $k = 2$ , 则  $\Delta w = 1$ , 此时新函数权值增加 1。对于  $k = 2$  的情形, 作另一种调整: 直接令  $f'(v) = 0$ , 并令  $f'(u_1) = f'(u_2) = 1$ , 同时保持  $w_1, w_2$  的赋值不变。此时权值变化为  $(0-2) + (1+1) = 0$ , 得到等权值的新函数, 其中  $v$  的权值为 0, 而  $u_1, u_2$  的权值为 1。然后对新函数重复上述操作, 可消除所有权值为 2 的顶点。

综上所述, 对于任意最小意大利支配函数, 总可以调整到另一个最小意大利函数满足  $V_2 = \emptyset$ 。因此原命题成立。 □

注意: 在路径图  $P_n, n \geq 2$  的任意最小意大利支配函数中, 两个赋值为 0 的顶点不能相邻; 且两个叶子顶点必须赋值为 1。

再来讨论当  $n = 3, n = 2$  时, 由于顶点数量少, 可以用枚举法来说明这两种情况。如图 2。



Figure 2. A labeling scheme for Italian domination in  $P_3$

图 2.  $P_3$  的意大利支配问题的赋值方案

同理当  $n = 2$  时, 也可以这样互换。

由此可见, 为了下文方便描述, 我们把赋值情况, 统一为  $V_2 = \emptyset$ 。

### 3.2. 星图的意大利支配问题

命题 3.4 [2] 对图  $G$ , 都有  $\gamma(G) \leq \gamma_r(G) \leq \gamma_l(G) \leq \gamma_{r2}(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$ 。

在不等式  $\gamma_l(G) \leq 2\gamma(G)$  中, 当等式成立时, 图具有特殊性质。若  $\gamma_R(G) = 2\gamma(G)$ , 则称图为罗马图 [2]。类似地, 若  $\gamma_l(G) = 2\gamma(G)$ , 则称图为意大利图 [2]。例如, 星图和双星图。

命题 3.5 [2] 图  $G$  是一个  $n$  阶图, 且包含一个  $n-1$  度的顶点, 则有  $\gamma(G) = 1$  和  $\gamma_R(G) = 2$ 。

命题 3.6 [2] 图  $G$  是一个  $n$  阶图, 且包含一个  $n-1$  度的顶点, 则有  $\gamma(G) = 1$  和  $\gamma_l(G) = 2$ 。

证明: 由于图  $G$  是星图, 则  $\gamma_l(G) = 2\gamma(G)$ 。故  $\gamma(G) = 1, \gamma_l(G) = 2$ 。 □

### 3.3. Y-tree 图的意大利支配问题

就路径图意大利支配性质, 进一步分析一种由路径衍生出来的树结构。

定义 3.1 [9] Y-tree 是从一条路径  $P_n$  出发, 将一条边连接到与该路径  $P_n$  的某一个端点相邻的顶点上得到的图, 记为  $Y_{n+1}$ 。如图 3。

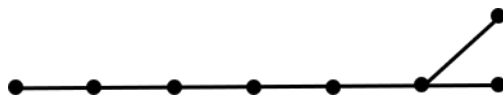


Figure 3. Schematic diagram of  $Y_8$

图 3.  $Y_8$  的示意图

就对路径的解析, 可以分析一种由路径衍生出的树结构——Y-tree。下面定理给出了其意大利支配数。

**定理 3.1** 设  $Y_{n+1}$  是由路径  $P_n: y_1 y_2 \cdots y_n$  构造得到的图, 其中  $n \geq 3$ , 则其意大利支配数为

$$\gamma_I(Y_{n+1}) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1.$$

**证明:** 构造一个意大利支配函数  $f: V(Y_{n+1}) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ , 令  $f(y_n) = f(y_{n+1}) = 0$ ,  $f(y_{n-1}) = 2$ 。对于路径  $P_{n-2} = y_1 y_2 \cdots y_{n-2}$ , 因为路径的赋值情况是 1 和 0 交替赋值, 且从 1 开始。所以, 此时函数  $f$  是意大利支配函数, 且总权值为  $w(f) = 2 + \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ 。故有上界  $\gamma_I(Y_{n+1}) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ 。

下面证明下界。

设  $g$  是  $Y_{n+1}$  的任意一个意大利支配函数。需要证明  $w(g) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ , 考虑中心顶点  $y_{n-1}$  的赋值情况, 可以分为三种情况讨论。

情况 1  $g(y_{n-1}) = 0$ 。由于  $g(y_{n-1}) = 0$ , 为了满足其意大利支配条件, 其邻域  $N(y_{n-1}) = \{y_{n-2}, y_n, y_{n+1}\}$  中至少有两个顶点满足  $g(\bullet) \geq 1$ ,  $\bullet \in \{y_n, y_{n+1}\}$ 。所以有  $g(y_{n-1}) + g(y_n) + g(y_{n+1}) \geq 2$ 。

关于子路径  $P' = y_1 y_2 \cdots y_{n-2}$ , 它是一个  $n-2$  阶的路径  $P_{n-2}$ 。在函数  $g$  上, 其必须满足  $\sum_{v \in P'} g(v) \geq \gamma_I(P_{n-2}) = \left\lceil \frac{(n-2)+1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ 。但是  $g(y_{n-2})$  计算了两次,  $g(y_n)$  和  $g(y_{n+1})$  个计算了一次。因此, 总权值  $w(g) \geq 2 + \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ 。

故对于所有整数  $n \geq 3$ , 有  $2 + \left\lceil \frac{(n-1)}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ 。从而在这种情况下,  $w(g) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ 。

情况 2  $g(y_{n-1}) = 1$ 。此时, 顶点  $y_{n-1}$  被自身支配, 其两个叶子邻点  $y_n$  和  $y_{n+1}$ 。若  $g(y_n) = 0$ , 其唯一邻点  $y_{n-1}$  且  $g(y_{n-1}) = 1$ , 不满足意大利支配条件, 因此必有  $g(y_n) \geq 1$ 。同理, 必有  $g(y_{n+1}) \geq 1$ 。

对于路径  $y_1 y_2 y_3 \cdots y_{n-1}$ , 其中已知  $g(y_{n-1}) = 1$ 。把这个路径看成一个整体, 其意大利支配数至少为  $\gamma_I(P_{n-1}) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ 。但是  $g(y_{n-1}) = 1$  已被算了一次。因此, 对于这部分顶点, 有  $g(y_{n+1}) + \sum_{v \in \{y_1, y_2, \dots, y_{n-2}\}} g(v) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ 。

综上可以得到,

$$w(g) = g(y_n) + g(y_{n+1}) + \left( g(y_{n-1}) + \sum_{v \in \{y_1, y_2, \dots, y_{n-2}\}} g(v) \right) \geq 1 + 1 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2.$$

故知满足  $w(g) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ 。

情况 3  $g(y_{n-1}) = 2$ 。由于  $y_{n-1}$  的赋值为 2, 叶子顶点  $y_n$  和  $y_{n+1}$  可以赋值为 0, 依然满足意大利支配条件。子路径  $P' = y_1 y_2 \cdots y_{n-2}$ , 其意大利支配数下界为  $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ 。

因此,  $w(g) \geq 2 + \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ 。故有  $w(g) \geq 2 + \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ 。

综合上面三种情况, 对任意意大利支配函数  $g$ , 都有  $w(g) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ 。故有,  $\gamma_I(Y_{n+1}) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ 。结合上界构造, 得到  $\gamma_I(Y_{n+1}) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ 。

证毕。 □

在完成路径与 Y-tree 图的研究后, 回到人链图本身, 运用上述结果推导其意大利支配数的表达式。

### 4. 人链图的意大利支配问题

#### 4.1. 人链图的定义与顶点标记

**定义 4.1 [8]** 图  $G$  是通过一条路径  $u_1, u_2, \dots, u_{2n+1}$ ,  $n \in N$  将长度为  $m$  的环  $C_m$  和 Y-tree ( $Y_{m+1}, m \geq 3$ ) 连接到顶点  $u_{2i}$ , 其中  $1 \leq i \leq n$  而得到的图, 记为  $HC_{n,m}$ 。  $C_m$  和 Y-tree 的顶点分别为  $v_1, v_2, \dots, v_{(m-1)}$  和  $w_1, w_2, \dots, w_m$ 。

为了方便后续表述, 人链图  $HC_{n,m}$  的顶点标记如图 4 所示。

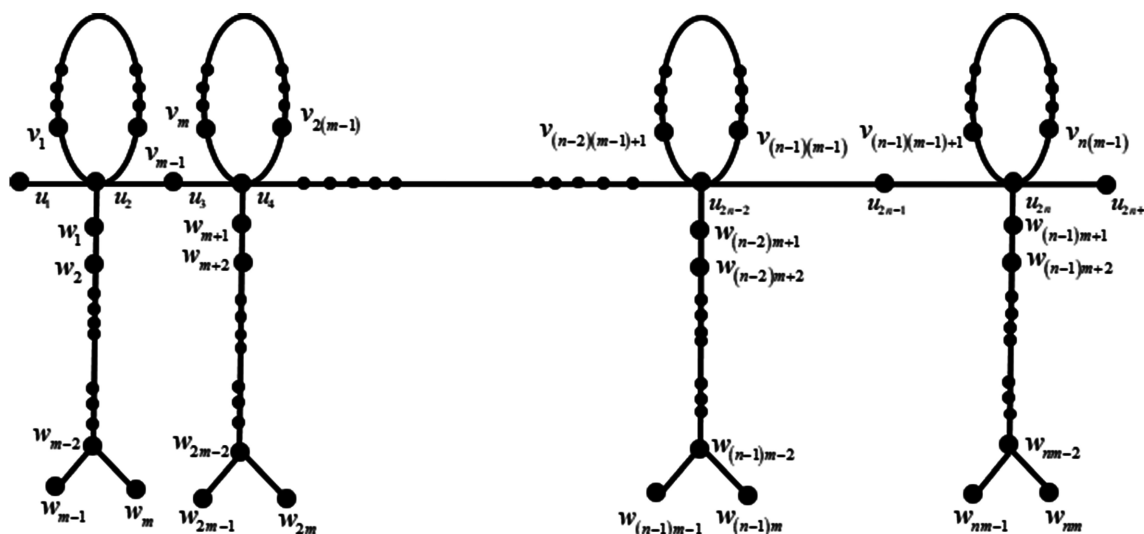


Figure 4. Human chain graph  $HC_{n,m}$  with vertex labels

图 4. 人链图  $HC_{n,m}$  的顶点标记图

所以,  $HC_{n,m}$  的顶点集为

$$V(HC_{n,m}) = \{u_1, u_2, \dots, u_{2n+1}, v_1, v_2, \dots, v_{(m-1)}, w_1, w_2, \dots, w_m\}.$$

可以把  $V(HC_{n,m})$  划分为三个集合  $A$ 、 $B$  和  $C$ , 其中  $A$  为路径的顶点集,  $B$  为环的顶点集,  $C$  为 Y-tree 的顶点集。设  $S_A$ 、 $S_B$  和  $S_C$  分别是  $A$ 、 $B$  和  $C$  的意大利支配集,  $\gamma_I(A)$ 、 $\gamma_I(B)$  和  $\gamma_I(C)$  分别为  $A$ 、 $B$  和  $C$  的意大利支配数。

#### 4.2. 主要结果

**定理 4.1** 对于  $n \geq 1$  和  $m \geq 3$ , 人链图  $HC_{n,m}$  的意大利支配数为

$$\gamma_I(HC_{n,m}) = \begin{cases} 4n, & m = 3 \\ 6n, & m = 5 \\ 2 + 2n \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil, & m = 4 \text{ 或 } m \geq 6 \end{cases}$$

**证明:** 在该图中,  $HC_{n,m}$  中最大度顶点为  $u_{2i}$ , 其中  $1 \leq i \leq n$ 。由上述对顶点的划分来看, 可以看成由三种图构成, 路径, 环图, Y-tree 图。顶点即为

$$\begin{aligned}
 A &= \{u_1, u_2, \dots, u_{2n+1} \mid 1 \leq i \leq n\}; \\
 B &= \{v_1, v_2, \dots, v_{n(m-1)} \mid 1 \leq i \leq n(m-1)\}, B = \bigcup_{i=1}^n B_i \\
 C &= \{w_1, w_2, \dots, w_{2n+1} \mid 1 \leq i \leq n\}, C = \bigcup_{i=1}^n C_i.
 \end{aligned}$$

对于路径, 环图, Y-tree 的意大利支配数和赋值情况已经做了讨论。所以可以构造其意大利支配函数。

将人链图  $HC_{n,m}$  的主体路径  $P_{2n+1}: u_1, u_2, \dots, u_{2n+1}$  上的顶点  $u_{2i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 称为共享顶点, 记作  $x_i = u_{2i}$ 。每个  $x_i$  同时属于一个  $m$ -环和一个以其为附着点的  $Y_{m+1}$  树, 它们的顶点集分别记为  $B_i \cup \{x_i\} \cong C_m$  和  $C_i$ 。

情况 1 当  $m=3$  时。将  $HC_{n,3}$  的顶点划分为  $n$  个互不相交的部分  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , 其中  $X_i$  包含顶点  $\{u_{2i-1}, u_{2i}, u_{2i+1}\}$  且连接在  $u_{2i}$  上的三角形顶点  $\{v_{2i-1}, v_{2i}\}$  和第  $i$  个  $Y_3$  顶点  $\{w_{3i-2}, w_{3i-1}, w_{3i}\}$ 。接下来, 我们来构造一个意大利支配函数  $f$ 。

对于路径集合  $A = \{u_1, u_2, \dots, u_{2n+1}\}$ , 令  $f(u_1) = f(u_{2n+1}) = 0$ ,  $f(u_{2i}) = 2$ , 其中  $1 \leq i \leq n$ 。其余顶点赋值为 0。对于环集合  $B_i \cong C_3$ , 不含  $x_i$ , 每个  $1 \leq i \leq 2n$ ,  $f(v_i) = 0$ 。对于 Y-tree 集合  $C_i \cong Y_3$ , 每个  $1 \leq i \leq n$ ,  $f(w_{3i-2}) = 2$ 。其余顶点赋值为 0。可以知道  $f$  是一个意大利支配函数。其总权重为,

$$w(f) = \sum_{i=1}^n f(u_{2i}) + \sum_{i=1}^n f(w_{3i-1}) = 2n + 2n = 4n$$

由意大利支配的定义知,  $\gamma_l(HC_{n,3}) \leq w(f) = 4n$ 。

设  $g$  是图  $G$  的任意一个意大利支配函数。下面证明对每个  $i$ , 均有  $w(g|_{X_i}) \geq 4$ 。

情况 1.1 当  $g(x_i) = 0$  时。由于  $x_i$  赋值为 0, 为满足意大利支配条件, 其所有邻点的权值和至少为 2。对于环部分, 子图  $B_i \cup \{x_i\} \cong C_3$ 。又命题 3.3 知,  $\gamma_l(C_3) = \lceil \frac{3}{2} \rceil = 2$ 。因  $g(x_i) = 0$ , 此权值 2 必须完全由环上另外两个顶点贡献, 故  $w(g|_{B_i}) \geq 2$ ; 对于 Y-tree 部分, 子图  $C_i \cong Y_3$ 。由定理 3.1,  $\gamma_l(Y_3) = 2$ 。为支配此树至少需要权值 2。由于  $g(x_i) = 0$ , 此权值必须完全由树内部顶点贡献, 故  $w(g|_{C_i}) \geq 2$ 。因此,  $w(g|_{X_i}) \geq g(x_i) + w(g|_{B_i}) + w(g|_{C_i}) \geq 0 + 2 + 2 = 4$ 。

情况 1.2 当  $g(x_i) = 1$  时。环部分, 子图  $B_i \cup \{x_i\} \cong C_3$  的总权重至少为 2。由于  $g(x_i) = 1$ , 故环上另外两顶点至少需要贡献权值 1, 即  $w(g|_{B_i}) \geq 1$ ; 对于 Y-tree 部分, Y-tree 的根点  $w$  与  $x_i$  相邻。若  $g(w) = 0$ , 则其邻点权值和为 1, 不满足意大利支配条件, 故必有  $g(w) \geq 1$ 。进而, 为支配整个  $Y_3$ , 至少需要权重 2, 即  $w(g|_{C_i}) \geq 2$ 。因此,  $w(g|_{X_i}) = 1 + w(g|_{B_i}) + w(g|_{C_i}) \geq 1 + 1 + 2 = 4$ 。

情况 1.3 当  $g(x_i) = 2$  时。对于环部分, 由于  $g(x_i) = 2$ , 环  $C_3$  上其余顶点全赋值为 0, 即  $w(g|_{B_i}) \geq 0$ 。但整个环子图满足支配条件, 总权重至少为 2, 已由  $x_i$  支配; 对于 Y-tree,  $x_i$  的赋值 2 可支配其邻点  $w$ , 故  $w$  可赋值为 0。但为支配  $Y_3$  的两个叶子顶点, 仍需至少权重 2, 故  $w(g|_{C_i}) \geq 2$ 。

因此,  $w(g|_{X_i}) = 2 + w(g|_{B_i}) + w(g|_{C_i}) \geq 2 + 0 + 2 = 4$ 。

综合以上三种情形, 对任意  $i$ , 有  $w(g|_{X_i}) \geq 4$ 。故图的总权重  $w(g) = \sum_{i=1}^n w(g|_{X_i}) \geq 4n$ , 即  $\gamma_l(HC_{n,3}) \geq 4$ 。

综上所述,  $\gamma_l(HC_{n,3}) = 4n$ 。

图 5 给出了  $\gamma_I(HC_{2,3})$  的意大利支配集的例子。

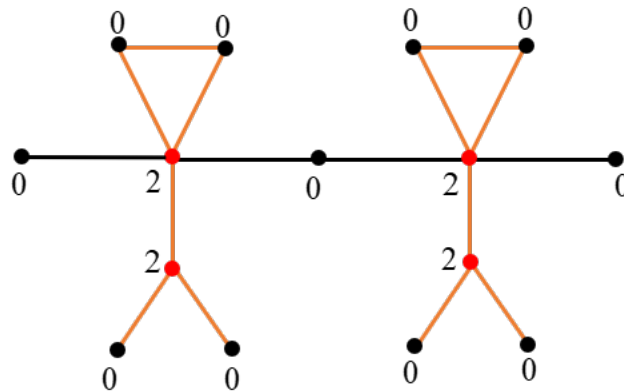


Figure 5. A labeling scheme for the Italian domination on  $HC_{2,3}$

图 5. 图  $HC_{2,3}$  的意大利支配问题的赋值方案

情况 2 当  $m = 5$  时。类似于  $m = 3$  的情况, 将图划分为  $n$  个部分, 每个部分包含一个  $u_{2i}$  及其关联的  $C_5$  和  $Y_6$ 。

现在来构造一个意大利支配函数  $f$ 。对于路径集合  $A$ , 令  $f(u_1) = f(u_{2n+1}) = 0$ ,  $f(u_{2i}) = 2$ , 其中  $1 < i < n$ , 其余顶点赋值均为 0。 $|V_2 \cap A| = 2n$ 。对于每个环  $B_i \cong C_5$ , 每个  $1 \leq i \leq n$ ,  $f(v_{2i-1}) = 1$ ,  $f(v_{2i}) = 0$ 。由于每个环  $C_5$  中有三个顶点的权值为 1, 且含有割点  $u_{2i}$ , 故  $|V_1 \cap B| = 3n$ 。对于 Y-tree 集合  $C_i \cong Y_6$ , 依据定理 3.1 可以令每个  $1 \leq i \leq n$ ,  $f(w_{3i-2}) = 2$ 。其余顶点赋值均为 0。因此,  $|V_2 \cap C| = 3n$ 。通过优化分配, 可使  $n$  个单位的总权重为  $6n$ 。

因此函数  $f$  满足意大利支配函数的条件, 且  $w(f) = 2n + 3n - n + 3n - n = 6n$ 。根据意大利支配函数的定义知,  $\gamma_I(HC_{n,5}) \leq 6n$ 。

设  $g$  是  $HC_{n,5}$  的任意一个意大利支配函数。证明对每个  $i$ , 有  $w(g|_{x_i}) \geq 6$ 。对  $g(x_i)$  的赋值分三种情形讨论:

情况 2.1: 当  $g(x_i) = 0$  时。对于环部分, 子图  $B_i \cup \{x_i\} \cong C_5$  至少需要权重 3。因  $g(x_i) = 0$ , 此 3 必须完全由环上另外 4 个顶点贡献, 故  $w(g|_{B_i}) \geq 3$ ; 对于 Y-tree 部分, 子图  $C_i \cong Y_6$  至少需要权重 4。因  $g(x_i) = 0$ , 且它已经被  $C_5$  中的两个邻点支配了, 则除顶点  $x_i$  外的权重必须完全由树内部顶点贡献, 故剩余 5 个顶点的总权重为  $w(g|_{Y_5}) \geq 4 - 1 = 3$ 。因此,  $w(g|_{x_i}) \geq 0 + 3 + 3 = 6$ 。优化可以得到  $w(g|_{x_i}) \geq 6$ 。

情况 2.2: 当  $g(x_i) = 1$  时。环部分, 环子图总权重至少为 3。因  $g(x_i) = 1$ , 故环上另外 4 个顶点至少需贡献权重 2, 即  $w(g|_{B_i}) \geq 2$ ; 在环中已经保证顶点  $x_i$  满足意大利支配定义了, 对于 Y-tree 部分, 它的根顶点  $w$ 。若  $g(w) = 0$ , 则其邻点权重和为 1, 不满足支配条件, 故必有  $g(w) \geq 1$ 。为支配除顶点  $x_i$  以外的 5 个顶点, 则至少需要总权重 3, 即  $w(g|_{C_i}) \geq 3 + 1 = 4$ 。

因此,  $w(g|_{x_i}) = 1 + w(g|_{B_i}) + w(g|_{C_i}) \geq 1 + 2 + 4 = 7 > 6$ , 在 Y-tree 中, 共享顶点  $x_i$  重复计算了, 因此, 优化可以得到  $w(g|_{x_i}) \geq 6$ 。

情况 2.3: 当  $g(x_i) = 2$  时。对于环部分, 环子图总权重至少为 3。因  $g(x_i) = 2$ , 环上其余顶点至少需贡献权重 1, 即  $w(g|_{B_i}) \geq 1$ ; 对于 Y-tree 部分,  $x_i$  的赋值 2 可支配其邻点  $w$ , 故  $w$  可赋值为 0。但为

支配  $Y_6$  其余顶点, 树内部仍需要至少权重 3, 由于根已被外部支配, 内部仍需满足  $\gamma_I(Y_6) - 1 = 3$  的权重需要, 即  $w(g|_{x_i}) = 2 + w(g|_{B_i}) + w(g|_{C_i}) \geq 2 + 1 + 3 = 6$ 。

结合以上三种情况, 对任意  $i$ , 总有  $w(g|_{x_i}) \geq 6$ 。故其权重  $w(g) = \sum_{i=1}^n w(g|_{x_i}) \geq 6n$ , 即  $\gamma_I(HC_{n,5}) \geq 6n$ 。

综上,  $\gamma_I(HC_{n,5}) = 6n$ 。

图 6 给出了  $\gamma_I(HC_{3,5})$  的意大利支配集的例子。

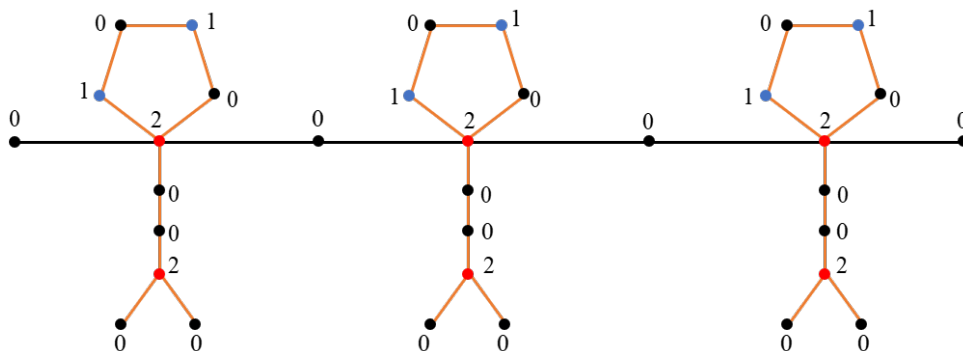


Figure 6. A labeling scheme for the Italian domination on  $HC_{3,5}$

图 6. 图  $HC_{3,5}$  的意大利支配问题的赋值方案

情况 3 当  $m = 4$  或  $m \geq 6$  时。首先由引理 3.1, 构造一个意大利支配函数  $f: V \rightarrow \{0, 1\}$ 。

在路径  $P_{2n+1}$  中, 对于  $1 \leq i \leq n$ , 令  $f(u_{2i}) = 1$  且两端的叶子顶点必须为 1, 则得到集合  $S_A = \{u_1, u_2, u_4, \dots, u_{2n-2}, u_{2n}, u_{2n+1} | n \in \mathbb{N}\}$ , 且  $f(u_1) = f(u_{2n+1}) = f(u_{2i}) = 1$ , 其中  $1 \leq i \leq n$ 。其余顶点  $f(u_{2j+1}) = 0$ , 其中  $1 \leq j \leq n-1$ 。

$$\text{因此, } \gamma_I(S_A) = |V_0| + |V_1| + 2|V_2| = |V_1| = 2 + \left\lceil \frac{2n+1-2+1}{2} \right\rceil = 2+n。$$

在环图  $C_m$  中, 采用命题 3.3 中的最小意大利支配模式, 即交替选取  $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$  个顶点赋值为 1, 且不影响环内部的赋值情况, 因此有  $S_B = \{v_2, v_4, \dots, v_{2j}\}$ , 且  $f(v_{2j}) = 1$ , 其中  $1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$ 。

$$\text{因此, } \gamma_I(S_B) = |V_0| + |V_1| + 2|V_2| = |V_1| = n \left\lceil \frac{m-1+1}{2} \right\rceil - n = n \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil - n。$$

在 Y-tree 图中, 由人链图的结构特征可知, Y-tree 部分的内部赋值与路径、环部分的赋值互不影响。

因此,  $S_C = \{w_{2x}, w_{4x}, \dots, w_{nx} | 1 \leq x \leq \left\lfloor \frac{m-3}{2} \right\rfloor; n \in \mathbb{N}\} \cup \{w_{m-2}, w_{2m-2}, \dots, w_{nm-2}\}$ , 其中  $m \in \mathbb{N}$ , 且  $f(w_{yx}) = 1$ ,  $f(w_{ym-2}) = 2$ , 其中  $1 \leq y \leq n$ 。

$$\text{故有 } \gamma_I(S_C) = |V_0| + |V_1| + 2|V_2| = |V_1| + 2|V_2| = n \left\lceil \frac{m-1+1}{2} \right\rceil + n - n = n \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil。$$

对于路径顶点, 任意赋值为 0 的顶点  $u_{2j+1}$ , 其两个邻点均赋值为 1, 满足条件; 对每个环上任意赋值为 0 的顶点, 根据交替赋值原则, 其两个邻点均被赋值为 1, 满足条件; 对于 Y-tree 上任意赋值为 0 的顶点, 根据交替赋值构造, 特别地, 根  $w_{m-2}$  赋值为 2, 其邻接的叶子顶点赋值为 0, 该赋值与其他顶点赋

值互相不影响。故也满足条件。

$$\text{从而, } w(f) \leq \gamma_I(A) + \gamma_I(B) + \gamma_I(C) = 2 + 2n \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil. \text{ 故 } \gamma_I(HC_{n,m}) \leq 2 + 2n \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil.$$

下面证明其下界。

设  $g$  是  $HC_{n,m}$  的任意一个最小意大利支配函数。

先看路径  $P_{2n+1}$ , 端点  $u_1$  和  $u_{2n+1}$  的度数仅为 1。以  $u_1$  为例, 其唯一的邻点  $u_2$ 。若  $g(u_1) = 0$ , 则必须满足  $g(u_2) \geq 2$ 。构造一个新函数  $g'$ , 令  $g'(u_1) = 1, g'(u_2) = g(u_2) - 1$ , 则  $g'$  也是意大利支配函数且权值更小, 这与  $g$  是最小函数矛盾。因此, 在任意意大利支配函数  $g$  中, 必有  $g(u_1) = 1$ 。同理,  $g(u_{2n+1}) = 1$ 。由此得到  $g(u_1) + g(u_{2n+1}) \geq 2$ 。

将附着在路径上的环和 Y-tree 图分为  $n$  个单位, 第  $i$  个单位对应顶点  $x_i = u_{2i}$ , 其中  $1 \leq i \leq n$ 。

对于环部分  $B_i \cup \{x_i\}$ , 此时子图同构于一个环  $C_m$ 。由命题 3.3 知,  $\gamma_I(C_m) = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ 。因此, 不管  $g(x_i)$  为多少, 该子图上的总权重必须满足  $w(g|_{B_i \cup \{x_i\}}) \geq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ 。

对于 Y-tree 部分  $C_i$ , 此时子图是一个  $Y_m$ , 以  $w_{im-2}$  为根附着于  $x_i$  的树上。则  $w(g|_{C_i}) \geq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ 。

对  $g(x_i) = 0$  的取值进行分类讨论。

情况 3.1 当  $g(x_i) = 0$  时。则为了支配  $x_i$ , 其邻点中至少有两个赋值为 1。特别地, 必有  $g(w_{(i-1)m+1}) = 1$ , 在  $C_i$  中, 剩余的  $m-1$  个顶点, 满足意大利支配条件。故至少需要在其余顶点上分配  $\left\lceil \frac{m-1-3}{2} \right\rceil + 2 = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$  的权重。因此,  $w(g|_{C_i}) \geq 1 + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ 。

情况 3.2 当  $g(x_i) = 1$  时。此时  $x_i$  可为其邻点  $w_{(i-1)m+1}$  提供支持。即使  $g(w_{(i-1)m+1}) = 0$ ,  $w_{(i-1)m+1}$  也能被  $x_i$  部分支配。但是, 支配整个  $C_i$  其中离  $x_i$  最远的叶子顶点, 该叶子顶点被支配的条件是其父顶点被赋值为 2。所以其内部需要的最小意大利支配权重至少为  $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ 。故  $w(g|_{C_i}) \geq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ 。

情况 3.3 当  $g(x_i) = 2$  时, 由情况 3.1 和情况 3.2 可知, 此时结论成立。

综合上面情况, 其总权重为

$$w(g) = [g(u_1) + g(u_{2n+1})] + \sum_{i=1}^n w(g|_{B_i \cup \{x_i\}}) + \sum_{i=1}^n w(g|_{C_i}).$$

从而,  $w(g) \geq 2 + \sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + \sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = 2 + 2n \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ 。故  $\gamma_I(HC_{n,m}) \geq 2n \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 2$ 。

综上所述, 当  $m = 4$  或  $m \geq 6$ , 有  $\gamma_I(HC_{n,m}) = 2n \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 2$ 。

定理 4.1 得证。 □

定理 4.1 中公式的分段特性源于附属子图, 即环  $C_m$  和  $Y_{m+1}$  的结构差异, 及其与核心路径交互时支配策略的不同。

$m = 3, 5$  的情形, 即权重复用: 当  $m = 3$  或  $5$  时, 环  $C_m$  结构紧凑 ( $C_3$  含弦,  $C_5$  直径小)。最优策略是将共享顶点  $x_i$  赋值为 2, 利用其强支配力同时覆盖其所在的环、Y-tree 的根以及自身, 实现权重复用, 从而得到较低的线性系数, 即  $4n$  和  $6n$ 。

$m = 4$  或  $m \geq 6$  的情形, 即权重相加: 当  $m=4$  或  $m \geq 6$  时, 环结构变得松散(直径增大)。共享顶点  $x_i$  的支配力无法有效覆盖整个环, 最优策略转变为: 路径端点必须赋值为 1, 即贡献常数 2, 而每个环与 Y-tree 模块需在内部实现自给自足的支配, 即各需至少  $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$  的权重。这导致权重在不同模块间简单相加, 公式为  $2 + 2n \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ 。

支配数公式的差异本质上是图结构“紧凑性”的函数。紧凑结构允许许多模块间的权重复用, 降低总权重; 而松散结构迫使支配权重分散于各模块内部, 导致线性叠加。这揭示了结构参数对支配策略与精确解形式的决定性影响。

## 5. 结论

本文研究了人链图上的意大利支配问题, 通过结构分解与分类讨论, 给出了其意大利支配数的精确计算公式。该结果推广了 Meiyannathan 等人关于人链图支配参数的研究。本文所采用的分解与构造方法, 为研究具有类似复合结构的图类提供了参考。未来工作可聚焦于人链图的其他支配变体, 或探索本文方法在更广泛图类中的适用性。

## 基金项目

本研究得到了国家自然科学基金(编号: 11701059)和重庆市自然科学基金创新发展联合基金(市教委)(编号: CSTB2022NSCQ-LZX0003)的资助。

## 参考文献

- [1] Cockayne, E.J., Dreyer, P.A., Hedetniemi, S.M. and Hedetniemi, S.T. (2004) Roman Domination in Graphs. *Discrete Mathematics*, **278**, 11-22. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2003.06.004>
- [2] Chellali, M., Haynes, T.W., Hedetniemi, S.T. and McRae, A.A. (2016) Roman  $\{2\}$ -Domination. *Discrete Applied Mathematics*, **204**, 22-28. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2015.11.013>
- [3] Henning, M.A. and Klostermeyer, W.F. (2017) Italian Domination in Trees. *Discrete Applied Mathematics*, **217**, 557-564. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.09.035>
- [4] Rad, N.J. and Hajibaba, M. (2019) On Domination, Domination, and Italian Domination Numbers. *Utilitas Mathematica*, **111**.
- [5] Hajibaba, M. and Rad, N.J. (2017) Some Notes on the Roman Domination Number and Italian Domination Number in Graphs. *Journal of Physics: Conference Series*, **890**, Article ID: 012123. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/890/1/012123>
- [6] Haynes, T.W., Henning, M.A. and Volkmann, L. (2020) Graphs with Large Italian Domination Number. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **43**, 4273-4287. <https://doi.org/10.1007/s40840-020-00921-y>
- [7] Cabrera Martínez, A. and Rodríguez-Velázquez, J.A. (2021) From the Strong Differential to Italian Domination in Graphs. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **18**, Article No. 228. <https://doi.org/10.1007/s00009-021-01866-7>
- [8] Cabrera Martínez, A. and Gonzalez Yero, I. (2019) A Characterization of Trees with Equal Roman  $\{2\}$ -Domination and Roman Domination Numbers. *Communications in Combinatorics and Optimization*, **4**, 95-107.
- [9] Anitha, K. and Selvam, B. (2018) Human Chain Graph. *International Journal of Engineering, Science and Mathematics*, **7**, 41-49.
- [10] Meiyannathan, M. and Anitha, K. (2021) Domination, Edge Domination and Roman Domination in Human Chain Graph. *Journal of Physics: Conference Series*, **1724**, Article ID: 012023. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1724/1/012023>