

基于Van der Waals状态方程的一维可压缩Navier-Stokes/Allen-Cahn方程组稀疏波的渐近稳定性

王泉栋, 廖媛, 彭亿*

北京化工大学数理学院, 北京

收稿日期: 2026年5月8日; 录用日期: 2026年6月9日; 发布日期: 2026年6月30日

摘要

本文研究了在van der Waals状态方程下, 一维可压缩Navier-Stokes/Allen-Cahn方程组Cauchy问题的稀疏波渐近稳定性。在气相区域初值存在小扰动的条件下, 通过构造稀疏波的近似解并应用能量估计方法, 证明了该稀疏波解的渐近稳定性, 且稀疏波强度不需要小性条件。

关键词

Navier-Stokes/Allen-Cahn方程组, van der Waals状态方程, 稀疏波, 渐近稳定性

Asymptotic Stability of Rarefaction Waves for the One-Dimensional Compressible Navier-Stokes/Allen-Cahn Equations Based on the van der Waals Equation of State

Quandong Wang, Yuan Liao, Yi Peng*

College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing

Received: May 8, 2026; accepted: June 9, 2026; published: June 30, 2026

*通讯作者。

文章引用: 王泉栋, 廖媛, 彭亿. 基于 Van der Waals 状态方程的一维可压缩 Navier-Stokes/Allen-Cahn 方程组稀疏波的渐近稳定性[J]. 理论数学, 2026, 16(6): 102-118. DOI: 10.12677/pm.2026.166161

Abstract

This paper investigates the asymptotic stability of rarefaction wave solutions for the Cauchy problem of the one-dimensional Navier-Stokes/Allen-Cahn equations based on the van der Waals equation of state. Under the condition that the initial data in the gas phase region have small perturbations, the asymptotic stability of the rarefaction wave solutions is proved by constructing approximate solutions of the rarefaction wave and applying the energy method, without requiring the smallness condition on the strength of the rarefaction wave.

Keywords

Navier-Stokes/Allen-Cahn System, Van Der Waals Equation of State, Rarefaction Wave, Asymptotic Stability

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Navier-Stokes/Allen-Cahn (NSAC)方程组[1]是描述具有扩散界面的非混相两相流的经典相场模型,将流体动力学与界面动力学有机结合。NSAC 方程组是由描述流体运动的 Navier-Stokes 方程和描述相场演化的 Allen-Cahn 方程耦合而成。NSAC 方程组在许多物理和工程领域中都有许多重要的应用,比如石油开采领域中用于模拟原油和水在复杂多孔介质中的两相流演化,揭示油藏动态规律并提高采收率;核能工程领域中用于研究冷却剂在高温高压下的饱和水-蒸汽两相流行为,来精确预测相变过程并保障系统安全;化学工业领域中用于模拟多种聚合物的混合与分离过程。

近年来,关于 NSAC 方程组解的适定性和大时间行为有着丰富的结果。2010 年 Feireisl 等[2]对于理想气体状态方程下,三维可压缩 NSAC 方程组的初边值问题首先考虑初始能量有界和绝热常数 $\gamma > 6$ 的条件下,得到全局弱解的存在性;2019 年 Chen 等[3]将上述结果推广到 $\gamma > 2$ 的情形;2013 年 Ding 等[4]证明一维可压缩 NSAC 方程组在初始状态远离真空时全局古典解的存在唯一性、弱解的存在性;2017 年 Chen 和 Guo [5]将以上结果推广到了初值包含真空的情形;2018 年 Luo 等[6]通过能量估计方法证明了可压缩 NSAC 方程组柯西问题解渐进趋于对应 Euler 方程的稀疏波解;2022 年 Luo [7]证明了一维可压缩非等熵 NSAC 方程组柯西问题解渐进趋于对应 Euler 方程的稀疏波解;2023 年 Li 等[8]在一维自由边界条件下,首次建立了可压缩 NSAC 方程组在真空连接初始密度下的全局弱解存在性理论;2024 年 Chen 等[9]研究了稀疏波波强足够小的条件下可压缩 NSAC 方程组的全局适定性,同时证明了界面厚度趋于零时,解收敛于对应的 Euler 方程的稀疏波解;2024 年 Chen 等[10]分析了三维可压缩 NSAC 方程组相分离状态的稳定性,在初始小扰动的条件下,证明了 NSAC 方程组解收敛到两相完全分离状态,并且给出了高阶导数的最优衰减率;2025 年 Lei 和 Chen [11]在粘性系数与密度和相场变量有关的条件下,考虑理想气体,证明了一维等熵可压缩 NSAC 方程组在半空间的不渗透壁面问题稀疏波解的渐近稳定性,且不需要小性条件。

相比于理想气体模型, van der Waals 状态方程是一种考虑了分子间吸引力和分子本身体积的模型,

能更真实地反映实际流体的特性, 在描述气体液化、液体的饱和蒸气压等两相流时, van der Waals 流体模型比理想流体模型更贴近实际。

关于 van der Waals 流体的研究, 也有着大量的研究结果。1989 年 L. Hsiao [12] 研究 Euler 方程的黎曼问题可容许解, 根据初始条件在不同区域的分类讨论, 证明了混合型守恒律方程存在可容许弱解; 1990 年 L. Hsiao [13] 给出了 Euler 方程在 van der Waals 状态方程下, 黎曼问题的可容许解定义, 并根据不同的初始值将可容许解分为稀疏波和激波; 1992 年 Yanagi [14] 研究一维等熵可压缩流体的基于 van der Waals 流体的 p-系统的黎曼问题, 通过引入相界面来克服非单调压力函数带来的椭圆性困难; 2004 年 Yang 和 Shi [15] 研究了流体在相变过程中解的大时间行为, 根据初始平均密度将系统的状态划分为不稳定区域, 亚稳定区域, 稳定区域。通过能量方法与小扰动理论, 证明了初始平均密度决定最终相态。在稳定区域和亚稳定区域的压强 P 是凸函数, 而在不稳定区域的压强 P 为非凸函数。

由于 van der Waals 流体在两相流问题中更接近实际流体, 且 NSAC 方程组适用于描述非混相两相流运动, 本文研究了基于 van der Waals 状态方程的一维 NSAC 方程组在初始值小扰动下稀疏波的渐进稳定性。通过构造光滑近似解引入小参数来控制大波强, 运用能量估计的方法证明了 NSAC 方程组的解渐进趋于所对应 Euler 方程的稀疏波解。

2. 研究问题

本文考虑基于 van der Waals 状态方程的一维可压缩 NSAC 方程组, 具体形式如下:

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t + P(v)_x = \lambda \left(\frac{u_x}{v} \right)_x - \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_x^2}{v^2} \right)_x, \\ \chi_t = -v\mu, \\ \mu = \chi^3 - \chi - \left(\frac{\chi_x}{v} \right)_x, \end{cases} \quad (1)$$

$t \in (0, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}$ 。 v 为流体混合物的比容, u 为流体混合物的平均速度, χ 为两种流体的浓度差, μ 为化学势, 粘性系数 $\lambda > 0$, 界面厚度为 1。其中右下角的角标 x 代表对空间坐标 x 求一阶偏导, 右下角的角标 t 代表对时间 t 求一阶偏导, 压强 P 满足如下 van der Waals 状态方程:

$$\left(P + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT, \quad (2)$$

其中 v 为比容, a, b 分别为描述分子内聚力效应和分子有限尺寸的常数, R 为理想气体常数, T 为温度。临界温度 T_c 表示流体以液态形式存在的最高温度。

考虑实际温度 T 小于临界温度 T_c 时满足 van der Waals 状态方程的压强 P , 它具有以下性质:

- (i) $P \in (0, +\infty), v \in (b, +\infty)$,
- (ii) P 为二阶连续可微的,
- (iii) $P'(v) < 0$, 当 $b < v < v_\alpha, v > v_\beta$,
- (iv) $P'(v_\alpha) = P'(v_\beta) = 0$,
- (v) $P'(v) > 0$, 当 $v_\alpha < v < v_\beta$,
- (vi) $P''(v) > 0$, 当 $b < v < \underline{v}, v^* < v < +\infty$,
- (vii) $P''(\underline{v}) = P''(v^*) = 0$,
- (viii) $P''(v) < 0, \underline{v} < v < v^*$ 。

图 1 为实际温度小于临界温度下 van der Waals 状态方程的 $P-v$ 图像:

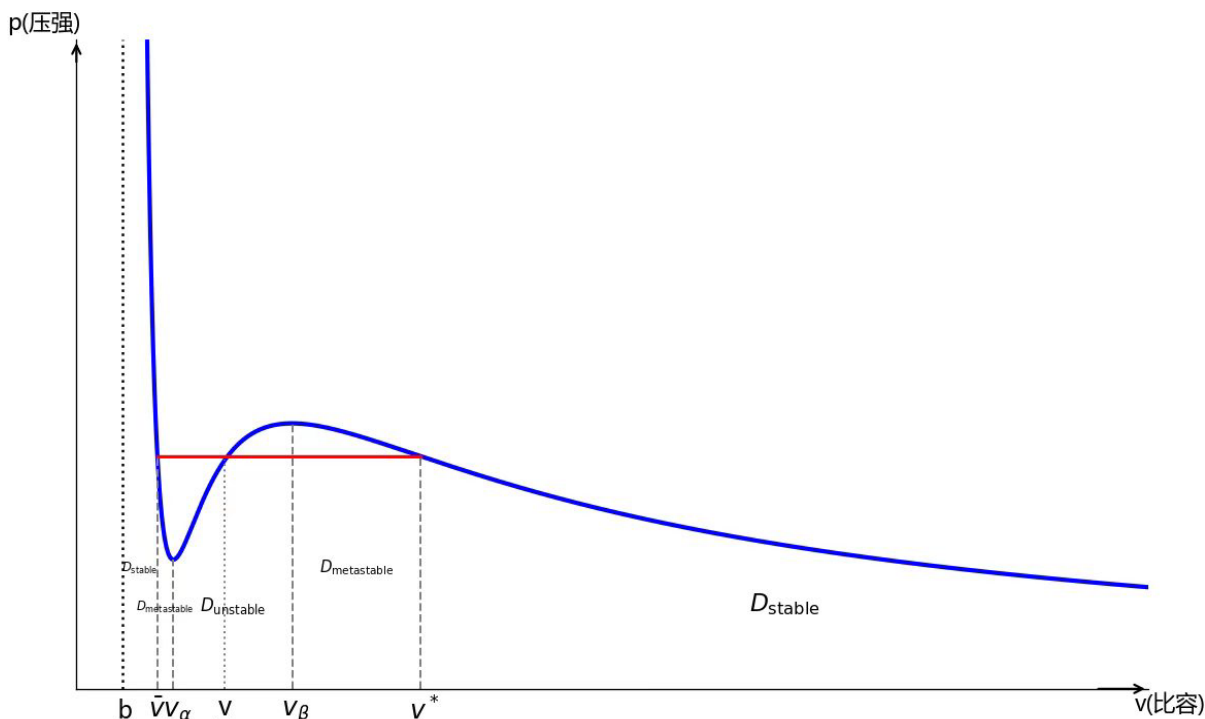


Figure 1. $P-v$ phase diagram

图 1. $P-v$ 相图

根据 Maxwell 等面积法则，可根据初始比容的区域分为稳定区域，亚稳定区域，不稳定区域，如图 1 所示，分别用 D_{stable} ， $D_{metastable}$ ， $D_{unstable}$ 表示。在稳定区域和亚稳定区域的压强 P 是凸函数，而在不稳定区域的压强 P 为非凸函数，即

$$\begin{aligned}
 D_{stable} &= \{v_{\pm} \mid b < v_{\pm} < \bar{v}\} \cup \{v_{\pm} \mid v^* < v_{\pm}\} : P''(v) > 0, \\
 D_{metastable} &= \{v_{\pm} \mid \bar{v} < v_{\pm} < v_{\alpha}\} \cup \{v_{\pm} \mid v_{\beta} < v_{\pm} < v^*\} : P''(v) > 0, \\
 D_{unstable} &= \{v_{\pm} \mid v_{\alpha} < v_{\pm} < v_{\beta}\} : P''(v) < 0,
 \end{aligned}$$

初始数据为

$$(v, u, \chi)(x, 0) = (v_0, u_0, \chi_0)(x), \tag{3}$$

其中 $v_0 > 0$ ，当空间变量无穷大时，我们假设

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (v_0, u_0, \chi_0)(x) = (v_{\pm}, u_{\pm}, \chi_{\pm}) \tag{4}$$

其中 $v_{\pm} > 0$ ， u_{\pm} 为给定的常数， $\chi_{\pm} = \pm 1$ 。

要求解 Euler 方程的稀疏波，需要满足其特征值是真正非线性的，首先要保证特征值存在，Euler 方程为：

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t + P(v)_x = 0. \end{cases}$$

其特征值为：

$$\lambda_1 = -\sqrt{-P'(v)}, \quad \lambda_2 = \sqrt{-P'(v)},$$

故通过稀疏波连接左右状态的情况需满足 $P'(v) < 0$ ，
根据初始比容所在区域可分为以下三种情况

$$\begin{aligned} b < v_{\pm} < v_{\alpha} : P'(v) < 0, P''(v) > 0, \\ v_{\beta} < v_{\pm} < v^* : P'(v) < 0, P''(v) < 0, \\ v^* < v_{\pm} < +\infty : P'(v) < 0, P''(v) > 0, \end{aligned} \tag{5}$$

对于 $b < v_{\pm} < v_{\alpha}$ 与 $v^* < v_{\pm} < +\infty$ 这两种情况， $P(v)$ 满足

$$P'(v) < 0, P''(v) > 0, \tag{6}$$

本文研究 $v^* < v_{\pm} < +\infty$ 的情况。而对于 $v_{\beta} < v_{\pm} < v^*$ ，由于在渐进稳定性分析时 $P''(v) < 0$ 会导致能量估计中的关键耗散项 $\int_{\mathbb{R}} \left(u_x^r [P(v) - P(v^r) - P'(v^r)\varphi] \right) dx$ 负定，导致能量估计方法失效，本文目前的分析框架不足以处理这一情形，因此凹区域的情况仍有待攻克。

为研究 NSAC 方程组解的大时间行为，首先要考虑对应 Euler 方程的黎曼问题：

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t + P(v)_x = 0. \end{cases} \tag{7}$$

初始条件为

$$(v, u)(x, 0) = \begin{cases} (v_+, u_+), & x > 0, \\ (v_-, u_-), & x < 0, \end{cases} \tag{8}$$

可得方程组(7)的两个特征值为

$$\lambda_1 = -\sqrt{-P'(v)}, \quad \lambda_2 = \sqrt{-P'(v)}, \tag{9}$$

以及相对应的两个右特征向量为

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-P'(v)} \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-P'(v)} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

对于每个恒定状态 (v_-, u_-) ， $v_- > v^*$ ，在 (v_-, u_-) 的适当领域 $\Omega_{(v_-, u_-)}$ 内定义稀疏波曲线

$$\begin{aligned} R_1[v_-, u_-] &\equiv \left\{ (v, u) \in \Omega_{(v_-, u_-)} \mid u = u_- + \int_{v_-}^v \sqrt{-P'(\eta)} d\eta, v > v_-, u > u_- \right\}, \\ R_2[v_-, u_-] &\equiv \left\{ (v, u) \in \Omega_{(v_-, u_-)} \mid u = u_- - \int_{v_-}^v \sqrt{-P'(\eta)} d\eta, v < v_-, u > u_- \right\}, \end{aligned} \tag{11}$$

这里只考虑 1-稀疏波(2-稀疏波可以用同样的方式处理)。若 (v_-, u_-) 与 (v_+, u_+) 由(11)连接，则黎曼问题(7)，(8)有一个自相似解，

$$\begin{cases} u^R = u_- + \int_{v_-}^{v^R} \sqrt{-P'(\eta)} d\eta, \\ \lambda_1 \left(v^R \left(\frac{x}{t} \right), u^R \left(\frac{x}{t} \right) \right) = \begin{cases} \lambda_1(v_-, u_-), & \frac{x}{t} < \lambda_1(v_-, u_-), \\ \frac{x}{t}, & \lambda_1(v_-, u_-) \leq \frac{x}{t} < \lambda_1(v_+, u_+), \\ \lambda_1(v_+, u_+), & \frac{x}{t} \geq \lambda_1(v_+, u_+). \end{cases} \end{cases} \tag{12}$$

研究 Euler 方程(7)稀疏波 (v^R, u^R) 的渐进稳定性, 需要利用它的光滑近似 (v^r, u^r) 。考虑如下的 Burgers 方程

$$\begin{cases} w_t + ww_x = 0, \\ w(x, 0) = w_0 = \begin{cases} w_-, & x < 0, \\ w_+, & x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (13)$$

其中 $w_- < w_+$, 则(13)的解为

$$w^R\left(\frac{x}{t}\right) = \begin{cases} w_-, & x \leq w_-t, \\ \frac{x}{t}, & w_-t < x < w_+t, \\ w_+, & x \geq w_+t. \end{cases} \quad (14)$$

若初始数据光滑且递增, 那么 Burgers 方程的解也是光滑的。我们参考 Matsumura 和 Nishihara [16]中引入的构造, 其中初始数据的空间导数与参数 $\varepsilon > 0$ 成正比。因此, $w^R\left(\frac{x}{t}\right)$ 可以由光滑函数 $\bar{w}(x, t)$ 近似

$$\begin{cases} \bar{w}_t + \bar{w}\bar{w}_x = 0, \\ \bar{w}(x, 0) = \bar{w}_0(x) = \frac{1}{2}(w_+ + w_-) + \frac{1}{2}(w_+ - w_-) \tanh(\varepsilon x). \end{cases} \quad (15)$$

其中参数 $\varepsilon > 0$ 。

引理 1.1 设 $\delta = w_+ - w_-$ 为 1-稀疏波的波强, 则问题(15)有一个唯一光滑解 $\bar{w}(x, t)$ 它有以下性质:

- (i) $w_- < \bar{w}(x, t) < w_+, \bar{w}_x > 0$, 其中 $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ 。
- (ii) 对于任意的 $1 \leq p \leq +\infty$, 存在一个常数 C_p , 使得对于 $t > 0$,

$$\|\bar{w}_x\|_{L^p} \leq C_p \min \left\{ \delta \varepsilon^{1-\frac{1}{p}}, \delta^{\frac{1}{p}} t^{-1+\frac{1}{p}} \right\}, \quad (16)$$

$$\|\bar{w}_{xx}\|_{L^p} \leq C_p \min \left\{ \delta \varepsilon^{2-\frac{1}{p}}, \varepsilon^{\frac{1}{p}} t^{-1} \right\}, \quad (17)$$

$$\|\bar{w}_{xxx}\|_{L^p} \leq C_p \min \left\{ \delta \varepsilon^{3-\frac{1}{p}}, \varepsilon^{\frac{2}{p}} t^{-1} \right\}. \quad (18)$$

(iii) $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \bar{w}(x, t) - w^R\left(\frac{x}{t}\right) \right| = 0$.

注 1: $L^p (p \geq 1)$ 为 L^p 空间, 其范数表示为 $\|\cdot\|_{L^p}$ 。

现在构造光滑近似解 $(v^r, u^r)(x, t)$

$$\begin{cases} \lambda_1(v^r, u^r) = \bar{w}(x, 1+t), \lambda_1(v_{\pm}, u_{\pm}) = w_{\pm}, \\ u^r = u_- + \int_{v_-}^{v^r} \sqrt{-P'(\eta)} d\eta. \end{cases} \quad (19)$$

其中 $(v^r, u^r)(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} v_t^r - u_x^r = 0, \\ u_t^r + P(v^r)_x = 0. \end{cases} \quad (20)$$

通过引理 1.1, 我们可以得到有关 $(v^r, u^r)(x, t)$ 的性质。

引理 1.2 设 $\delta = |v_+ - v_-| + |u_+ - u_-|$ 为 1-稀疏波的波强, 由(19)给出的光滑近似解 $(v^r, u^r)(x, t)$ 有以下性质:

- (i) $u_x^r > 0$, 其中 $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ 。
- (ii) 对于任意的 $1 \leq p \leq +\infty$, 存在一个常数 C_p , 使得对于 $t > 0$,

$$\| [v^r, u^r]_x \|_{L^p} \leq C_p \min \left\{ \delta \varepsilon^{1-\frac{1}{p}}, \delta^{\frac{1}{p}} (1+t)^{-1+\frac{1}{p}} \right\}, \tag{21}$$

$$\| [v^r, u^r]_{xx} \|_{L^p} \leq C_p \min \left\{ \delta \varepsilon^{2-\frac{1}{p}}, \varepsilon^{1-\frac{1}{p}} (1+t)^{-1} \right\}, \tag{22}$$

$$\| [v^r, u^r]_{xxx} \|_{L^p} \leq C_p \min \left\{ \delta \varepsilon^{3-\frac{1}{p}}, \varepsilon^{2-\frac{1}{p}} (1+t)^{-1} \right\}. \tag{23}$$

$$(iii) \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| [v^r, u^r](x, t) - \left[v^R, u^R \right] \left(\frac{x}{t} \right) \right| = 0.$$

我们定义参数 ε 的范围:

$$0 < \varepsilon < \min \left\{ 1, \frac{C_1^{10}}{\delta^2}, \frac{C_1^{10}}{\delta^6}, \frac{C_1^{\frac{10}{9}} C_1^{\frac{5}{3}}}{\delta^{\frac{10}{9}} \delta^2}, \frac{C_1^5}{\delta^3}, \frac{C_1^{\frac{10}{7}}}{\delta^{\frac{16}{7}}}, \frac{C_1^{\frac{5}{2}}}{\delta^{\frac{5}{2}}}, \frac{C_1^{\frac{10}{11}}}{\delta^2} \right\}. \tag{24}$$

考虑相场变量 χ 在无穷远处趋于 ± 1 的情况。则 v^r, u^r 以及 $\chi^2 = 1$ 是当 $t \rightarrow +\infty$ 时可能的渐进状态, 构造的背景解为 $[v^r, u^r, \pm 1]$ 。

3. 主要定理的证明

下面给出本文的主要定理:

定理 1 设 (v_{\pm}, u_{\pm}) 满足 $u_+ = u_- + \int_{v_-}^{v_+} \sqrt{-P'(\eta)} d\eta$, χ_{\pm} 满足 $\chi^2 = 1$, 若存在常数 $\varepsilon_0 > 0$, $C_0 > 0$ 使得

$$C_0 \left(\left\| [v_0(x) - v^r(x, 0), u_0(x) - u^r(x, 0), \chi_{0x}] \right\|_{H^1}^2 + \left\| \chi_0^2 - 1 \right\|_{L^2}^2 + \varepsilon^{\frac{1}{10}} \right) \leq \frac{1}{4} \varepsilon_0^2, \tag{25}$$

成立, 则柯西问题(1)-(4)存在唯一全局解 (v, u, χ) , 满足

$$\sup_{t \geq 0} \left(\left\| v - v^r, u - u^r, \chi_x \right\|_{H^1} + \left\| \chi^2 - 1 \right\|_{L^2} \right) \leq \varepsilon_0. \tag{26}$$

且解 (v, u, χ) 的渐近行为如下

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| [v, u, \chi^2](x, t) - \left[v^R \left(\frac{x}{t} \right), u^R \left(\frac{x}{t} \right), 1 \right] \right| = 0. \tag{27}$$

注 2: H^k ($k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$) 表示 Sobolev 空间, 其范数表示为 $\| \cdot \|_{H^k}$, 定义 $L^2 = H^0$ 。

3.1. 先验估计

定义:

$$\varphi = v - v^r, \quad \psi = u - u^r. \tag{28}$$

根据(1)式与(20)式, 可得(1)式的扰动方程组为

$$\begin{cases} \varphi_t - \psi_x = 0, \\ \psi_t + [P(v) - P(v^r)]_x = \lambda \left(\frac{(\psi + u^r)_x}{v} \right)_x - \left(\frac{\chi_x^2}{2v^2} \right)_x, \\ \chi_t = -v\mu, \\ \mu = \chi^3 - \chi - \left(\frac{\chi_x}{v} \right)_x. \end{cases} \quad (29)$$

初始数据为

$$(\varphi, \psi, \chi)(x, 0) = (\varphi_0, \psi_0, \chi_0) = (v_0 - v^r(x, 0), u_0 - u^r(x, 0), \chi_0), \quad x \in R. \quad (30)$$

定义解空间 $X(0, T)$:

$$\begin{aligned} X(0, T) := & \{[\varphi, \psi] \in C([0, T]; H^1), \chi^2 - 1 \in C([0, T]; H^2), \\ & \varphi_x \in L^2([0, T]; L^2), \psi_x \in L^2([0, T]; H^1), \\ & \chi_x \in L^2([0, T]; H^2), \forall (x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, T]\}. \end{aligned} \quad (31)$$

柯西问题(29), (30)解的局部存在性可以通过不动点法证明。为简洁起见, 在此省略。在局部解的存在唯一性的基础上, 通过以下先验估计来证明定理 1。

命题 1 假设定理 1 中的条件都成立, 设 (φ, ψ, χ) 为柯西问题(29), (30)在 $T > 0$ 时的解, 若

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (\|[\varphi, \psi, \chi_x](t)\|_{H^1} + \|\chi^2(t) - 1\|_{L^2}) \leq \varepsilon_0, \quad (32)$$

则

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} (\|[\varphi, \psi, \chi_x]\|_{H^1}^2 + \|\chi^2 - 1\|_{L^2}^2) + \int_0^T (\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{H^1}^2 + \|\chi_x\|_{H^2}^2) dt + \int_0^T \|\sqrt{u_x^r} [\varphi, \psi, \chi_x, \varphi_x]\|_{L^2}^2 dt \\ & \leq C \|[\varphi_0, \psi_0, \chi_{0x}]\|_{H^1}^2 + C \|\chi_0^2 - 1\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0^{\frac{1}{10}}, \end{aligned} \quad (33)$$

其中 C 与 T 无关, 由 Sobolev 不等式, 可得

$$\|[\varphi, \psi]\|_{L^\infty} \leq \sqrt{2} \|[\varphi, \psi]\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|[\varphi_x, \psi_x]\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \leq C\varepsilon_0, \quad (34)$$

以及

$$\|\chi_x\|_{L^\infty} \leq \sqrt{2} \|\chi_x\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\chi_{xx}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \leq C\varepsilon_0. \quad (35)$$

通过以下引理来证明命题 1。

引理 1 假设命题一的条件成立, 则存在正常数 C 与 T 无关, 对 $t \in [0, T]$ 有:

$$\begin{aligned} & \|[\varphi, \psi, \chi^2 - 1, \chi_x]\|_{L^2}^2 + \int_0^t (\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\mu\|_{L^2}^2 + \|\chi_x\|_{L^2}^2) d\tau + \int_0^t \|\sqrt{u_x^r} \varphi\|_{L^2}^2 d\tau \\ & \leq C \|[\varphi_0, \psi_0, \chi_0^2 - 1, \chi_{0x}]\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0^{\frac{1}{10}}. \end{aligned} \quad (36)$$

证明: (29)₁ 式乘以 $[P(v^r) - P(v)]$ 加上(29)₂ 式乘以 ψ 可得

$$\begin{aligned} & \left(\Phi(v, v^r) + \frac{\psi^2}{2} \right)_t + v^r_t [P(v) - P(v^r) - P'(v^r)\varphi] + \lambda \frac{\psi_x^2}{v} \\ &= \left[\lambda \psi \left(\frac{u_x}{v} - \frac{u_x^r}{v^r} \right) - \frac{\chi_x^2 \psi}{2v^2} - [P(v) - P(v^r)] \psi \right]_x - \lambda \psi_x u_x^r \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v^r} \right) + \lambda \psi \left(\frac{u_x^r}{v^r} \right)_x + \frac{\chi_x^2 \psi_x}{2v^2}, \end{aligned} \tag{37}$$

其中

$$\Phi(v, v^r) = P(v^r)\varphi - \int_{v^r}^v P(s) ds. \tag{38}$$

根据(6)式易得 $\Phi(v, v^r)$ 与 φ^2 等价, 即存在正常数 m, M , 使得

$$m\varphi^2 \leq \Phi(v, v^r) \leq M\varphi^2. \tag{39}$$

(29)₃ 式乘以 μ , 利用(29)₄ 式, 可得

$$\left(\frac{\chi_x^2}{2v} + \frac{(\chi^2 - 1)^2}{4} \right)_t + \frac{\chi_x^2 u_x^r}{2v^2} + \frac{\chi_x^2 \psi_x}{2v^2} + v\mu^2 = \left(\frac{\chi_t \chi_x}{v} \right)_x, \tag{40}$$

将(37)式与(40)式相加, 并对 x 在 R 上求积分, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \left(\Phi(v, v^r) + \frac{\psi^2}{2} + \frac{\chi_x^2}{2v} + \frac{(\chi^2 - 1)^2}{4} \right) dx + \int_{\mathbb{R}} \left(u_x^r [P(v) - P(v^r) - P'(v^r)\varphi] + \frac{\lambda \psi_x^2}{v} + \frac{\chi_x^2 u_x^r}{2v^2} + v\mu^2 \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda \psi_x u_x^r \left(\frac{1}{v^r} - \frac{1}{v} \right) dx + \int_{\mathbb{R}} \lambda \psi \left(\frac{u_x^r}{v^r} \right)_x dx \\ &= \sum_{i=1}^2 I_i, \end{aligned} \tag{41}$$

根据 Hölder 不等式、Young 不等式、(24)式、(34)式以及引理 1.2, 可得以下估计:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}} \lambda \psi_x u_x^r \frac{\varphi}{v^r v} dx \\ &\leq C \|u_x^r\|_{L^\infty} \|\psi_x\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \\ &\leq C \delta^{\frac{1}{5}} \varepsilon^{\frac{1}{5}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\psi_x\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \\ &\leq C \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\psi_x\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \\ &\leq C \varepsilon^{\frac{1}{10}} \|\psi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}}, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}} \lambda \psi \frac{u_{xx}^r}{v^r} dx - \int_{\mathbb{R}} \lambda \psi \frac{v_x^r u_x^r}{(v^r)^2} dx \\ &\leq C \|\psi\|_{L^\infty} \|u_{xx}^r\|_{L^1} + C \|\psi\|_{L^\infty} \|v_x^r\|_{L^2} \|u_x^r\|_{L^2} \\ &\leq C \|\psi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\psi_x\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{1}{5}} \varepsilon^{\frac{1}{5}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} + C \|\psi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\psi_x\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{3}{5}} \varepsilon^{\frac{1}{5}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \\ &\leq C \varepsilon_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{10}} \|\psi_x\|_{L^2}^2 (1+t)^{-\frac{4}{5}} \\ &\leq C \varepsilon_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{10}} \|\psi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{16}{15}}. \end{aligned}$$

将以上 $I_i (1 \leq i \leq 2)$ 的估计代入(41), 并对 t 在 $[0, T]$ 上求积分, 并应用(34), (35)与(39)可得

$$\|[\varphi, \psi, \chi^2 - 1, \chi_x]\|_{L^2}^2 + \int_0^t (\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \|\mu\|_{L^2}^2 + \|\chi_x\|_{L^2}^2) d\tau + \int_0^t \|\sqrt{u_x} \varphi\|_{L^2}^2 d\tau \leq C \|[\varphi_0, \psi_0, \chi_0^2 - 1, \chi_{0x}]\|_{L^2}^2 + C\varepsilon^{\frac{1}{10}}.$$

因为

$$C \geq \int_{\mathbb{R}} (\chi^2 - 1)^2 dx \geq \int_N^{N+1} (\chi^2 - 1)^2 dx = (\chi^2(x_N(t), t) - 1)^2,$$

其中

$$x_N(t) \in [N, N+1],$$

可得

$$|\chi(x_N(t), t)| \leq C.$$

又因为

$$|\chi(x, t)| = \left| \int_{x_{N+1}}^x \chi_x dx + \chi(x_N(t), t) \right| \leq C \left(\int \chi_x^2 dx + 1 \right) \leq C,$$

所以

$$\|\chi\|_{L^\infty} \leq C.$$

根据(32)式可得

$$(\chi^2 - 1)^2 \leq 4 \int (\chi^2 - 1) \chi \chi_x \leq C \|\chi^2 - 1\|_{L^2} \|\chi_x\|_{L^2} \leq C\varepsilon_0^2,$$

由此可得

$$1 - C\varepsilon_0 \leq \chi^2,$$

即可证得

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} |\chi(x, t)| \geq C^{-1} > 0. \quad (42)$$

引理 2 假设命题一的条件成立, 则存在正常数 C , 对 $t \in [0, T]$ 有:

$$\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\varphi_x\|_{L^2}^2 d\tau \leq C \|[\varphi_0, \psi_0, \chi_0^2 - 1, \chi_{0x}]\|_{L^2}^2 + C \|[\varphi_0, \chi_0]\|_{H^1}^2 + C\varepsilon_0 \int_0^t \|\chi_{xx}\|_{L^2}^2 d\tau + C\varepsilon^{\frac{1}{10}}. \quad (43)$$

证明: 利用(29)₂, 可得

$$\left(\frac{\lambda \varphi_x}{v} - \psi \right)_t - P'(v) \varphi_x = [P'(v) - P'(v^r)] v_x^r - \left(\frac{\lambda v_x^r}{v} \right)_t + \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_x^2}{v^2} \right)_x, \quad (44)$$

将(44)式乘以 $\frac{\varphi_x}{v}$ 并对 x 在 \mathbb{R} 上求积分, 可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda \varphi_x^2}{2v^2} dx + \int_{\mathbb{R}} \left(-P'(v) \frac{\varphi_x^2}{v} \right) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_x}{v} \psi dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi}{v} \psi_{xx} dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi}{v^2} u_x \varphi_x dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_x}{v} [P'(v) - P'(v^r)] v_x^r dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \lambda \frac{\varphi_x}{v^2} u_{xx}^r dx + \int_{\mathbb{R}} \lambda \frac{\varphi_x}{v^3} v_x^r u_x dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_x}{v^3} \chi_x \chi_{xx} dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_x}{v^4} v_x \chi_x^2 dx \\ &= \sum_{i=1}^8 I_i. \end{aligned} \quad (45)$$

对 $I_i (1 \leq i \leq 8)$ 进行估计, 将 I_1 关于 t 求积分后由 Hölder 不等式、Young 不等式可得以下估计:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_x}{v} \psi \, dx \leq C \|\varphi_x\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} \leq C \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C \|\psi\|_{L^2}^2,$$

由 Hölder 不等式、Young 不等式、(24)式、(34)式以及引理 1.2 可得以下估计:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{v^2} \psi_x (\psi_x v - \psi v_x) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi_x^2}{v} \, dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi \psi_x v_x}{v^2} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi_x^2}{v} \, dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi \varphi_x \psi_x}{v^2} \, dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi v_x^r \psi_x}{v^2} \, dx \\ &\leq C \|\psi_x\|_{L^2}^2 + C \|\psi\|_{L^\infty} \|\varphi_x\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^2} + C \|\psi\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^2} \|v_x^r\|_{L^\infty} \\ &\leq C \|\psi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \|\psi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C \delta^{\frac{1}{5}} \varepsilon^{\frac{1}{5}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\psi\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^2} \\ &\leq C \|\psi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \|\psi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon^{\frac{1}{10}} \|\psi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}} \\ &\leq \left(C + C \varepsilon_0 + C \varepsilon^{\frac{1}{10}} \right) \|\psi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}}, \end{aligned}$$

由(34)式以及引理 1.2, 可得:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi}{v^2} (\psi_x + u_x^r) \varphi_x \, dx \\ &\leq C \|\psi\|_{L^\infty} \|\psi_x\|_{L^2} \|\varphi_x\|_{L^2} + C \|\psi\|_{L^2} \|u_x^r\|_{L^\infty} \|\varphi_x\|_{L^2} \\ &\leq C \varepsilon_0 \|\psi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C \delta^{\frac{1}{5}} \varepsilon^{\frac{1}{5}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\psi\|_{L^2} \|\varphi_x\|_{L^2} \\ &\leq C \varepsilon_0 \|\psi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}} \\ &\leq C \varepsilon_0 \|\psi_x\|_{L^2}^2 + \left(C \varepsilon_0 + C \varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \right) \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}}, \end{aligned}$$

由(24)式、(34)式以及引理 1.2, 可得:

$$\begin{aligned} I_4 &\leq C \|\varphi_x\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \|v_x^r\|_{L^\infty} \\ &\leq C \delta^{\frac{1}{5}} \varepsilon^{\frac{1}{5}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\varphi\|_{L^2} \|\varphi_x\|_{L^2} \\ &\leq C \varepsilon^{\frac{1}{10}} \varepsilon_0 \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon^{\frac{1}{10}} \varepsilon_0 (1+t)^{-\frac{8}{5}}, \end{aligned}$$

由引理 1.2, 可得:

$$\begin{aligned} I_5 &\leq C \|\varphi_x\|_{L^2} \|u_{xx}^r\|_{L^2} \\ &\leq C \delta^{\frac{3}{5}} \varepsilon^{\frac{3}{5}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\varphi_x\|_{L^2} \\ &\leq C \varepsilon^{\frac{1}{10}} \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}}, \end{aligned}$$

由光滑稀疏波的衰减性质(21)~(23), 可得

$$\begin{aligned}
I_6 &\leq \int_{\mathbb{R}} \lambda \frac{\varphi_x}{v^3} v_x^r \psi_x \, dx + \int_{\mathbb{R}} \lambda \frac{\varphi_x}{v^3} u_x^r v_x^r \, dx \\
&\leq C \|\psi_x^r\|_{L^\infty} \|\varphi_x\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^2} + C \|\varphi_x\|_{L^2} \|u_x^r\|_{L^2} \|\psi_x^r\|_{L^\infty} \\
&\leq C \delta \varepsilon \left(\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2 \right) + C \delta^{\frac{6}{5}} \varepsilon^{\frac{7}{10}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\varphi_x\|_{L^2} \\
&\leq C \varepsilon^{\frac{1}{10}} \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon^{\frac{1}{10}} \|\psi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}},
\end{aligned}$$

由 Sobolev 不等式, 可得

$$I_7 \leq C \|\chi_x\|_{L^\infty} \|\varphi_x\|_{L^2} \|\chi_{xx}\|_{L^2} \leq C \left(\|\chi_x\|_{L^2} + \|\chi_{xx}\|_{L^2} \right) \|\varphi_x\|_{L^2} \|\chi_{xx}\|_{L^2} \leq C \varepsilon_0 \|\chi_{xx}\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \|\varphi_x\|_{L^2}^2,$$

以及

$$\begin{aligned}
I_8 &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_x^2}{v^4} \chi_x^2 \, dx + \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_x}{v^4} v_x^r \chi_x^2 \, dx \right| \\
&\leq C \|\chi_x\|_{L^\infty}^2 \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C \|\psi_x^r\|_{L^\infty} \|\chi_x\|_{L^\infty} \|\chi_x\|_{L^2} \|\varphi_x\|_{L^2} \\
&\leq C \varepsilon_0^2 \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0^2 \delta^{\frac{1}{5}} \varepsilon^{\frac{1}{5}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\varphi_x\|_{L^2} \\
&\leq C \varepsilon_0^2 \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0^2 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0^2 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}} \\
&\leq \left(C \varepsilon_0^2 + C \varepsilon_0^2 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \right) \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0^2 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}}.
\end{aligned}$$

将以上对 I_i ($2 \leq i \leq 8$) 的估计代入(45), 并对 t 在 $[0, T]$ 上积分后加上对 I_1 的估计, 利用(36)式, 即可得(43), 完成引理 2 的证明.

引理 3 假设命题一中条件成立, 则存在正常数 C , 对 $t \in [0, T]$ 有:

$$\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 \, d\tau \leq C \left[\|\varphi_0, \psi_0, \chi_0^2 - 1, \chi_{0x}\|_{L^2}^2 \right] + C \left[\|\varphi_0, \psi_0, \chi_0\|_{H^1}^2 \right] + C \varepsilon_0 \int_0^t \|\chi_{xx}\|_{L^2}^2 \, d\tau + C \varepsilon^{\frac{1}{10}}. \quad (46)$$

证明: 将(29)₂式对 x 求导并乘以 ψ_x , 对 x 在 R 上积分, 可得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi_x^2}{2} \, dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda}{v} \psi_{xx}^2 \, dx &= \int_{\mathbb{R}} \psi_{xx} \left\{ P'(v) \varphi_x + [P'(v) - P'(v^r)] v_x^r - \frac{\lambda}{v} u_{xx}^r \right\} \, dx + \lambda \int_{\mathbb{R}} \psi_{xx} \frac{v_x^r u_x^r}{v^2} \, dx \\
&\quad + \lambda \int_{\mathbb{R}} \psi_{xx} \frac{\varphi_x \psi_x + v_x^r \psi_x + \varphi_x u_x^r}{v^2} \, dx + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\chi_x \chi_{xx}}{v^2} - \frac{\chi_x^2 v_x}{v^3} \right) \psi_{xx} \, dx \\
&= \sum_{i=1}^4 I_i,
\end{aligned} \quad (47)$$

对 I_i ($1 \leq i \leq 4$) 进行估计, 根据 Hölder 不等式、Young 不等式、(24)式、(34)式以及引理 1.2, 可得:

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C \|\psi_{xx}\|_{L^2} \|\varphi_x\|_{L^2} + C \|\psi_{xx}\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \|\psi_x^r\|_{L^\infty} + C \|\psi_{xx}\|_{L^2} \|u_{xx}^r\|_{L^2} \\
&\leq C \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2v} \|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \delta^{\frac{1}{5}} \varepsilon^{\frac{1}{5}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\psi_{xx}\|_{L^2} + C \delta^{\frac{3}{5}} \varepsilon^{\frac{3}{10}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\psi_{xx}\|_{L^2} \\
&\leq C \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2v} \|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}} + C \varepsilon^{\frac{1}{10}} \|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 + C \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}} \\
&\leq \left(\frac{\lambda}{2v} + C \varepsilon^{\frac{1}{10}} + C \varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \right) \|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 + (C + C \varepsilon_0) \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}} + C \|\varphi_x\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

由(24)式以及引理 1.2 可得:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C \|\psi_{xx}\|_{L^2} \|\nu_x^r\|_{L^2} \|u_x^r\|_{L^\infty} \\ &\leq C \|\psi_{xx}\|_{L^2} \delta \varepsilon^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{1}{5}} \varepsilon^{\frac{1}{5}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \\ &\leq C \delta^{\frac{6}{5}} \varepsilon^{\frac{7}{10}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\psi_{xx}\|_{L^2} \\ &\leq C \varepsilon^{\frac{1}{10}} \|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 + C \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}}, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} I_3 &\leq C \|\psi_x\|_{L^\infty} \|\psi_{xx}\|_{L^2} \|\varphi_x\|_{L^2} + C \|\nu_x^r\|_{L^\infty} \|\psi_{xx}\|_{L^2} \|\varphi_x\|_{L^2} + C \|u_x^r\|_{L^\infty} \|\psi_{xx}\|_{L^2} \|\varphi_x\|_{L^2} \\ &\leq C (\|\psi_x\|_{L^2} + \|\psi_{xx}\|_{L^2}) \|\psi_{xx}\|_{L^2} \|\varphi_x\|_{L^2} + C \delta^{\frac{1}{5}} \varepsilon^{\frac{1}{5}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\psi_{xx}\|_{L^2} \|\varphi_x\|_{L^2} \\ &\leq (C + C\varepsilon_0) \|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 + (C + C\varepsilon_0) \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (\|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 + \|\varphi_x\|_{L^2}^2) + C\varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}} \\ &\leq \left(C + C\varepsilon_0 + C\varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \right) \|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 + \left(C + C\varepsilon_0 + C\varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \right) \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}}, \end{aligned}$$

由 Sobolev 不等式, 可得

$$\begin{aligned} I_4 &\leq C \|\psi_{xx}\|_{L^2} \|\chi_x\|_{L^\infty} \|\chi_{xx}\|_{L^2} + C \|\psi_{xx}\|_{L^2} \|\varphi_x\|_{L^2} \|\chi_x\|_{L^\infty}^2 + C \|\psi_{xx}\|_{L^2} \|\nu_x^r\|_{L^\infty} \|\chi_x\|_{L^2} \|\chi_x\|_{L^\infty} \\ &\leq C\varepsilon_0 \|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\chi_{xx}\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0^2 \|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0^2 \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C\delta^{\frac{1}{5}} \varepsilon^{\frac{1}{5}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\psi_{xx}\|_{L^2} \|\chi_x\|_{L^2} \|\chi_x\|_{L^\infty} \\ &\leq \left(C\varepsilon_0 + C\varepsilon_0^2 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \right) \|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\chi_{xx}\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0^2 \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0^2 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}}, \end{aligned}$$

将对 $I_i (1 \leq i \leq 4)$ 的估计代入(47), 并对 t 在 $[0, T]$ 上求积分, 并应用(36)与(43)式即可得到(46), 完成引理 3 的证明。

引理 4 假设命题一中条件成立, 则存在正常数 C , 对 $t \in [0, T]$ 有

$$\|\chi_x\|_{L^2}^2 + \int_0^t (\|\chi_x\|_{L^2}^2 + \|\chi_{xx}\|_{L^2}^2) d\tau \leq C \|\llbracket \varphi_0, \psi_0, \chi_0^2 - 1, \chi_{0x} \rrbracket\|_{L^2}^2 + C\varepsilon^{\frac{1}{10}}. \tag{48}$$

证明: 联立(29)₃式与(29)₄式, 可得

$$\chi_t - \chi_{xx} = v(1 - \chi^2)\chi - \frac{v_x \chi_x}{v}, \tag{49}$$

将(49)式乘以 $-\chi_{xx}$, 对 x 在 R 上积分, 可得

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_x^2}{2} dx + \int_{\mathbb{R}} (2v\chi^2\chi_x^2 + \chi_{xx}^2) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} v(1 - \chi^2)\chi_x^2 dx + \int_{\mathbb{R}} v_x(1 - \chi^2)\chi\chi_x dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x\chi_x\chi_{xx}}{v} dx \\ &= \sum_{i=1}^3 I_i, \end{aligned} \tag{50}$$

根据(42)式可得

$$\int_{\mathbb{R}} (2v\chi^2\chi_x^2) dx \geq C \int_{\mathbb{R}} \chi_x^2 dx \tag{51}$$

对 $I_i (1 \leq i \leq 3)$ 进行估计, 根据 Sobolev 不等式、Young 不等式、(34)式, 可得:

$$I_1 \leq C \|\chi^2 - 1\|_{L^2} \|\chi_x\|_{L^2} \|\chi_x\|_{L^\infty} \leq C \varepsilon_0 \|\chi_x\|_{L^2} (\|\chi_x\|_{L^2} + \|\chi_{xx}\|_{L^2}) \leq C \varepsilon_0 \|\chi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \|\chi_{xx}\|_{L^2}^2,$$

由(24)式、(34)式以及引理 1.2, 可得:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_x (1 - \chi^2) \chi \chi_x \, dx + \int_{\mathbb{R}} v_x^r (1 - \chi^2) \chi \chi_x \, dx \\ &\leq C \|\varphi_x\|_{L^2} \|\chi^2 - 1\|_{L^2} \|\chi\|_{L^\infty} \|\chi_x\|_{L^\infty} + C \|v_x^r\|_{L^\infty} \|\chi^2 - 1\|_{L^2} \|\chi\|_{L^\infty} \|\chi_x\|_{L^2} \\ &\leq C \varepsilon_0 \|\varphi_x\|_{L^2} (\|\chi_x\|_{L^2} + \|\chi_{xx}\|_{L^2}) + C \varepsilon_0 \delta^{\frac{1}{5}} \varepsilon^{\frac{1}{5}} (1+t)^{\frac{4}{5}} \|\chi_x\|_{L^2} \\ &\leq C \varepsilon_0 \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \left(C \varepsilon_0 + C \varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \right) \|\chi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \|\chi_{xx}\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{\frac{8}{5}}, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_x \chi_x \chi_{xx}}{v} \, dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x^r \chi_x \chi_{xx}}{v} \, dx \\ &\leq C \|\varphi_x\|_{L^2} \|\chi_x\|_{L^\infty} \|\chi_{xx}\|_{L^2} + C \|v_x^r\|_{L^\infty} \|\chi_x\|_{L^2} \|\chi_{xx}\|_{L^2} \\ &\leq C \varepsilon_0 \|\varphi_x\|_{L^2} \|\chi_{xx}\|_{L^2} + C \varepsilon_0 \delta^{\frac{1}{5}} \varepsilon^{\frac{1}{5}} (1+t)^{\frac{4}{5}} \|\chi_{xx}\|_{L^2} \\ &\leq C \varepsilon_0 \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \|\chi_{xx}\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \|\chi_{xx}\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{\frac{8}{5}} \\ &\leq C \varepsilon_0 \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \left(C \varepsilon_0 + C \varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \right) \|\chi_{xx}\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{\frac{8}{5}}. \end{aligned}$$

将 $I_i (1 \leq i \leq 3)$ 以及(51)式的估计代入(48)式, 对 t 在 $[0, T]$ 上积分, 并应用(36)式, (43)式与(46)式, 即可得(48)式, 完成引理 4 的证明。

引理 5 假设命题一中条件成立, 则存在正常数 C , 对 $t \in [0, T]$ 有:

$$\|\chi_{xx}\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\chi_{xt}\|_{L^2}^2 \, d\tau \leq C \left(\|\chi_0\|_{H^2}^2 + \|[\varphi_0, \psi_0]\|_{H^1}^2 \right) + C \varepsilon^{\frac{1}{10}}. \quad (52)$$

证明: (49)式乘以 $-\chi_{xxt}$, 对 x 在 R 上积分, 可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\chi_{xx}^2}{2} - \frac{v_x \chi_{xx} \chi_x}{v} \right) dx + \int_{\mathbb{R}} \chi_{xt}^2 \, dx &= \int_{\mathbb{R}} v_x (1 - \chi^2) \chi \chi_{xt} \, dx + \int_{\mathbb{R}} v (1 - 3\chi^2) \chi_x \chi_{xt} \, dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x \chi_{xx} \chi_{xt}}{v} \, dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x u_x \chi_{xx} \chi_x}{v^2} \, dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{u_{xx} \chi_x \chi_{xx}}{v} \, dx \\ &= \sum_{i=1}^5 I_i, \end{aligned} \quad (53)$$

对 $I_i (1 \leq i \leq 5)$ 进行估计, 根据 Hölder 不等式、Young 不等式、(24)式、(34)式以及引理 1.2, 可得:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_x (1 - \chi^2) \chi \chi_{xt} \, dx + \int_{\mathbb{R}} v_x^r (1 - \chi^2) \chi \chi_{xt} \, dx \\ &\leq C \|\chi\|_{L^\infty} \|\varphi_x\|_{L^2} \|\chi_{xt}\|_{L^2} + C \|v_x^r\|_{L^\infty} \|\chi\|_{L^2} \|\chi_{xt}\|_{L^2} \\ &\leq C \varepsilon_0 \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \|\chi_{xt}\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \delta^{\frac{1}{5}} \varepsilon^{\frac{1}{5}} (1+t)^{\frac{4}{5}} \|\chi_{xt}\|_{L^2} \\ &\leq C \varepsilon_0 \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \|\chi_{xt}\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \|\chi_{xt}\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{\frac{8}{5}} \\ &\leq C \varepsilon_0 \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \left(C \varepsilon_0 + C \varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \right) \|\chi_{xt}\|_{L^2}^2 + C \varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{\frac{8}{5}}, \end{aligned}$$

由(34)式以及引理 1.2, 可得:

$$I_2 \leq C \|\chi\|_{L^\infty} \|\chi_x\|_{L^2} \|\chi_{xt}\|_{L^2} \leq C\varepsilon_0 \|\chi_x\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\chi_{xt}\|_{L^2}^2,$$

分部积分可得下式:

$$\begin{aligned} I_3 &= -\int_{\mathbb{R}} v_x \left(\frac{\chi_x}{v} \right)_x \chi_{xt} dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x^2}{v^2} \chi_x \chi_{xt} dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} v_x \left(\frac{\chi_{xx}}{v} - \frac{v_x \chi_x}{v^2} \right) \chi_{xt} dx - \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x^2}{2v^2} \chi_x^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x}{v^2} u_{xx} \chi_x^2 dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x^2}{v^3} u_x \chi_x^2 dx \\ &= -\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \frac{v_x^2}{2v^2} \chi_x^2 dx + \sum_{j=1}^3 I_{20}^j, \end{aligned}$$

由 Hölder 不等式、Young 不等式、(24)式、(34)式以及引理 1.2, 可得:

$$\begin{aligned} I_3^1 &= -\int_{\mathbb{R}} v_x \left(\frac{\chi_{xx}}{v} - \frac{v_x \chi_x}{v^2} \right) \chi_{xt} dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} v_x \left(\frac{\chi_t}{v} + (\chi^2 - 1) \chi \right) \chi_{xt} dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} (v_x^r + \varphi_x) \left(\frac{\chi_t}{v} + (\chi^2 - 1) \chi \right) \chi_{xt} dx \\ &\leq C \|\varphi_x\|_{L^2} \left(\|\chi_t\|_{L^\infty} + \|\chi^2 - 1\|_{L^\infty} \right) \|\chi_{xt}\|_{L^2} + C \delta^{\frac{1}{5}} \varepsilon^{\frac{1}{5}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\chi_{xt}\|_{L^2} \left(\|\chi_t\|_{L^2} + \|\chi^2 - 1\|_{L^2} \right) \\ &\leq \left(C\varepsilon_0 + C\varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \right) \|\chi_{xt}\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \left(C + C\varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \right) \|\mu\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}}, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} I_3^2 &\leq C \|\chi_x\|_{L^\infty}^2 \left(\|u_{xx}^r\|_{L^2} \|v_x^r\|_{L^2} + \|\varphi_x\|_{L^2} \|u_{xx}^r\|_{L^2} + \|\varphi_x\|_{L^2} \|\psi_{xx}\|_{L^2} + \|v_x^r\|_{L^2} \|\psi_{xx}\|_{L^2} \right) \\ &\leq C\varepsilon_0 \left(\delta^{\frac{8}{5}} \varepsilon^{\frac{4}{5}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} + \delta^{\frac{3}{5}} \varepsilon^{\frac{3}{10}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\varphi_x\|_{L^2} + \|\varphi_x\|_{L^2} \|\psi_{xx}\|_{L^2} + \delta \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\psi_{xx}\|_{L^2} \right) \\ &\leq C\varepsilon_0 \left(\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 \right) + C\varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}} + C\varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 \\ &\leq \left(C\varepsilon_0 + C\varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \right) \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \left(C\varepsilon_0 + C\varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \right) \|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}}, \end{aligned}$$

由(24)式、(34)式以及引理 1.2, 可得:

$$\begin{aligned} I_3^3 &\leq C \|\chi_x\|_{L^\infty}^2 \left(\|u_x^r\|_{L^\infty} \|v_x^r\|_{L^2}^2 + \|u_x^r\|_{L^\infty} \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^\infty} \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2} \|v_x^r\|_{L^2} \|v_x^r\|_{L^\infty} \right. \\ &\quad \left. + \|\psi_x\|_{L^2} \|\varphi_x\|_{L^2} \|v_x^r\|_{L^\infty} + \|u_x^r\|_{L^2} \|\varphi_x\|_{L^2} \|v_x^r\|_{L^\infty} \right) \\ &\leq C\varepsilon_0 \left(\delta^{\frac{11}{5}} \varepsilon^{\frac{6}{5}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} + \delta^{\frac{6}{5}} \varepsilon^{\frac{6}{5}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + (\|\psi_x\|_{L^2} + \|\psi_{xx}\|_{L^2}) \|\varphi_x\|_{L^2}^2 \right. \\ &\quad \left. + \delta^{\frac{6}{5}} \varepsilon^{\frac{7}{10}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\psi_x\|_{L^2} + \delta^{\frac{1}{5}} \varepsilon^{\frac{1}{5}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\psi_x\|_{L^2} \|\varphi_x\|_{L^2} + \delta^{\frac{6}{5}} \varepsilon^{\frac{7}{10}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\varphi_x\|_{L^2}^2 \right) \\ &\leq \left(C\varepsilon_0 + C\varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \right) \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 + \left(C\varepsilon_0 + C\varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \right) \|\psi_x\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}}, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} I_4 &\leq C\varepsilon_0 \left(\|\varphi_x\|_{L^2} \|u_x^r\|_{L^\infty} \|\chi_{xx}\|_{L^2} + \|\varphi_x\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^\infty} \|\chi_{xx}\|_{L^2} + \|v_x^r\|_{L^\infty} \|\psi_x\|_{L^2} \|\chi_{xx}\|_{L^2} + \|v_x^r\|_{L^\infty} \|u_x^r\|_{L^2} \|\chi_{xx}\|_{L^2} \right) \\ &\leq C\varepsilon_0 \|\chi_{xx}\|_{L^2} \left(\delta^{\frac{1}{5}} \varepsilon^{\frac{1}{5}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\varphi_x\|_{L^2} + \|\varphi_x\|_{L^2} (\|\psi_x\|_{L^2} + \|\psi_{xx}\|_{L^2}) + \delta^{\frac{1}{5}} \varepsilon^{\frac{1}{5}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\psi_x\|_{L^2} + \delta^{\frac{6}{5}} \varepsilon^{\frac{7}{10}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \right) \\ &\leq C\varepsilon_0 \left(\|\chi_{xx}\|_{L^2}^2 + \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 \right) + C\varepsilon_0^2 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \left(\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2 \right) + C\varepsilon_0^2 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}}, \end{aligned}$$

由 Sobolev 不等式, 可得

$$\begin{aligned} I_5 &\leq C \left(\|u_{xx}^r\|_{L^2} + \|\psi_{xx}\|_{L^2} \right) \|\chi_{xx}\|_{L^2} \|\chi_x\|_{L^\infty} \\ &\leq C\varepsilon_0 \left(\|\chi_{xx}\|_{L^2}^2 + \|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 \right) + C\varepsilon_0 \delta^{\frac{3}{5}} \varepsilon^{\frac{3}{10}} (1+t)^{-\frac{4}{5}} \|\chi_{xx}\|_{L^2} \\ &\leq C\varepsilon_0 \left(\|\chi_{xx}\|_{L^2}^2 + \|\psi_{xx}\|_{L^2}^2 \right) + C\varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} \|\chi_{xx}\|_{L^2}^2 + C\varepsilon_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} (1+t)^{-\frac{8}{5}}. \end{aligned}$$

将 $I_i (1 \leq i \leq 5)$ 的估计代入(53)式, 对 t 在 $[0, T]$ 上积分, 并利用(36)式, (43)式, (46)式与(48)式, 即得到(52)式, 完成引理 5 的证明。

由(36)式, (43)式, (46)式, (48)式和(52)式, 取足够小的 ε 与 ε_0 , 且允许稀疏波强度 δ 任意大, 即可得到(33)式, 即证明命题 1。

3.2. 全局存在性和大时间行为

接下来证明定理 1。根据先验估计(33)式, 存在一个正常数 C_0 , 使得

$$\begin{aligned} \|\varphi, \psi\|_{H^1}^2 + \|\chi^2 - 1\|_{H^2}^2 &\leq C_0 \|\varphi_0, \psi_0\|_{H^1}^2 + C_0 \|\chi_0^2 - 1\|_{H^2}^2 + C_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}}. \\ C_0 \|\varphi_0, \psi_0, \chi_{0x}\|_{H^1}^2 + C_0 \|\chi_0^2 - 1\|_{H^2}^2 + C_0 \varepsilon^{\frac{1}{10}} &\leq \frac{1}{4} \varepsilon_0^2, \end{aligned}$$

之后我们封闭先验假设(32)式。柯西问题(29), (30)解的全局存在性可以根据局部存在性和先验估计(33)证得。

对于大时间行为, 根据(29)₁, (33), (44), (47), (50)可得,

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \left| \frac{d}{dt} \left\| \left[\varphi_x, \psi_x, (\chi^2 - 1)_x \right] \right\|_{L^2}^2 \right| dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi_{xt} \varphi_x dx \right| dt + \int_0^{+\infty} \left| \frac{d}{dt} \left\| \left[\psi_x, (\chi^2 - 1)_x \right] \right\|_{L^2}^2 \right| dt \\ &< C + C \int_0^{+\infty} \left\| \left[\varphi_x, \psi_x, \psi_{xx}, \chi_x, \chi_{xx} \right] \right\|_{L^2}^2 dx, \end{aligned} \quad (54)$$

结合(33)式, 可得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \partial_x \left[\varphi, \psi, \chi^2 - 1 \right] \right\|_{L^2}^2 = 0. \quad (55)$$

完成定理 1 的证明。

4. 结束语

本文研究了基于 van der Waals 状态方程的一维 NSAC 方程组稀疏波的渐进稳定性。在 $v_{\pm} \in (v^*, +\infty)$ 的条件下, 我们首先通过求解 Burgers 方程构造了稀疏波的光滑逼近, 利用能量估计的方法得到扰动方程

的先验估计, 并证明了当初扰动足够小时, 方程存在唯一全局解。进一步, 通过分析解的渐近行为, 证明了解随时间渐近收敛到稀疏波。本文的结论表明: 在两相流模型中允许稀疏波的强度任意大, 而不破坏模型的稳定性, 同时不会出现激波、接触间断奇异现象。该结论为工程以及物理的应用提供了坚实理论依据, 是大规模制冷、气体液化过程能够保持稳定的基础。

基金项目

国家自然科学基金青年科学基金项目: 可压缩 Navier-Stokes/Allen-Cahn 方程组解的大时间行为研究 (12301266)。

参考文献

- [1] Blesgen, T. (1999) A Generalization of the Navier-Stokes Equations to Two-Phase Flows. *Journal of Physics D: Applied Physics*, **32**, 1119-1123. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/32/10/307>
- [2] Feireisl, E., Petzeltová, H., Rocca, E. and Schimperna, G. (2010) Analysis of a Phase-Field Model for Two-Phase Compressible Fluids. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **20**, 1129-1160.
- [3] Chen, S.M., Wen, H.Y. and Zhu, C.J. (2019) Global Existence of Weak Solution to Compressible Navier-Stokes/Allen-Cahn System in Three Dimensions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **477**, 1265-1295. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.05.012>
- [4] Ding, S.J., Li, Y.H. and Luo, W.L. (2013) Global Solutions for a Coupled Compressible Navier-Stokes/Allen-Cahn System in 1d. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **15**, 335-360. <https://doi.org/10.1007/s00021-012-0104-3>
- [5] Chen, M.T. and Guo, X.W. (2019) Global Large Solutions for a Coupled Compressible Navier-Stokes/Allen-Cahn System with Initial Vacuum. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **37**, 350-373. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2017.03.001>
- [6] Luo, T., Yin, H.Y. and Zhu, C.J. (2018) Stability of the Rarefaction Wave for a Coupled Compressible Navier-Stokes/Allen-Cahn System. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**, 4724-4736. <https://doi.org/10.1002/mma.4925>
- [7] Luo, T. (2022) Stability of the Rarefaction Wave for a Non-Isentropic Navier-Stokes/Allen-Cahn System. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, **43**, 233-252. <https://doi.org/10.1007/s11401-022-0314-9>
- [8] Li, Y.H., Yan, Y.X., Ding, S.J. and Chen, G.Y. (2023) Global Weak Solutions for 1D Compressible Navier-Stokes/Allen-Cahn System with Vacuum. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **74**, 1-19. <https://doi.org/10.1007/s00033-022-01893-8>
- [9] Chen, Y.K., Huang, B. and Shi, X.D. (2024) Stability of the Rarefaction Wave in the Singular Limit of a Sharp Interface Problem for the Compressible Navier-Stokes/Allen-Cahn System. *Acta Mathematica Scientia*, **44**, 1507-1523. <https://doi.org/10.1007/s10473-024-0417-3>
- [10] Chen, Y.Z., Hong, H. and Shi, X.D. (2024) Stability of the Phase Separation State for Compressible Navier-Stokes/Allen-Cahn System. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **40**, 45-74. <https://doi.org/10.1007/s10255-023-1070-7>
- [11] Lei, D. and Chen, Z.Z. (2025) Asymptotic Stability of Rarefaction Wave to the 1D Compressible Navier-Stokes-Allen-Cahn System with Density and Phase-Field Variable-Dependent Viscosity in the Half Space. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **48**, 10752-10773. <https://doi.org/10.1002/mma.10916>
- [12] Hsiao, L. (1989) Admissible Weak Solution for Nonlinear System of Conservation Laws in Mixed Type. *Journal of Partial Differential Equations*, **2**, 40-58. <https://doi.org/10.4208/jpde.v2.n1.5>
- [13] Hsiao, L. (1990) Uniqueness of Admissible Solutions of the Riemann Problem for a System of Conservation Laws of Mixed Type. *Journal of Differential Equations*, **86**, 197-233. [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(90\)90030-s](https://doi.org/10.1016/0022-0396(90)90030-s)
- [14] Yanagi, S. (1992) The Riemann Problem for a Class of Conservation Laws of Van Der Waals Fluid. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **9**, 239-268. <https://doi.org/10.1007/bf03167567>
- [15] Yang, C. and Shi, X.D. (2004) Large-Time Behavior in Van der Waals Fluids. *Journal of Beijing University of Chemical Technology*, **31**, 87-89.
- [16] Matsumura, A. and Nishihara, K. (1986) Asymptotics toward the Rarefaction Waves of the Solutions of a One-Dimensional Model System for Compressible Viscous Gas. *Japan Journal of Applied Mathematics*, **3**, 1-13. <https://doi.org/10.1007/bf03167088>