Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(6), 1-6
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.166149

广义向列型液晶方程的能量等式

范　婷，曾　勇

重庆工商大学数学与统计学院，重庆

收稿日期：2026年5月6日；录用日期：2026年6月1日；发布日期：2026年6月10日

摘　要

针对广义向列型液晶方程，研究其弱解满足能量等式的充分条件。采用磨光函数技术，通过对非线性项进行精细估计，在分数阶耗散参数介于1与5/2之间时，证明若速度场与分子指向向量的梯度满足适当时空可积性，则能量等式成立。结果表明，该条件可保证系统在三维全空间中能量守恒，并涵盖了经典Navier-Stokes方程中的已知结论，为广义液晶流动模型的能量守恒性提供了理论依据。

关键词

广义液晶方程，分数阶拉普拉斯算子，能量等式

Energy Equality of the Generalized Nematic Liquid Crystal Equations

Ting Fan, Yong Zeng

School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing

Received: May 6, 2026; accepted: June 1, 2026; published: June 10, 2026

Abstract

For the generalized nematic liquid crystal equations, we study sufficient conditions under which weak solutions satisfy the energy equality. Using the mollifier technique and performing delicate estimates on the nonlinear terms, it is proved that when the fractional dissipation parameter lies between 1 and 5/2, the energy equality holds provided that the velocity field and the gradient of the molecular orientation vector satisfy appropriate space-time integrability conditions. The results show that these conditions guarantee energy conservation in the three-dimensional whole space, and they cover known conclusions for the classical Navier-Stokes equations, providing a theoretical basis for the energy identity of generalized liquid crystal flow models.

文章引用：范婷，曾勇. 广义向列型液晶方程的能量等式[J]. 理论数学, 2026, 16(6): 1-6.
DOI: 10.12677/pm.2026.166149

Keywords

Generalized Liquid Crystal Equations, Fractional Laplacian, Energy Equality

1. 引言

广义液晶方程是描述向列型液晶流体动力学行为的数学模型，是经典 Ericksen-Leslie 系统的扩展。经典 Ericksen-Leslie 系统的耗散项通常由拉普拉斯算子刻画，然而，在大量实际物理问题的研究中发现，对于具有非局部效应或者反常扩散的流体运动，采用分数阶拉普拉斯算子描述耗散过程更为合理。为此我们考虑如下三维广义向列型液晶方程：

$$\begin{cases} u_t + u\cdot\nabla u + (-\Delta)^{\alpha} u + \nabla P = -(\nabla d)^T \Delta d, \\ d_t + u\cdot\nabla d - \Delta d = 0, \\ divu = 0, \end{cases} \tag{1}$$

并给定初值条件 $u(x,0)=u_0(x), d(x,0)=d_0(x)$，其中 u 表示速度场，d 表示各向异性液晶取向场的宏观平均值，P 表示压强，α 是大于 0 的常数，用以刻画反常扩散中的非局部效应。分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^{\alpha}$ 通过如下傅里叶变换定义：$\mathcal{F}\left((-\Delta)^{\alpha} u\right)(\xi)=|\xi|^{2\alpha}\mathcal{F}(u)(\xi)$，下文中记 $\Lambda=(-\Delta)^{1/2}$。

当 $\alpha=1$ 时，方程组(1)退化为已被广泛研究的经典向列型液晶方程。针对方程组(1)及相关模型的研究多集中在解的存在性、正则性与爆破准则。1995 年，Lin 和 Liu 证明了该方程组弱解的全局存在性和有限时间内光滑解的存在性[1]。同时，他们还证明了当粘性较大时，全局经典解的存在性和唯一性。后来，他们建立了该方程组适当弱解的部分正则性，推广了 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 关于 Navier-Stokes 方程的经典工作[2]。2001 年，Coutand 和 Shkoller 针对光滑初边值情形证明了方程组的局部适定性，并给出解的全局存在性的充分条件[3]。2009 年，Lin 等建立了二维有界光滑域上的全局弱解的存在性，这些解在有限个可能的奇异时刻外都是光滑的[4]。2010 年，Hu 和 Wang 针对有界区域建立了关于小初值的整体强解的存在唯一性[5]。关于弱解的正则性以及爆破准则，Fan 和 Ozawa 给出了简化 Ericksen-Leslie 模型的弱解的一些光滑准则性[6]。Zhang 等给出了弱解的 Osgood 型光滑性准则[7]。Qian 证明了当 u 和 d 的某些分量满足 Prodi-Serrin 条件时，解是光滑的[8]。

关于液晶方程弱解的能量等式的研究相对较少。针对可压缩情形，Tan 等学者证明若弱解满足 $0\le\rho\le\tilde{\rho}<\infty$，$\nabla\sqrt{\rho}\in\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ 和 $u\in L^p\left(0,T;L^q(\Omega)\right)$，$1/p+3/q\le 3/4$，$q\ge 6$ 则能量等式成立[9]。本研究将谭忠等学者关于可压缩液晶方程的结果推广到分数阶不可压情形，同时将 $\alpha=1$ 拓展到了 $1\le\alpha<5/2$，完善了分数阶液晶方程的理论框架，且 α 精准调控非局部耗散强度，贴合实际液晶动力学行为。

2. 主要结论

定理 1 假设 $1\le\alpha<5/2$，$u_0\in L^2(R^3)$，且 $\mathrm{div}u_0=0$，$d_0\in L^{\infty}(R^3)\cap H^1(R^3)$，

$$(u,d)\in\left[L^{\infty}\left(0,T;L^2(R^3)\right)\cap L^2\left(0,T;H^{\alpha}(R^3)\right)\right]\times\left[L^{\infty}\left(0,T;H^1(R^3)\right)\cap L^2\left(0,T;H^2(R^3)\right)\right]$$

是方程组(1)的弱解且满足

$$u\in L^4\left(0,T;L^{\frac{12}{3\alpha+1}}\left(R^3\right)\right),\ \nabla d\in L^4\left(0,T;L^{\frac{12}{5-2\alpha}}\left(R^3\right)\right) \tag{2}$$

则对任意的 $t\in[0,T]$，下述能量等式成立

$$\int_{R^3}\left(|u|^2+|d|^2\right)\mathrm{d}x+2\int_0^t\int_{R^3}\left(\left|\Lambda^\alpha u\right|^2+|\nabla d|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+2\int_0^t\int_{R^3}(\nabla d)^{\mathrm{T}}\Delta d\cdot u\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{R^3}\left(\left|u_0\right|^2+\left|d_0\right|^2\right)\mathrm{d}x.$$

定理 2 假设 $1\le\alpha<3/2$，$u_0\in L^2\left(R^3\right)$ 且 $\operatorname{div}u_0=0, d_0\in L^\infty\left(R^3\right)\cap H^1\left(R^3\right)$，

$$(u,d)\in\left[L^\infty\left(0,T;L^2\left(R^3\right)\right)\cap L^2\left(0,T;H^\alpha\left(R^3\right)\right)\right]\times\left[L^\infty\left(0,T;H^1\left(R^3\right)\right)\cap L^2\left(0,T;H^2\left(R^3\right)\right)\right]$$

是方程组(1)的弱解且满足

$$u\in L^q\left(0,T;L^p\left(R^3\right)\right),\nabla d\in L^r\left(0,T;L^s\left(R^3\right)\right), \tag{3}$$

其中常数 p,q,r,s 满足

$$\frac{6}{p}+\frac{10-4\alpha}{q}\le 3,\ p\ge\frac{12}{2\alpha+1};\ \frac{3}{p}+\frac{2\alpha-1}{q}\le\alpha,\ p\le\frac{12}{2\alpha+1}. \tag{4}$$

以及

$$\frac{6}{s}+\frac{4\alpha+2}{r}\le 3,\ s\ge\frac{12}{5-2\alpha};\ \frac{3}{s}+\frac{3-2\alpha}{r}\le 2-\alpha,\ s\le\frac{12}{5-2\alpha}. \tag{5}$$

注记 3 当 $\alpha=1$ 时，条件(4)和(5)分别退化为下述标准的 Shinbrot 型条件：

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\le\frac{1}{2},\ p\ge 4;\ \frac{3}{p}+\frac{1}{q}\le 1,\ p\le 4,$$

以及

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{r}\le\frac{1}{2},\ s\ge 4;\ \frac{3}{s}+\frac{1}{r}\le 1,\ s\le 4.$$

较之保证解的光滑性的 Prodi-Serrin 型条件，Shinbrot 型条件包含了更广的函数空间，削弱了对解的光滑性的假设。

注记 4 定理的证明中用到了 Sobolev 嵌入公式 $H^{\alpha-1}\left(R^3\right)\to L^{\frac{6}{5-2\alpha}}\left(R^3\right)$，因此我们假设 $1\le\alpha\le 5/2$。

3. 定理 1 的证明

对时空函数 $f:(0,T)\times R\to R^3$ 定义

$$(f)_\varepsilon(t,x):=\int_0^T k_\varepsilon(t-\tau)f(\tau,x)\mathrm{d}\tau,0<\varepsilon<T,$$

其中 $k\in C_0^\infty(R)$ 是一个实值非负偶函数，支集包含在 $[-1,1]$ 内，满足 $\int_R k(s)\mathrm{d}s=1$，$k_\varepsilon(t):=\varepsilon^{-1}k(t/\varepsilon)$。这是关于时间变量的标准 Friedrichs 磨光。因时间的磨光方法是标准且经典的，下文总是假设弱解对时间可微。设 $\eta:R^3\to R$ 为标准磨光算子，对任意的 $\varepsilon>0$，定义缩放后的磨光函数 $\eta_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^3}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$。记 f^ε 为 f 的磨光，即 $f^\varepsilon(x)=(f*\eta_\varepsilon)(x)=\int_{R^3}\eta_\varepsilon(x-y)f(y)\mathrm{d}y$。为方便起见，在后文中以 $\|\cdot\|_{p,q}$ 表示范数 $\|\cdot\|_{L^p\left(0,T;L^q\left(R^3\right)\right)}$。

取 u^ε 作为(1)式速度场方程的试验函数，等式两边同乘 $(u^\varepsilon)^\varepsilon$，得到

$$\int_0^t\int_{R^3} u^\varepsilon\left(u_t+u\cdot\nabla u+(-\Delta)^\alpha u+\nabla\pi+(\nabla d)^{\mathrm{T}}\Delta d\right)^\varepsilon \mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

整理可得

$$\begin{aligned}&\int_{R^3}\frac{1}{2}\left|u^\varepsilon\right|^2\mathrm{d}x-\int_{R^3}\frac{1}{2}\left|u_0^\varepsilon\right|^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{R^3}\left(\mathrm{div}(u\otimes u)\right)^\varepsilon\cdot u^\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&+\int_0^t\int_{R^3}\left|\Lambda^\alpha u^\varepsilon\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_{R^3}u^\varepsilon\cdot\nabla\pi^\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_{R^3}\left((\nabla d)^{\mathrm{T}}\Delta d\right)^\varepsilon\cdot u^\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.\end{aligned}\tag{6}$$

根据磨光算子的性质，当 $\varepsilon\to 0$ 时有下列收敛性质成立：

$$\int_{R^3}\frac{1}{2}\left|u^\varepsilon\right|^2\mathrm{d}x\to\int_{R^3}\frac{1}{2}|u|^2\mathrm{d}x;$$

$$\int_{R^3}\frac{1}{2}\left|u_0^\varepsilon\right|^2\mathrm{d}x\to\int_{R^3}\frac{1}{2}|u_0|^2\mathrm{d}x;$$

$$\int_0^t\int_{R^3}\left|\Lambda^\alpha u^\varepsilon\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\to\int_0^t\int_{R^3}\left|\Lambda^\alpha u\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

利用分部积分公式，我们有 $\int_{R^3}\left(\mathrm{div}(u^\varepsilon\otimes u^\varepsilon)\right)\cdot u^\varepsilon\mathrm{d}x=0$。利用该等式，当 $\varepsilon\to 0$ 时，有

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_{R^3}\left(\mathrm{div}(u\otimes u)\right)^\varepsilon\cdot u^\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_0^t\int_{R^3}\left[(u\otimes u)^\varepsilon-(u\otimes u)\right]\cdot\nabla u^\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le C\left\|(u\otimes u)^\varepsilon-u\otimes u\right\|_{L^2\left(0,T;L^{6/2\alpha+1}(R^3)\right)}\left\|\nabla u^\varepsilon\right\|_{L^2\left(0,T;L^{6/5-2\alpha}(R^3)\right)}\\&\quad+C\left\|u-u^\varepsilon\right\|_{L^4\left(0,T;L^{12/2\alpha+1}(R^3)\right)}\|u\|_{L^4\left(0,T;L^{12/2\alpha+1}(R^3)\right)}\left\|\nabla u^\varepsilon\right\|_{L^2\left(0,T;L^{6/5-2\alpha}(R^3)\right)}\\&\quad+C\left\|u-u^\varepsilon\right\|_{L^4\left(0,T;L^{12/2\alpha+1}(R^3)\right)}\left\|u^\varepsilon\right\|_{L^4\left(0,T;L^{12/2\alpha+1}(R^3)\right)}\left\|\nabla u^\varepsilon\right\|_{L^2\left(0,T;L^{6/5-2\alpha}(R^3)\right)}\to 0.\end{aligned}$$

这里用到了如下 Sobolev 嵌入公式 $H^{\alpha-1}(R^3)\to L^{\frac{6}{5-2\alpha}}(R^3)$。因为 u^ε 散度为零，经分部积分可得到恒等式

$$\int_0^t\int_{R^3}u^\varepsilon\cdot\nabla\pi^\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

整理(6)等号左侧最后一项可得

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_{R^3}\left((\nabla d)^{\mathrm{T}}\Delta d\right)^\varepsilon\cdot u^\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\int_0^t\int_{R^3}\left[\left((\nabla d)^{\mathrm{T}}\Delta d\right)^\varepsilon-(\nabla d)^{\mathrm{T}}\Delta d\right]\cdot u^\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_{R^3}(\nabla d)^{\mathrm{T}}\Delta d\cdot\left(u^\varepsilon-u\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_{R^3}(\nabla d)^{\mathrm{T}}\Delta d\cdot u\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=K_1+K_2+\int_0^t\int_{R^3}(\nabla d)^{\mathrm{T}}\Delta d\cdot u\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式可以得到

$$|K_1|\le C\left\|\left((\nabla d)^{\mathrm{T}}\Delta d\right)^\varepsilon-\left((\nabla d)^{\mathrm{T}}\Delta d\right)\right\|_{L^{4/3}\left(0,T;L^{12/11-2\alpha}(R^3)\right)}\left\|u^\varepsilon\right\|_{L^4\left(0,T;L^{12/2\alpha+1}(R^3)\right)}.$$

同理

$$|K_2|\le C\left\|(\nabla d)^{\mathrm{T}}\Delta d\right\|_{L^{4/3}\left(0,T;L^{12/11-2\alpha}(R^3)\right)}\left\|u^\varepsilon-u\right\|_{L^4\left(0,T;L^{12/2\alpha+1}(R^3)\right)}.$$

在(6)中令 $\varepsilon\to 0$ 得

$$\int_{R^3}|u|^2\mathrm{d}x-\int_{R^3}|u_0|^2\mathrm{d}x+2\int_0^t\int_{R^3}\left|\Lambda^\alpha u\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+2\int_0^t\int_{R^3}(\nabla d)^{\mathrm{T}}\Delta d\cdot u\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0. \tag{7}$$

取 $\left(d^\varepsilon\right)^\varepsilon$ 作为(1)中 d 的方程两边同乘 $\left(d^\varepsilon\right)^\varepsilon$，类似于对 u 的处理，

$$\int_{R^3}\left|d^\varepsilon\right|^2\mathrm{d}x-\int_{R^3}\left|d_0^\varepsilon\right|^2\mathrm{d}x+2\int_0^t\int_{R^3}(u\cdot\nabla d)^\varepsilon\cdot d^\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t+2\int_0^t\int_{R^3}\left|\nabla d^\varepsilon\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0. \tag{8}$$

我们仅需估计(8)式等号左侧非线性项。根据 $\int_{R^3}\left(\operatorname{div}\left(d^\varepsilon\otimes u^\varepsilon\right)\right)\cdot d^\varepsilon\mathrm{d}x=0$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_{R^3}(u\cdot\nabla d)^\varepsilon\cdot d^\varepsilon\ \mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^t\int_{R^3}\left(\operatorname{div}(d\otimes u)\right)^\varepsilon\cdot d^\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^t\int_{R^3}\left(\operatorname{div}\left(d^\varepsilon\otimes u^\varepsilon\right)\right)\cdot d^\varepsilon\ \mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\le\int_0^t\int_{R^3}\left|(d\otimes u)^\varepsilon-(d\otimes u)\right|\cdot\left|\nabla d^\varepsilon\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^t\int_{R^3}\left|(d\otimes u)-\left(d\otimes u^\varepsilon\right)\right|\left|\nabla d^\varepsilon\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_0^t\int_{R^3}\left|\left(d\otimes u^\varepsilon\right)-\left(d^\varepsilon\otimes u^\varepsilon\right)\cdot\left|\nabla d^\varepsilon\right|\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\le C\left\|(d\otimes u)^\varepsilon-d\otimes u\right\|_{L^{\frac{4}{3}}\left(0,T;L^{\frac{12}{7+2\alpha}}\left(R^3\right)\right)}\left\|\nabla d^\varepsilon\right\|_{L^4\left(0,T;L^{\frac{12}{5-2\alpha}}\left(R^3\right)\right)}+C\left\|u-u^\varepsilon\right\|_{L^4\left(0,T;L^{\frac{12}{2\alpha+1}}\left(R^3\right)\right)}\|d\|_{L^2\left(0,T;L^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right)}\left\|\nabla d^\varepsilon\right\|_{L^4\left(0,T;L^{\frac{12}{5-2\alpha}}\left(R^3\right)\right)}\\
&\quad+C\left\|d-d^\varepsilon\right\|_{L^2\left(0,T;L^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right)}\left\|u^\varepsilon\right\|_{L^4\left(0,T;L^{\frac{12}{2\alpha+1}}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)}\left\|\nabla d^\varepsilon\right\|_{L^4\left(0,T;L^{\frac{12}{5-2\alpha}}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)}\to 0.
\end{aligned}$$

根据上述估计，当 $\varepsilon\to 0$ 时，由(8)式可得

$$\int_{R^3}|d|^2\mathrm{d}x-\int_{R^3}|d_0|^2\mathrm{d}x+2\int_0^t\int_{R^3}|\nabla d|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0. \tag{9}$$

结合(7)式和(9)式，即可得到

$$\int_{R^3}\left(|u|^2+|d|^2\right)\mathrm{d}x+2\int_0^t\int_{R^3}\left(\left|\Lambda^\alpha u\right|^2+|\nabla d|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+2\int_0^t\int_{R^3}(\nabla d)^{\mathrm{T}}\Delta d\cdot u\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{R^3}\left(|u_0|^2+|d_0|^2\right)\mathrm{d}x.$$

至此完成定理 1 的证明。

4. 定理 2 的证明

根据定理 1，我们只需证明(4)，(5)将导出(2)。现设弱解 u 满足(4)，则由 Hölder 不等式可知，当 $p\ge\dfrac{12}{2\alpha+1}$ 时有

$$\|u\|_{4,\frac{12}{2\alpha+1}}\le C\|u\|_{\infty,2}^{1-\theta}\|u\|_{q,p}^{\theta},$$

其中 θ 满足

$$\frac{1}{4}\ge\frac{1-\theta}{\infty}+\frac{\theta}{q},\quad\frac{2\alpha+1}{12}=\frac{1-\theta}{2}+\frac{\theta}{p},$$

这等价于 $\dfrac{6}{p}+\dfrac{10-4\alpha}{q}\le 3,\quad p\ge\dfrac{12}{2\alpha+1}$；当 $p\le\dfrac{12}{2\alpha+1}$ 时有

$$\|u\|_{4,\frac{12}{2\alpha+1}}\le C\|u\|_{2,6}^{1-\theta}\|u\|_{q,p}^{\theta},$$

其中 θ 满足

$$\frac{1}{4}\ge\frac{1-\theta}{2}+\frac{\theta}{q},\quad\frac{2\alpha+1}{12}=\frac{1-\theta}{6}+\frac{\theta}{p}.$$

这等价于 $\dfrac{3}{p}+\dfrac{2\alpha-1}{q}\le\alpha,\quad p\le\dfrac{12}{2\alpha+1}$。从而证得(4)蕴含(2)中关于的假设。类似地，可以证明(5)蕴含

(2)中关于 ∇d 的假设。综合得定理 2 的证明。

5. 结语

能量等式何时成立一直是流体相关方程的研究重点，本研究利用磨光技术以及对非线性项的精细估计，建立了广义向列型液晶 u 方程的能量等式，推广了现有文献对 Navier-Stokes 方程及液晶方程能量等式的相关研究。相关系统仍有许多问题值得我们进一步探索。例如：能否进一步优化所论函数空间；能否根据有界域上的非局部效应建立相关分数阶模型，并考虑正则性与能量等式相关问题；已知对分数阶 Navier-Stokes 方程，$\alpha \geq 5/4$ 时弱解总是光滑的，对分数阶液晶方程是否能证明类似的结论等。

基金项目

国家自然科学基金(12001069)；重庆市自然科学基金(cstc2019jcyj-msxmX0214)。

参考文献

[1] Lin, F.H. and Liu, C. (1995) Nonparabolic Dissipative Systems Modeling the Flow of Liquid Crystals. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **48**, 501-537. https://doi.org/10.1002/cpa.3160480503

[2] Lin, F.H. and Liu, C. (1996) Partial Regularity of the Dynamic System Modeling the Flow of Liquid Crystals. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **2**, 1-22. https://doi.org/10.3934/dcds.1996.2.1

[3] Coutand, D. and Shkoller, S. (2001) Well-Posedness of the Full Ericksen-Leslie Model of Nematic Liquid Crystals. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences—Series I*: *Mathematics*, **333**, 919-924. https://doi.org/10.1016/s0764-4442(01)02161-9

[4] Lin, F., Lin, J. and Wang, C. (2009) Liquid Crystal Flows in Two Dimensions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **197**, 297-336. https://doi.org/10.1007/s00205-009-0278-x

[5] Hu, X. and Wang, D. (2010) Global Solution to the Three-Dimensional Incompressible Flow of Liquid Crystals. *Communications in Mathematical Physics*, **296**, 861-880. https://doi.org/10.1007/s00220-010-1017-8

[6] Fan, J. and Ozawa, T. (2009) Regularity Criteria for a Simplified Ericksen-Leslie System Modeling the Flow of Liquid Crystals. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **23**, 859-867. https://doi.org/10.3934/dcds.2009.25.859

[7] Zhang, Z., Tang, T. and Liu, L. (2014) An Osgood Type Regularity Criterion for the Liquid Crystal Flows. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, **21**, 253-262. https://doi.org/10.1007/s00030-013-0245-y

[8] Qian, C. (2016) A Further Note on the Regularity Criterion for the 3D Nematic Liquid Crystal Flows. *Applied Mathematics and Computation*, **290**, 258-266. https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.06.011

[9] Tan, Z., Li, X. and Yang, H. (2024) Energy Conservation for the Weak Solutions to the 3D Compressible Nematic Liquid Crystal Flow. *Acta Mathematica Scientia*, **44**, 851-864. https://doi.org/10.1007/s10473-024-0305-x