

基于截断核范数的低秩矩阵恢复算法研究

张志红^{1*}, 付亚茹^{1,2#}

¹太原师范学院数学与统计学院, 山西 晋中

²太原师范学院山西省智能优化计算与区块链技术重点实验室, 山西 晋中

收稿日期: 2026年5月12日; 录用日期: 2026年6月16日; 发布日期: 2026年6月30日

摘要

本文研究基于截断核范数(Truncated Nuclear Norm, TNN)的低秩矩阵恢复模型及其求解算法。传统核范数对所有奇异值施加均匀的软阈值惩罚, 易造成大奇异值的过度收缩, 影响图像主体结构的还原精度; 截断核范数仅惩罚较小的奇异值, 保留前 r 个主导奇异值不受惩罚, 能更精准地刻画矩阵的低秩结构。本文针对稀疏随机噪声去除任务, 构建了基于截断核范数的低秩矩阵恢复模型, 并采用增广拉格朗日乘子法(ALM)设计了相应的求解算法Alg.1。在不同尺寸灰度图像上的实验结果表明, 与基于标准核范数的ALM方法和加速近端梯度(APG)方法相比, 本文所提算法在PSNR、SSIM与相对误差等指标上整体最优, 视觉恢复效果更清晰。

关键词

低秩矩阵恢复, 截断核范数, 奇异值分解, ALM

Low-Rank Matrix Recovery Algorithm Based on Truncated Nuclear Norm

Zhihong Zhang^{1*}, Yaru Fu^{1,2#}

¹School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

²Shanxi Key Laboratory of Intelligent Optimization Computing and Blockchain Technology, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: May 12, 2026; accepted: June 16, 2026; published: June 30, 2026

Abstract

This paper investigates a low-rank matrix recovery model based on the Truncated Nuclear Norm

*第一作者。

#通讯作者。

(TNN) and its solution algorithm. The conventional nuclear norm imposes uniform soft-threshold shrinkage on all singular values, which easily causes excessive shrinkage of the dominant singular values and degrades the recovery accuracy of the principal image structure. In contrast, the truncated nuclear norm only penalizes the smaller singular values while keeping the first r leading singular values unaffected, thereby characterizing the low-rank structure more precisely. For the sparse random noise removal task, we construct a TNN-based low-rank recovery model and design a solution algorithm Alg.1 based on the Augmented Lagrange Multiplier (ALM) method. Numerical experiments on gray images of various sizes demonstrate that the proposed algorithm overall outperforms the standard nuclear-norm-based ALM and the Accelerated Proximal Gradient (APG) method in terms of PSNR, SSIM and relative error, producing clearer visual restoration.

Keywords

Low-Rank Matrix Recovery, Truncated Nuclear Norm, Singular Value Decomposition, ALM

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

低秩矩阵恢复是图像处理、计算机视觉、信号处理及机器学习等领域中的重要问题, 其核心目标是从带噪或缺失观测数据中重建潜在的低秩矩阵[1]-[3]。该问题在灰度及彩色图像去噪、图像修复、视频背景建模等任务中均有广泛应用[4]。由于矩阵秩函数的非凸性与不连续性, 直接的秩极小化问题通常是 NP-难的, Candès 等人[5]采用核范数作为秩函数的凸表示, 将该矩阵恢复问题松弛为如下凸优化模型

$$\min_{X,E} \|X\|_* + \lambda \|E\|_1 \quad \text{s.t. } X + E = M, \quad (1)$$

其中, 矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ 的核范数定义为 $\|X\|_* = \sum_{i=1}^{\min(n_1, n_2)} \sigma_i(X)$, $\sigma_i(X)$ 是其第 i 大奇异值; 矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ 是被损坏的观测数据矩阵。 $\|E\|_1$ 表示误差矩阵 E 中非零项的绝对值之和(即 ℓ_1 范数), λ 为正加权参数, 用于平衡低秩项和稀疏误差项。

对于上述凸问题, 目前已存在多种高效的优化模型与算法。Cai 等人[6]提出了奇异值阈值(Singular Value Thresholding, SVT)算法, 通过对奇异值进行软阈值收缩高效求解核范数极小化模型。Toh 与 Yun [7]提出了加速近端梯度(Accelerated Proximal Gradient, APG)算法用于求解核范数正则化的线性最小二乘问题, 该方法具有 $O(1/k^2)$ 的收敛阶。随后, Lin 等人[8]将增广拉格朗日乘子(Augmented Lagrange Multiplier, ALM)方法应用于矩阵恢复问题, 并证明了在一定条件下 ALM 算法的计算精度更高、收敛速度更快。

然而, 标准核范数对所有奇异值施加均匀的软阈值惩罚, 在抑制小奇异值(噪声成分)的同时, 也会过度压缩大奇异值, 使得图像主体结构信息出现明显衰减, 进而降低恢复精度。为缓解这一缺陷, 文献[9]-[11]提出截断核范数(Truncated Nuclear Norm, TNN)的概念, 即仅对较小的 $\min(m, n) - r$ 个奇异值进行惩罚, 而保留前 r 个主导奇异值不受惩罚。相较于核范数, 截断核范数能够更精准地逼近矩阵真实秩函数, 显著提升低秩结构刻画能力。在[9]-[11]中, 作者们将核范数替换为截断核范数, 提出了多种求解矩阵补

全任务的算法。

基于截断核范数, 本文构建针对稀疏噪声去除的低秩矩阵恢复模型

$$\min_{X,E} \|X\|_{r,*} + \lambda \|E\|_1 \quad \text{s.t. } X + E = M, \quad (2)$$

其中 $\|X\|_{r,*}$ 代表截断核范数。

本文其余部分组织如下: 第 2 节介绍预备知识; 第 3 节给出基于 ALM 的截断核范数求解算法; 第 4 节给出数值实验对比, 验证所提算法的有效性; 第 5 节对全文进行总结。

2. 预备知识

本文中, \mathbb{R} 表示实数集, $\mathbb{R}^{m \times n}$ 为 $m \times n$ 实矩阵空间。小写字母 x 、粗体小写字母 \mathbf{x} 、大写字母 X 分别表示标量、向量与矩阵。对正整数 n , 记 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 。矩阵 $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 的核范数定义为 $\|X\|_* = \sum_{i=1}^r \sigma_i(X)$, 其中 $\sigma_i(X)$ 表示 X 的第 i 个奇异值。矩阵的 Frobenius 范数定义为 $\|X\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |X_{ij}|^2}$; ℓ_1 范数定义为 $\|X\|_1 = \sum_{i,j} |X_{ij}|$, $\langle X, Y \rangle = \text{Tr}(X^T Y)$ 。

定义 1 (奇异值分解[12]) 设 $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是一个秩为 r 的矩阵, 则存在矩阵 $U \in \mathbb{R}^{m \times r}$ 与 $V \in \mathbb{R}^{n \times r}$, 使得 $X = U \Sigma_r V^T$, 其中 $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, U, V 分别为左、右奇异向量矩阵。

定义 2 (奇异值阈值算子[6]) 对于矩阵 $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 设其奇异值分解为 $Y = U \Sigma V^T$, 则其奇异值软阈值算子定义为

$$D_\tau(Y) = U D_\tau(\Sigma) V^T, \quad D_\tau(\Sigma) = \text{diag}(\max\{\sigma_i - \tau, 0\}),$$

其中 $\tau > 0$ 。该算子是如下优化问题的最优解:

$$D_\tau(Y) = \arg \min_X \tau \|X\|_* + \frac{1}{2} \|X - Y\|_F^2.$$

定义 3 (软阈值算子[6]) 对于矩阵 $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 及 $\tau > 0$, 软阈值算子 $\mathcal{S}_\tau(Y)$ 按元素定义为

$$\mathcal{S}_\tau(Y)_{ij} = \text{sign}(Y_{ij}) \max\{|Y_{ij}| - \tau, 0\},$$

它是 $\arg \min_X \tau \|X\|_* + \frac{1}{2} \|X - Y\|_F^2$ 的最优解。

定义 4 (截断核范数[9]) 给定矩阵 $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 截断核范数定义为 $\min(m, n) - r$ 个奇异值的和, 即

$$\|X\|_{r,*} = \sum_{i=r+1}^{\min(m,n)} \sigma_i(X). \quad (3)$$

定理 1 (部分迹刻画[9]) 对于任意给定的矩阵 $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 任意矩阵 $A \in \mathbb{R}^{r \times m}, B \in \mathbb{R}^{r \times n}$ 且 $AA^T = I_r, BB^T = I_r$, 对于任意非负整数 $r (r \leq \min(m, n))$, 我们有

$$\text{Tr}(AXB^T) \leq \sum_{i=1}^r \sigma_i(X). \quad (4)$$

定理 1 是构造算法两层迭代框架的关键, 它将关于 X 非凸的部分和 $\sum_{i=1}^r \sigma_i(X)$ 化为线性形式 $\text{Tr}(AXB^T)$, 从而使内层子问题成为凸优化问题。

3. 算法

本节针对稀疏噪声去除模型(2), 基于 ALM 框架设计求解算法。由于截断核范数 $\|X\|_{r,*}$ 是非凸的, 直

接求解模型(2)较为困难。受文献[9]的启发, 结合定理 1, 将原非凸问题转化为凸优化问题

$$\min_{X,E} \|X\|_* - \max_{AA^T=I, BB^T=I} \text{Tr}(AXB^T) + \lambda \|E\|_1 \quad \text{s.t. } X + E = M, \quad (5)$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{r \times m}, B \in \mathbb{R}^{r \times n}$ 。

基于该公式, 本文设计一个简单但是高效的算法模型, 该方法采用两层迭代框架: 在外层迭代中, 固定当前估计 X^l , 并由其奇异值分解构造满足正交约束 $A_l A_l^T = I, B_l B_l^T = I$ 的辅助矩阵 A_l, B_l ; 在内层迭代中, 采用增广拉格朗日乘法对凸子问题进行求解, 通过对 X 和 E 进行交替更新与拉格朗日乘子 Y 的迭代修正, 逐步逼近原问题的最优解。该框架既保留了截断核范数对主导奇异值的保护作用, 又借助 ALM 方法良好的数值表现实现了高效求解。

对于模型(2), 其增广拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\rho(X, E, Y) = & \|X\|_{r,*} + \lambda \|E\|_1 + \langle Y, X + E - M \rangle \\ & + \frac{\rho}{2} \|X + E - M\|_F^2, \end{aligned} \quad (6)$$

其中, Y 为拉格朗日乘子, $\rho > 0$ 为惩罚参数。基于截断核范数的概念及由定理 1, 上述拉格朗日函数变型为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\rho(X, E, Y) = & \|X\|_* - \text{tr}(A_l X B_l^T) + \lambda \|E\|_1 \\ & + \langle Y, X + E - M \rangle + \frac{\rho}{2} \|X + E - M\|_F^2. \end{aligned} \quad (7)$$

1) X 子问题。给定第 k 次内迭代时的 E^k, Y^k , 求解

$$\begin{aligned} X^{k+1} = & \arg \min_X \|X\|_* - \text{tr}(A_l X B_l^T) + \frac{\rho}{2} \left\| X + E^k - M + \frac{Y^k}{\rho} \right\|_F^2 \\ = & \arg \min_X \frac{1}{\rho} \|X\|_* + \frac{1}{2} \left\| X - \left(M - E^k - \frac{Y^k}{\rho} + \frac{A_l^T B_l}{\rho} \right) \right\|_F^2. \end{aligned}$$

由定义 2, X^{k+1} 可由奇异值阈值算子计算获得, 即

$$X^{k+1} = D_{1/\rho} \left(M - E^k - \frac{Y^k}{\rho} + \frac{A_l^T B_l}{\rho} \right).$$

2) E 子问题。给定 X^{k+1}, Y^k , 求解

$$E^{k+1} = \arg \min_E \lambda \|E\|_1 + \frac{\rho}{2} \left\| X^{k+1} + E - M + \frac{Y^k}{\rho} \right\|_F^2.$$

由定义 3, E^{k+1} 可由软阈值算子计算获得, 即

$$E^{k+1} = \mathcal{S}_{\lambda/\rho} \left(M - X^{k+1} - \frac{Y^k}{\rho} \right).$$

3) 乘子更新。

$$Y^{k+1} = Y^k + \rho (X^{k+1} + E^{k+1} - M), \quad \rho^{k+1} = \min \{ \rho_{\max}, \beta \rho^k \}.$$

完整的算法执行过程详见算法 1。

算法 1. 基于截断核范数的低秩矩阵 ALM 算法(Alg.1)

输入: 观测矩阵 M , 截断秩 r , 平衡参数 λ , 惩罚参数 ρ , 增长因子 $\beta > 1$, 收敛阈值 ϵ , 最大外/内迭代次数 L_{\max}, K_{\max}

输出: 低秩矩阵 X , 稀疏噪声 E

1: 初始化: $X^0 = M, E^0 = 0, Y^0 = 0$

2: for $l = 0, 1, 2, \dots, L_{\max}$ do

3: 对 X^l 做 SVD: $X^l = U^l \Sigma^l (V^l)^\top$, 取 $A_l = (U^l(:, 1:r))^\top, B_l = (V^l(:, 1:r))^\top$

4: for $k = 0, 1, 2, \dots, K_{\max}$ do

5: $X^{k+1} = D_{V, \rho}(M - E^k - Y^k / \rho + A_l^\top B_l / \rho)$

6: $E^{k+1} = S_{\lambda/\rho}(M - X^{k+1} - Y^k / \rho)$

7: $Y^{k+1} = Y^k + \rho(X^{k+1} + E^{k+1} - M)$

8: $\rho \leftarrow \min\{\rho_{\max}, \beta\rho\}$

9: 若 $\|X^{k+1} - X^k\|_F / \|M\|_F < \epsilon$ 则跳出内循环

10: end for

11: 令 $X^{l+1} = X^{k+1}$ (取内层迭代最终的 X 作为外层第 $l+1$ 步的解)

12: 若 $\|X^{l+1} - X^l\|_F / \|M\|_F < \epsilon$ 则跳出外循环

13: end for

14: return X, E

注: 算法 1 的两层迭代框架由外层截断核范数迭代与内层增广拉格朗日子问题构成。关于外层迭代在合理条件下收敛至原非凸问题局部极小点的证明可参见文献[9]; 内层 ALM 子问题在固定 A_l, B_l 后退化为标准凸优化问题, 其全局收敛性的详细证明可参见文献[8], 此处不再赘述。

4. 数值实验

本节通过不同尺寸的灰度图像验证算法 1 (简记为 Alg.1) 的有效性, 并与基于标准核范数的 ALM 算法[8]以及加速近端梯度 APG 算法[7]进行对比。所有实验均在 Windows 11 操作系统、MATLAB R2024b 环境下完成。

实验采用三项评价指标: 峰值信噪比(PSNR)、结构相似性(SSIM)与相对误差(RSE), 定义如下:

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \frac{n \cdot X_{\max}^2}{\|\hat{X} - X\|_F^2},$$

$$\text{SSIM}(X, \hat{X}) = \frac{(2\mu_X \mu_{\hat{X}} + c_1)(2\sigma_{X\hat{X}} + c_2)}{(\mu_X^2 + \mu_{\hat{X}}^2 + c_1)(\sigma_X^2 + \sigma_{\hat{X}}^2 + c_2)},$$

$$\text{RSE} = \frac{\|\hat{X} - X\|_F}{\|X\|_F},$$

其中 X 为原始图像, \hat{X} 为恢复结果, n 为像素总数, X_{\max} 为最大像素值, $\mu, \sigma^2, \sigma_{X\hat{X}}$ 分别为均值、方差与协方差, $c_1 = (0.01L)^2$, $c_2 = (0.03L)^2$, $L = 255$ 。PSNR 与 SSIM 数值越大、RSE 越小, 表示恢复效果越好。

实验中, 各算法的主要参数设置为: 加权参数 $\lambda = 1/\sqrt{\max(m, n)}$, 惩罚参数 $\rho_{\max} = 10^7$, 增长因子 $\beta \in \{1.05, 1.15\}$, 收敛阈值 $\epsilon = 10^{-4} \sim 10^{-5}$ 。

4.1. 截断秩 r 的选取方法与参数敏感性分析

截断秩 r 是 Alg.1 的关键参数: r 取值过小, 部分主导奇异值仍会被压缩; r 取值过大, 则等价退化为标准核范数, 失去截断的保护作用。为分析 r 对算法性能的影响并为 r 的实际选取提供依据, 本小节以“Clock”图像(256×256)为测试对象, 固定其他参数, 分别记录当变化 r (其中 $1 \leq r \leq 30$, 且步长 2)时, 三种噪声水平下($\sigma = 20\%, 30\%, 40\%$) Alg.1 的 PSNR、SSIM、RSE 三项指标的变化, 结果如图 1 所示。

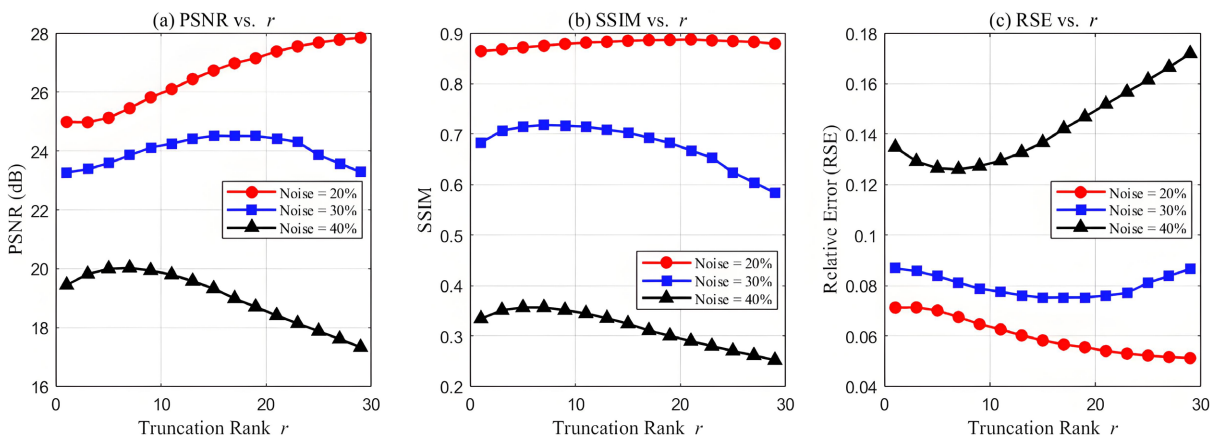


Figure 1. Effect of truncation rank r on the recovery performance of Alg.1 under different noise levels

图 1. 不同噪声水平下截断秩 r 对 Alg.1 恢复性能的影响

由图 1 可见, 三项指标对 r 的依赖规律随噪声水平不同而呈现差异化的形态: 在低噪声($\sigma = 20\%$)下, PSNR、SSIM 随 r 增大整体呈上升趋势并逐渐趋于平稳 RSE 则相应地单调下降; 而在中高噪声($\sigma = 30\%, 40\%$)下, 三项指标均呈现明显的单峰特性: PSNR、SSIM 先上升后下降, RSE 则先下降后回升, 最优 r 大致出现在 8~20 区间, 此时既能保护图像主导结构, 又能有效抑制噪声分量。此外, 在合理区间 $r \in [8, 20]$ 内 Alg.1 对 r 的取值不敏感, PSNR 波动幅度通常不超过 0.5, 算法对截断秩的选择具有较好鲁棒性。

r 取值的最终结论。综合上述分析, 本文采取噪声水平自适应的 r 选取策略: 在 $[1, 30]$ 区间内, 针对每个噪声水平通过参数扫描分别取使 PSNR 达到最大值的 r 作为该噪声水平下 Alg.1 的截断秩, 具体地, 本文 4.2 节实验中分别在 $\sigma = 20\%, 30\%, 40\%$ 下采用该方法所得的 r 进行测试。由于 PSNR 在合理区间内变化平缓, 该策略对 r 的取值具有较强容错性。

4.2. 灰度图像稀疏噪声去除

本小节通过两张灰度图像“Tile roof”(1024 × 1024)与“Clock”(256 × 256)验证 Alg.1 在稀疏随机噪声去除任务下的有效性。实验中, 噪声水平依次设为 $\sigma = 20\%, 30\%, 40\%$, 表示被随机污染像素的比例: 噪声幅值在像素动态范围内服从均匀分布。各噪声水平下 Alg.1 所采用的截断秩 r 按 4.1 节给出的自适应选取策略确定。为充分对比, 将本文 Alg.1 算法与基于标准核范数的 ALM 算法及 APG 算法在相同噪声水平、相同收敛阈值下进行测试, 并在 PSNR、SSIM 与 RSE 三项指标上记录恢复结果。此外, 为直观体现各算法对图像主体结构与细节信息的保留能力, 同时给出可视化对比图。数值结果见表 1 部分图像视觉对比见图 2 与图 3 此外, 通过“Clock”图片做的实验对比 Alg.1、ALM 与 APG 三种算法在不同噪声水平下相对误差(RSE)随 CPU 时间的变化曲线, 直观展示算法的收敛性过程, 如图 4 所示。

Table 1. Comparison of three algorithms for gray image denoising
表 1. 三种算法对灰度图像去噪的比较

图像	噪声水平	算法	PSNR	SSIM	RSE
Tile roof (1024×1024)	$\sigma = 20\%$	APG	27.91	0.7822	0.0759
		ALM	28.18	0.8105	0.0736
		Alg.1	29.33	0.8253	0.0645
	$\sigma = 30\%$	APG	24.72	0.5542	0.1097
		ALM	26.19	0.6809	0.0926
		Alg.1	27.00	0.6998	0.0844
	$\sigma = 40\%$	APG	20.69	0.3226	0.1745
		ALM	22.92	0.4422	0.1350
		Alg.1	23.37	0.4684	0.1281
Clock (256×256)	$\sigma = 20\%$	APG	24.68	0.7135	0.0738
		ALM	25.01	0.8553	0.0710
		Alg.1	27.67	0.8837	0.0523
	$\sigma = 30\%$	APG	20.59	0.3863	0.1181
		ALM	22.99	0.6114	0.0896
		Alg.1	24.42	0.6938	0.0760
	$\sigma = 40\%$	APG	16.84	0.2285	0.1819
		ALM	18.39	0.2809	0.1522
		Alg.1	20.37	0.3700	0.1211

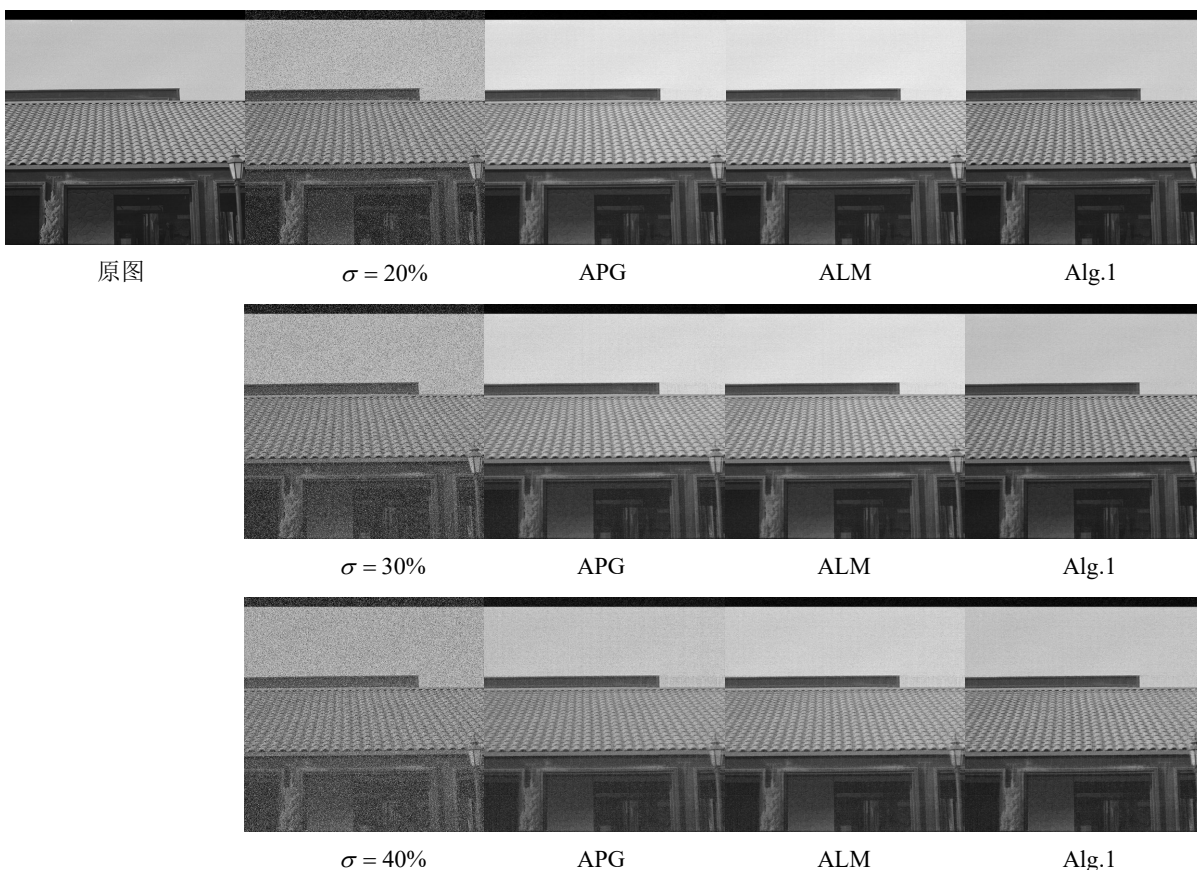


Figure 2. The restoration effect of the gray “Tile roof” image under different noise levels
图 2. 灰度 “Tile roof” 图像在不同噪声水平下的恢复效果

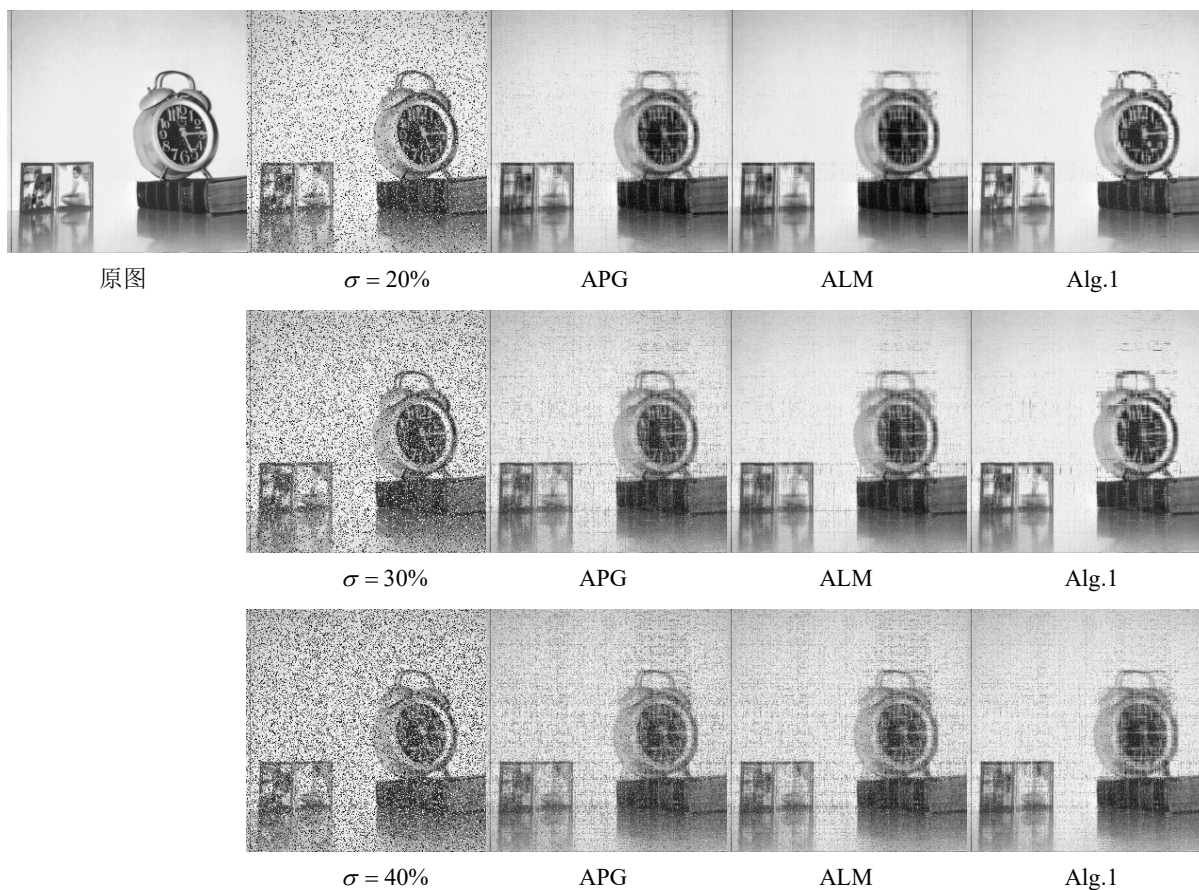


Figure 3. The restoration effect of the gray “Clock” image under different noise levels
图 3. 灰度 “Clock” 图像在不同噪声水平下的恢复效果

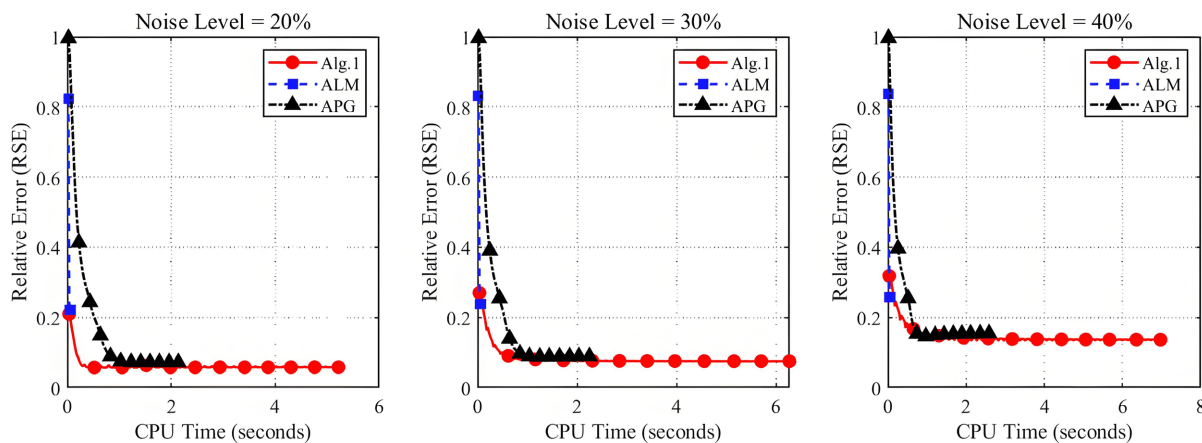


Figure 4. Convergence behavior of the three algorithms under different noise levels: RSE versus CPU time
图 4. 三种算法在不同噪声水平下的收敛行为: RSE 随 CPU 时间的变化

由表 1 及图 2、图 3 可见, 在三种噪声水平下, 本文所提算法在两张图像上整体取得最佳的 PSNR、SSIM 与 RSE 指标。例如在 “Tile roof” 图像上, 当 $\sigma = 40\%$ 时, Alg.1 的 PSNR 比 ALM 提升约 0.45, 比 APG 提升约 2.68; 在 “Clock” 图像上, 当 $\sigma = 40\%$ 时, Alg.1 的 PSNR 比 ALM 提升约 1.98, 比 APG 提升约 3.53, 优势更为显著。这是由于 “Clock” 图像结构相对简洁、低秩特性更强, 截断核范数对其主导

奇异值的保护作用更为充分, 因此在大噪声水平下能够获得更明显的恢复增益。随着噪声水平的提升, 三种算法的恢复质量均有所下降, 但 Alg.1 的优势始终稳定。视觉上, Alg.1 在保留图像主体结构(如屋顶瓦片纹理、钟表刻度等几何细节)的同时, 对稀疏噪声的去除更加彻底, 有效避免了 ALM 与 APG 中常见的整体模糊与残留斑点问题, 验证了截断核范数对大奇异值的保护作用在稀疏噪声去除任务中的有效性。

由图 4 可观察到: 在三种噪声水平下, Alg.1 的 RSE 在迭代初期下降最为迅速, 经少量 CPU 时间即可达到稳定收敛阶段, 收敛速度优于 ALM 与 APG; 同时, Alg.1 收敛后的稳定 RSE 值也略低于 ALM 与 APG, 表明其在恢复精度上同样具有一定优势。此外, 随着噪声水平的提升, 算法收敛至稳定值所需的 CPU 时间略有增加, 但整体收敛行为依然平稳, 未出现震荡现象, 验证了 Alg.1 在实际应用中的数值稳定性。

5. 结论

本文针对低秩矩阵恢复中标准核范数对所有奇异值施加均匀惩罚、易过度压缩主导奇异值的问题, 构建了基于截断核范数的矩阵恢复模型, 并基于增广拉格朗日乘子法(ALM)设计了相应的求解算法 1。在 20%, 30%, 40% 三种噪声水平下, “Tile roof” 与 “Clock” 灰度图像的去噪实验表明, Alg.1 在 PSNR、SSIM、RSE 三项指标上整体显著优于 ALM 与 APG, 且在保留图像主体结构与细节信息的同时, 对噪声区域的恢复更加自然。三种算法的收敛曲线对比则验证了 Alg.1 在保持高恢复精度的同时, 仍具备平稳的收敛行为与数值稳定性。综上, 本文所提的新算法在低秩矩阵恢复任务中具有更高的恢复精度与更强的鲁棒性。

参考文献

- [1] Liu, J., Musialski, P., Wonka, P. and Ye, J. (2012) Tensor Completion for Estimating Missing Values in Visual Data. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **35**, 208-220. <https://doi.org/10.1109/tpami.2012.39>
- [2] Komodakis, N. (2006) Image Completion Using Global Optimization. 2006 *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, New York, 17-22 June 2006, 442-452.
- [3] Bengua, J.A., Phien, H.N., Tuan, H.D. and Do, M.N. (2017) Efficient Tensor Completion for Color Image and Video Recovery: Low-Rank Tensor Train. *IEEE Transactions on Image Processing*, **26**, 2466-2479. <https://doi.org/10.1109/tip.2017.2672439>
- [4] Bertalmio, M., Bertozzi, A.L. and Sapiro, G. (2001) Navier-Stokes, Fluid Dynamics, and Image and Video Inpainting. *Proceedings of the 2001 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Kauai, 8-14 December, 1, 1-355-1-362. <https://doi.org/10.1109/cvpr.2001.990497>
- [5] Candès, E.J. and Recht, B. (2009) Exact Matrix Completion via Convex Optimization. *Foundations of Computational Mathematics*, **9**, 717-772. <https://doi.org/10.1007/s10208-009-9045-5>
- [6] Cai, J.F., Candès, E.J. and Shen, Z. (2010) A Singular Value Thresholding Algorithm for Matrix Completion. *SIAM Journal on Optimization*, **20**, 1956-1982. <https://doi.org/10.1137/080738970>
- [7] Toh, K.C. and Yun, S. (2010) An Accelerated Proximal Gradient Algorithm for Nuclear Norm Regularized Linear Least Squares Problems. *Pacific Journal of Optimization*, **6**, 615-640.
- [8] Lin, Z., Chen, M. and Ma, Y. (2010) The Augmented Lagrange Multiplier Method for Exact Recovery of Corrupted Low-Rank Matrices. <https://arxiv.org/abs/1009.5055>
- [9] Hu, Y., Zhang, D., Ye, J., Li, X. and He, X. (2013) Fast and Accurate Matrix Completion via Truncated Nuclear Norm Regularization. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **35**, 2117-2130. <https://doi.org/10.1109/tpami.2012.271>
- [10] Oh, T.H., Tai, Y.W., Bazin, J.C., Kim, H. and Kweon, I.S. (2016) Partial Sum Minimization of Singular Values in Robust PCA: Algorithm and Applications. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **38**, 744-758. <https://doi.org/10.1109/tpami.2015.2465956>
- [11] Cao, F., Chen, J., Ye, H., Zhao, J. and Zhou, Z. (2017) Recovering Low-Rank and Sparse Matrix Based on the Truncated Nuclear Norm. *Neural Networks*, **85**, 10-20. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2016.09.005>
- [12] Golub, G.H. and Van Loan, C.F. (2013) *Matrix Computations*. 4th Edition, Johns Hopkins University Press.