

基于Halanay不等式的高等数学微分问题定性分析

程 鹏

武警警官学院基础部, 四川 成都

收稿日期: 2026年5月12日; 录用日期: 2026年6月14日; 发布日期: 2026年6月24日

摘 要

Halanay不等式是时滞微分系统中常用的一种微分不等式, 常用来分析含有时滞项的函数是如何以指数的方式进行衰减的。本文从Halanay不等式的基本定理和核心性质出发, 结合高等数学中函数极限的判定、一阶微分方程的收敛性分析, 以及微分不等式的证明问题展开讨论。同时, 将Halanay不等式与Gronwall不等式对比, 可以清楚直观地发现利用Halanay不等式不要求出解析解, 适用性强, 方法简单, 在解决高等数学中微分定性分析问题上, 能明显简化过程, 提高做题效率。

关键词

Halanay不等式, 高等数学, 微分方程, 极限收敛, 微分不等式

Qualitative Analysis of Differential Problems in Advanced Mathematics Based on Halanay Inequality

Peng Cheng

Basic Department, College of PAP, Chengdu Sichuan

Received: May 12, 2026; accepted: June 14, 2026; published: June 24, 2026

Abstract

The Halanay inequality is a commonly used differential inequality in delayed differential systems, which is mainly applied to analyze the exponential decay characteristics of functions with delay terms. Starting from the fundamental theorem and core properties of the Halanay inequality, this paper discusses the judgment of function limits, the convergence analysis of first-order differential

equations and the proof of differential inequalities in advanced mathematics. By comparing the Halanay inequality with the Gronwall inequality, it is clearly concluded that the Halanay inequality features wide applicability and concise operation without solving analytical solutions. It can effectively simplify the solving process and improve efficiency in dealing with qualitative analysis problems of differential equations in advanced mathematics.

Keywords

Halanay Inequality, Advanced Mathematics, Differential Equation, Limit Convergence, Differential Inequality

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

论文旨在为高等数学教育引入一个处理时滞微分问题的有效工具——Halanay 不等式。本研究的意义主要体现在其教学价值上。它将泛函微分方程领域中的一个专业工具(Halanay 不等式)进行简化和“降维”，并引入到更基础的高等数学[1]课程体系中。对于高等数学教学而言，这是一个有益的补充，因为它为处理一类传统方法(如洛必达法则、单调有界准则)难以应对或过程繁琐的时滞微分[2]问题，提供了“利器”。

本文简化了 Halanay 不等式较为复杂的理论推导，从高等数学的角度出发，用更通俗的方式介绍其内容，结合典型例题说明应用方法，明确它在极限证明和微分方程[3]分析中的应用逻辑，希望能为完善高等数学微分不等式体系[4]提供一点帮助。

2. Halanay 不等式基本理论

(一) 标准形式

设非负函数 $v(t) \geq 0$ 在区间 $[t_0 - \tau, +\infty)$ 上连续可微，且满足微分不等式：

$$v'(t) \leq -\alpha v(t) + \beta \sup_{s \in [t-\tau, t]} v(s), t \geq t_0$$

其中 α, β, τ 为正常数，且满足核心条件 $\alpha > \beta$ 。

(二) 核心结论

存在正常数 k, η ，使得 $v(t) \leq ke^{-\eta(t-t_0)}$ ，即当 $t \rightarrow +\infty$ 时， $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$ ，函数 $v(t)$ 指数衰减趋于 0。

(三) 定理本质

Halanay 不等式[5]的特点在于弱化求解、强化定性判断。只要函数自身的衰减作用强于滞后项的扰动影响，就可以直接判定函数趋于零。这种思路简化了复杂微分分析过程，也契合高等数学中追求简洁解题的思想。

3. Halanay 不等式在高等数学中的具体应用

(一) 函数极限与有界性判定

函数极限是高等数学的基础内容，大多数题型需要证明函数的极限趋于零。传统方法多依赖单调有界准则或洛必达法则，步骤较繁琐，适用范围也有限。而 Halanay 不等式可以快速完成这类证明。

例题： 设非负可导函数 $f(t)$ 满足 $f'(t) \leq -2f(t) + \frac{1}{2} \sup_{s \in [t-1, t]} f(s)$ ，证明 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ 。

证明: 对比 Halanay 不等式标准形式, 此处 $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{2}$, 满足 $\alpha > \beta$, 根据 Halanay 不等式可得, 存在 $k > 0, \eta > 0$, 使得 $f(t) \leq ke^{-\eta t}$ 。

由于 $f(t)$ 是非负函数, 因此 $0 \leq f(t) \leq ke^{-\eta t}$ 。

当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 指数函数 $e^{-\eta t} \rightarrow 0$, 由夹逼准则可知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$, 同时可直接判定 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上全局有界。相较于单调性判别、洛必达法则等常规方法, 该方法逻辑简短、判定直观, 极大简化极限证明流程。

(二) 一阶微分方程解的收敛性分析

一阶微分方程是学习高等数学常微分方程中的重点内容。Halanay 不等式主要用于判断一阶时滞微分方程零解的收敛性, 无需解出通解就能判断解的变化趋势。在实际研究中, 一阶线性时滞微分方程通常表示为:

$$x'(t) = -ax(t) + bx(t-\tau) (t \geq 0)$$

初始条件 $x(t) = \varphi(t) (t \in [-\tau, 0])$, 其中 a, b, τ 为正常数。选取辅助函数 $v(t) = |x(t)|$, 求导并利用三角绝对值不等式的放缩, 可得:

$$v'(t) \leq -av(t) + b \sup_{s \in [t-\tau, t]} v(s)$$

根据 Halanay 不等式, 当 $a > b$ 时, $|x(t)| \leq ke^{-\eta t}$, 即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, 方程零解全局收敛。相比于特征方程法, Halanay 不等式避开复杂计算, 对无解析解的方程依然适用, 适合高等数学拓展性定性分析题目。

(三) 微分不等式证明

微分不等式证明在高等数学中具有一定难度, 常规方法往往需要多次求导或积分放缩, 技巧性较强。而 Halanay 不等式可以直接给出函数的指数型上界, 从而快速完成不等式证明。只要满足时滞微分结构且衰减系数大于扰动系数, 就能直接得到指数衰减上界, 放缩精度优于传统不等式, 证明过程也更为简洁。

4. Halanay 不等式与 Gronwall 不等式的对比

Gronwall 与 Halanay 是高等数学中两类重要的微分不等式, 二者结构不同、适用场景具有明确区别, 可根据是否含时滞进行选用:

1、Gronwall 不等式: 适用于无滞后的微分不等式, 仅能判定函数的有界性、多项式增长趋势, 无法处理时滞项;

2、Halanay 不等式: 适用于含时滞或上确界项的微分不等式, 可直接判定函数指数衰减趋于 0, 专门解决时滞类微分问题。

因此, 无延迟微分问题优先采用 Gronwall 不等式, 含滞后、需判定收敛于零的微分问题适宜采用 Halanay 不等式, 二者互补完善微分分析体系。

5. Halanay 不等式解题通用步骤

结合高等数学解题规范, 总结 Halanay 不等式实用解题步骤:

- 1、构造非负辅助函数 $v(t) = |f(t)|$, 保证满足不等式非负要求;
- 2、对辅助函数求导, 利用绝对值不等式、三角不等式进行放缩, 转化为 Halanay 不等式标准形式;
- 3、验证系数条件 $\alpha > \beta$;
- 4、直接套用结论, 得到函数的指数衰减估计;

5、结合极限夹逼准则，完成极限、收敛性或不等式的证明。

这套流程比较清晰，逻辑也容易掌握，适合本科生在高等数学定性分析习题中使用。

6. 结论

Halanay 不等式是对高等数学中常用不等式的一个有效补充，适合用来处理函数的微分问题定性分析。它不需要直接解微分方程，只需通过参数 α, β 的大小关系，就能迅速地判断函数是否按指数方式收敛。

在高等数学中，Halanay 不等式适用于函数极限求证、一阶微分方程解的收敛性探究，以及各类微分不等式的推证等相关研究问题。主要优点在于能简化解题步骤、降低分析难度。同时，把它和 Gronwall 不等式做个对比，有助于学生更清楚地理解不同类型不等式的适用场景，从而提升解题效率。

参考文献

- [1] 同济大学数学系. 高等数学(第七版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [2] 王高雄, 周之铭, 朱思铭. 常微分方程(第四版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [3] 傅予行. 泛函微分方程基础[M]. 长沙: 湖南大学出版社, 2015.
- [4] 张敬信, 王海霞. 微分不等式在函数极限分析中的应用[J]. 大学数学, 2020, 36(2): 112-116.
- [5] Halanay, A. (1966) Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags. Academic Press.