

含饱和型密度依赖奇异敏感性的高维斑秃趋化系统全局有界性

李雪娇*, 马 旭[#]

新疆农业大学数理学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2026年5月18日; 录用日期: 2026年9月15日; 发布日期: 2026年10月19日

摘 要

本文研究一类描述斑秃发病机制的三组分趋化系统动力学行为, 将系统中CD4⁺T细胞的趋化敏感性设定为饱和型密度依赖奇异形式 $\chi_1(u) = \frac{\chi_0}{1+ku}$, 在带光滑边界的有界凸区域 $\Omega \subset R^n$ ($n=4,5$) 内。通过构造能量泛函、运用Young's不等式、Gronwall's不等式及热半群理论, 证明当Logistic阻尼系数 μ_1, μ_2 充分大时, 该修正系统存在全局一致有界的经典解。该结果将常数趋化敏感性下的系统研究拓展至饱和密度依赖奇异场景, 为斑秃病灶中免疫细胞聚集的非线性调控机制提供了更贴合生物实际的数学描述。

关键词

趋化系统, 斑秃, 全局有界性

Global Boundedness of High-Dimensional Alopecia Chemotaxis Systems with Saturated Density-Dependent Singular Sensitivity

Xuejiao Li*, Xu Ma[#]

School of Mathematics and Physics, Xinjiang Agricultural University, Urumqi Xinjiang

Received: May 18, 2026; accepted: September 15, 2026; published: October 19, 2026

Abstract

This paper investigates the dynamical behaviors of a three-component chemotaxis system

*第一作者。

[#]通讯作者。

文章引用: 李雪娇, 马旭. 含饱和型密度依赖奇异敏感性的高维斑秃趋化系统全局有界性[J]. 理论数学, 2026, 16(10): 51-59. DOI: 10.12677/pm.2026.1610211

describing the pathogenesis of alopecia areata. CD4⁺T cell chemotactic sensitivity in the system is taken as a saturated density-dependent singular form $\chi_1(u) = \frac{\chi_0}{1+ku}$, within a bounded convex domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n=4,5$) with smooth boundaries. By constructing energy functionals and applying Young's inequality, Gronwall's inequality and heat semigroup theory, it is proved that there exist globally uniformly bounded classical solutions to the modified system when the Logistic damping coefficient μ_1 and μ_2 is sufficiently large. This result extends the research on systems with constant chemotactic sensitivity to the setting of saturated density-dependent singular sensitivity, and provides a more biologically realistic mathematical characterization for the nonlinear regulation mechanism of immune cell aggregation in alopecia areata lesions.

Keywords

Chemotaxis System, Alopecia Areata, Global Boundedness

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

斑秃是一种以局部脱发为典型症状的自身免疫性疾病, 其核心发病机制是免疫系统异常攻击毛囊, 导致毛囊免疫豁免权崩溃。已有研究[1]表明, CD4⁺T 细胞、CD8⁺T 细胞的异常聚集及干扰素 IFN- γ 的过量分泌是驱动疾病进展的关键因素。干扰素 IFN- γ 不仅是诱导毛囊免疫豁免权崩溃的核心细胞因子, 而且同时作为趋化引诱剂, 会引导 T 细胞向病灶区域定向迁移, 形成细胞聚集、信号分泌以及进一步聚集的恶性循环。

为刻画斑秃病灶的时空演化规律, 多布雷娃等[2]首次提出三组分趋化系统, 后续楼和陶[3]在低维空间中证明了该系统经典解的全局有界性与渐近稳定性, 陶和徐[4]进一步将其拓展为抛物-椭圆系统并得到相应结果。但现有研究均假设趋化敏感性系数为常数, 难以反映生物体内免疫细胞密度对自身趋化响应的调控效应。

基于上述生物机制与数学研究, 本文聚焦高维空间 ($n=4,5$), 研究如下描述含饱和型密度依赖奇异趋化敏感性形式的斑秃免疫动态的三组分趋化系统:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot \left(u \cdot \frac{\chi_0}{1+ku} \nabla w \right) + w - \mu_1 u^2, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = \Delta v - \chi_2 \nabla \cdot (v \nabla w) + w + ruv - \mu_2 v^2, & x \in \Omega, t > 0, \\ w_t = \Delta w + u + v - w, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), w(x, 0) = w_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

式中: $u(x, t)$ 为 CD4⁺T 细胞密度; $v(x, t)$ 为 CD8⁺T 细胞密度; $w(x, t)$ 为干扰素 IFN- γ 浓度; $k > 0$ 为密度饱和系数; μ_1, μ_2 为 Logistic 阻尼系数且均为恒正的常数; $r > 0$ 表示 CD4⁺T 细胞对 CD8⁺T 细胞的增殖促进系数。 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n=4,5$) 为有界凸区域, ν 为边界外法向量。初始数据 (u_0, v_0, w_0) 满足以下条件:

$$\begin{cases} u_0 \in C(\bar{\Omega}), & u_0 \geq 0, u_0|_{\bar{\Omega}} \neq 0, \\ v_0 \in C(\bar{\Omega}), & v_0 \geq 0, v_0|_{\bar{\Omega}} \neq 0, \\ w_0 \in W^{1,\infty}(\Omega), & w_0|_{\bar{\Omega}} \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

本文的核心工作是: 证明高维空间中系统(1)全局一致有界经典解的存在性, 明确 Logistic 阻尼系数的下界条件。

2. 预备知识

本节给出后续证明所需的基础引理, 包括解的局部存在性、诺伊曼热半群估计及解的基本积分有界性, 为全局有界性分析奠定基础。

引理 1 (经典解的局部存在性) 设 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) 为带光滑边界的有界区域, 参数 $\chi_0, r, \chi_2, \mu_1, \mu_2, k$ 均为大于零的常数, 对任意满足初始条件的 (u_0, v_0, w_0) , 存在最大时间 $T_{\max} \in (0, \infty)$ 和唯一非负经典解 (u, v, w) , 满足 $u, v \in C^0(\bar{\Omega} \times [0, T_{\max})) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T_{\max}))$, 且对任意 $p > n$, 有

$$w \in C^0([0, T_{\max}); W^{1,p}(\Omega)) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T_{\max})).$$

进一步, 若 $T_{\max} < \infty$, 则

$$\limsup_{t \rightarrow T_{\max}} \left\{ \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \right\} = \infty. \quad (3)$$

证明 利用抛物方程标准理论与不动点定理, 结合饱和和敏感性项 $\chi_1(u) = \frac{\chi_0}{1+ku}$ 的连续性与局部有界, 可证局部解存在且唯一, 细节参考[5] [6]。

引理 2 (诺伊曼热半群估计) 设 $(e^{t\Delta})_{t \geq 0}$ 为 Ω 上的 Neumann 热半群, 则对任意 $p \in (0, \infty)$, 则存在 $C > 0$, 对 $\forall t \in (0, T_{\max})$, 使得对所有的满足 $\varphi \cdot \nu = 0$ 的 $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, 有 $\|e^{t\Delta} \nabla \cdot \varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq Ct^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2p}} \|\varphi\|_{L^p(\Omega)}$ 。

证明 细节参考[7]。

进一步给出后续工作所需的一些基本估计。

引理 3 存在常数 $m > 0$, 使得系统(1)的解满足:

$$\int_{\Omega} u(\cdot, t) \leq m, \quad \int_{\Omega} v(\cdot, t) \leq m, \quad \int_{\Omega} w(\cdot, t) \leq m, \quad \forall t \in (0, T_{\max})$$

证明 对系统(1)的三个方程分别在 Ω 上积分, 结合边界条件与比较原理, 可证积分一致有界, 细节参考[4]。

3. 主要定理

定理 1 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 4, 5$) 为边界光滑的有界凸区域, 参数 $\chi_0, k, \chi_2, \mu_1, \mu_2, r$ 均为正数, χ_0 为基础趋化敏感性系数, k 为密度饱和系数。对任意的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 若死亡率参数 μ_1, μ_2 满足以下的下界条件:

$$\mu_1 > \frac{1}{3} \left[\sqrt{\frac{3}{\varepsilon^2}} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} + \sqrt{\frac{3n}{2\varepsilon}} + 2\sqrt{n+8} \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\varepsilon}} \right) \right] \chi_0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2} \right) r + 1, \quad (4)$$

和

$$\mu_2 > \frac{1}{3} \left[\sqrt{\frac{3}{\varepsilon^2}} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} + \sqrt{\frac{3(n+4)}{2\varepsilon}} + 2\sqrt{n+8} \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\varepsilon}} \right) \right] \chi_2 + \frac{1}{2} r + 1. \quad (5)$$

则对任意满足初始条件(2)初值 (u_0, v_0, w_0) , 修正后的趋化系统(1)存在唯一的全局一致有界经典解 (u, v, w) , 即存在常数 $K > 0$, 使得对所有 $t > 0$ 都有:

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|w(\cdot, t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq K. \quad (6)$$

4. 先验估计

引理 4 设 (u, v, w) 是趋化系统(1)的解, 其中 CD4⁺T 细胞的趋化敏感性系数为 $\chi_1(u) = \frac{\chi_0}{1+ku}$. 则对任意的 $\varepsilon \in (0, 1)$, $\forall t \in (0, T_{\max})$, 以下能量不等式成立:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} u^3 + \int_{\Omega} v^3 + \int_{\Omega} w^3 \right\} + 6(1-\varepsilon) \left\{ \int_{\Omega} u |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} v |\nabla v|^2 \right\} \\ & + 6 \int_{\Omega} w |\nabla w|^2 + 3\mu_1 \int_{\Omega} u^4 + 3\mu_2 \int_{\Omega} v^4 + 3 \int_{\Omega} w^3 \\ & \leq 3 \int_{\Omega} u^2 w + 3 \int_{\Omega} v^2 w + 3r \int_{\Omega} uv^3 + 3 \int_{\Omega} uw^2 + 3 \int_{\Omega} vw^2 \\ & + \frac{3\chi_0^2}{2\varepsilon} \int_{\Omega} \frac{u^3}{(1+ku)^2} |\nabla w|^2 + \frac{3\chi_2^2}{2\varepsilon} \int_{\Omega} v^3 |\nabla w|^2. \end{aligned} \quad (7)$$

证明: 对系统(1)中的第一个方程两端同乘 u^2 并积分, 得

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^3 = -2 \int_{\Omega} u |\nabla u|^2 + 2\chi_0 \int_{\Omega} \frac{1}{1+ku} u^2 \nabla u \cdot \nabla w + \int_{\Omega} u^2 w - \mu_1 \int_{\Omega} u^4. \quad (8)$$

对于交叉项 $2\chi_1 \int_{\Omega} \frac{1}{1+ku} u^2 \nabla u \cdot \nabla w$, 利用 Young 不等式有

$$2\chi_1 \int_{\Omega} \frac{1}{1+ku} u^2 \nabla u \cdot \nabla w \leq 2\varepsilon \int_{\Omega} u |\nabla u|^2 + \frac{\chi_0^2}{2\varepsilon} \int_{\Omega} \frac{1}{(1+ku)^2} u^3 |\nabla w|^2, \quad (9)$$

从而有

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^3 + 6(1-\varepsilon) \int_{\Omega} u |\nabla u|^2 + 3\mu_1 \int_{\Omega} u^4 \leq 3 \int_{\Omega} u^2 w + \frac{3\chi_1^2}{2\varepsilon} \int_{\Omega} u^3 |\nabla w|^2. \quad (10)$$

同样地, 对系统(1)中的第二个方程两端同乘 v^2 并积分, 得

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^3 + 2(1-\varepsilon) \int_{\Omega} v |\nabla v|^2 + \mu_2 \int_{\Omega} v^4 \leq \int_{\Omega} v^2 w + r \int_{\Omega} uv^3 + \frac{\chi_2^2}{2\varepsilon} \int_{\Omega} v^3 |\nabla w|^2. \quad (11)$$

对系统(1)中的第三个方程两端同乘 w^2 并积分, 得

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w^3 = -2 \int_{\Omega} w |\nabla w|^2 + \int_{\Omega} uw^2 + \int_{\Omega} vw^2 - \int_{\Omega} w^3, \quad (12)$$

整理(10)~(12)式可以得到(7), 则该引理得证。

引理 5 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 4, 5$) 为边界光滑的有界凸区域, 则对任意的 $t \in (0, T_{\max})$, 以下能量不等式成立:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla w|^6 + 3 \int_{\Omega} |\nabla w|^2 |\nabla |\nabla w||^2 + 6 \int_{\Omega} |\nabla w|^6 \leq 3(n+8) \int_{\Omega} u^2 |\nabla w|^4 + 3(n+8) \int_{\Omega} v^2 |\nabla w|^4, \quad (13)$$

证明: 令 $z = |\nabla w|^2$, 则 $|\nabla w|^6 = z^3$, 关于时间 t 求导,

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} z^3 = 2 \int_{\Omega} z^2 \nabla w \cdot \nabla w_t, \quad (14)$$

由 $w_t = \Delta w + u + v - w$ 并利用恒等式 $2\nabla w \cdot \nabla \Delta w = \Delta z - 2|D^2 w|^2$, 进行分部积分可得

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} z^3 = -2 \int_{\Omega} z |\nabla z|^2 - 2 \int_{\Omega} z^2 |D^2 w|^2 + 2 \int_{\Omega} z^2 \nabla u \cdot \nabla w + 2 \int_{\Omega} z^2 \nabla v \cdot \nabla w - 2 \int_{\Omega} z^3.$$

$$2 \int_{\Omega} z^2 \nabla u \cdot \nabla w = -2 \int_{\Omega} u z^2 \Delta w - 8 \int_{\Omega} u z \nabla w \cdot \nabla z.$$

利用 $|\Delta w|^2 \leq n |D^2 w|^2$ 以及 young 不等式进行放缩, 可得 $-2 \int_{\Omega} u z^2 \Delta w \leq n \int_{\Omega} u^2 z^2 + \int_{\Omega} z^2 |D^2 w|^2$, 进一步可以有 $-8 \int_{\Omega} u z \nabla w \cdot \nabla z \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} z |\nabla z|^2 + 32 \int_{\Omega} u^2 z^2$, 合并可得,

$$2 \int_{\Omega} z^2 \nabla u \cdot \nabla w \leq (n+8) \int_{\Omega} u^2 z^2 + \int_{\Omega} z^2 |D^2 w|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} z |\nabla z|^2.$$

同理有, $2 \int_{\Omega} z^2 \nabla v \cdot \nabla w \leq (n+8) \int_{\Omega} v^2 z^2 + \int_{\Omega} z^2 |D^2 w|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} z |\nabla z|^2$. 化简可得

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} z^3 \leq - \int_{\Omega} z |\nabla z|^2 - 2 \int_{\Omega} z^3 + (n+8) \int_{\Omega} u^2 z^2 + (n+8) \int_{\Omega} v^2 z^2,$$

从而有 $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla w|^6 + 3 \int_{\Omega} |\nabla w|^2 |\nabla |\nabla w|^2|^2 + 6 \int_{\Omega} |\nabla w|^6 \leq 3(n+8) \int_{\Omega} u^2 |\nabla w|^4 + 3(n+8) \int_{\Omega} v^2 |\nabla w|^4$, 证毕。

引理 6 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n=4,5$) 为边界光滑的有界凸区域, (u, v, w) 是趋化系统(1)的解, 则存在与系统参数无关的正常数 ε_1 和 ε_2 , 对 $\forall t \in (0, T_{\max})$, 以下不等式成立:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u |\nabla w|^4 + 4 \int_{\Omega} u |\nabla w|^4 + \int_{\Omega} u |\nabla |\nabla w|^2|^2 + \left(\mu_1 - \frac{\chi_0^2}{2\varepsilon_1} \right) \int_{\Omega} u^2 |\nabla w|^4 \\ & \leq 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \int_{\Omega} |\nabla w|^2 |\nabla |\nabla w|^2|^2 + \frac{2}{\varepsilon_2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 |\nabla w|^2 + \int_{\Omega} w |\nabla w|^4 \\ & \quad + \left(1 + \frac{n}{4} \right) \int_{\Omega} u^3 |\nabla w|^2 + 4 \int_{\Omega} u |\nabla w|^2 \nabla v \cdot \nabla w, \end{aligned} \quad (15)$$

以及

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v |\nabla w|^4 + 4 \int_{\Omega} v |\nabla w|^4 + \int_{\Omega} v |\nabla |\nabla w|^2|^2 + \left(\mu_2 - \frac{\chi_2^2}{2\varepsilon_1} \right) \int_{\Omega} v^2 |\nabla w|^4 \\ & \leq 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \int_{\Omega} |\nabla w|^2 |\nabla |\nabla w|^2|^2 + \frac{2}{\varepsilon_2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 |\nabla w|^2 + \int_{\Omega} w |\nabla w|^4 \\ & \quad + \left(1 + \frac{n}{4} \right) \int_{\Omega} v^3 |\nabla w|^2 + 4 \int_{\Omega} v |\nabla w|^2 \nabla u \cdot \nabla w + r \int_{\Omega} uv |\nabla w|^4. \end{aligned} \quad (16)$$

证明 应用(1)中关于 u 的方程和关于 w 方程, 并在区域 Ω 上积分, 可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u |\nabla w|^4 &= \int_{\Omega} |\nabla w|^4 \left(\Delta u - \nabla \cdot \left(\frac{\chi_0 u}{1+ku} \nabla w \right) + w - \mu_1 u^2 \right) + 4 \int_{\Omega} u |\nabla w|^2 \nabla w \cdot \nabla (\Delta w + u + v - w) \\ &= -4 \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \nabla u \cdot \nabla |\nabla w|^2 + 2 \chi_0 \int_{\Omega} \frac{u}{1+ku} |\nabla w|^2 \nabla w \cdot \nabla |\nabla w|^2 + \int_{\Omega} w |\nabla w|^4 \\ & \quad - \mu_1 \int_{\Omega} u^2 |\nabla w|^4 + 2 \int_{\partial \Omega} u |\nabla w|^2 \frac{\partial |\nabla w|^2}{\partial \nu} - 2 \int_{\Omega} u |\nabla |\nabla w|^2|^2 - 4 \int_{\Omega} u |\nabla w|^2 |D^2 w|^2 \\ & \quad - 4 \int_{\Omega} u |\nabla w|^4 + 4 \int_{\Omega} u |\nabla w|^2 \nabla u \cdot \nabla w + 4 \int_{\Omega} u |\nabla w|^2 \nabla v \cdot \nabla w, \end{aligned} \quad (17)$$

对 $\forall t \in (0, T_{\max})$ 成立。根据 Ω 的凸性假设以及 $\frac{\partial w}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0$, 可确保在 $\partial \Omega \times (0, T_{\max})$ 有

$$\frac{\partial |\nabla w|^2}{\partial \nu} \leq 0. \quad (18)$$

又因为 $\frac{u}{1+ku} \leq \frac{1}{k}$, 则有 $\chi_1 = \frac{\chi_0}{1+ku} \leq \frac{\chi_0}{k}$, 从而有

$$2\chi_0 \int_{\Omega} u |\nabla w|^2 \nabla w \cdot \nabla |\nabla w|^2 \leq 2\epsilon_1 \int_{\Omega} |\nabla w|^2 |\nabla |\nabla w|^2|^2 + \frac{\chi_0^2}{2\epsilon_1} \int_{\Omega} u^2 |\nabla w|^4, \quad (19)$$

以及

$$-4 \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \nabla u \cdot \nabla |\nabla w|^2 \leq 2\epsilon_2 \int_{\Omega} |\nabla w|^2 |\nabla |\nabla w|^2|^2 + \frac{2}{\epsilon_2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 |\nabla w|^2, \quad (20)$$

对 $\forall t \in (0, T_{\max})$ 成立, 其中 ϵ_1 和 ϵ_2 为与系统参数 μ_i , χ_i ($i=1,2$) 及 r 无关的常数。因此有

$$\begin{aligned} & 4 \int_{\Omega} u |\nabla w|^2 \nabla u \cdot \nabla w \\ &= -2 \int_{\Omega} u^2 |\nabla w|^2 \Delta w - 2 \int_{\Omega} u^2 \nabla w \cdot \nabla |\nabla w|^2 \\ &\leq \frac{n}{4} \int_{\Omega} u^3 |\nabla w|^2 + 4 \int_{\Omega} u |\nabla w|^2 |D^2 w|^2 + \int_{\Omega} u |\nabla |\nabla w|^2|^2 + \int_{\Omega} u^3 |\nabla w|^2, \end{aligned} \quad (21)$$

结合(17)~(21), 即可得到(15)。同理, 结合(1)中关于 v 的方程和关于 w 方程, 可证明(16)。

引理 7 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n=4,5$) 为凸区域, (u,v,w) 是趋化系统(1)的解, 则对 $\forall \varepsilon \in (0,1)$, 存在与系统参数无关的正常数 ε_3 和 ε_4 , 对 $\forall t \in (0, T_{\max})$, 以下不等式成立:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 |\nabla w|^2 + 2 \left(1 - \frac{2\epsilon}{3}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 |\nabla w|^2 + 2 \int_{\Omega} u^2 |\nabla w|^2 + 2 \left(\mu_1 - \frac{\chi_0^2}{4\epsilon_3}\right) \int_{\Omega} u^3 |\nabla w|^2 \\ &\leq \frac{3\chi_0^2}{2\epsilon} \int_{\Omega} \frac{u^2}{(1+ku)^2} |\nabla w|^4 + \frac{2}{\epsilon_4} \int_{\Omega} u |\nabla u|^2 + \frac{3}{\epsilon} \int_{\Omega} u^4 + 2(\epsilon_3 + \epsilon_4) \int_{\Omega} u |\nabla |\nabla w|^2|^2 \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} uw |\nabla w|^2 + \frac{2\epsilon}{3} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 |\nabla w|^2, \end{aligned} \quad (22)$$

以及

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^2 |\nabla w|^2 + 2 \left(1 - \frac{2\epsilon}{3}\right) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 |\nabla w|^2 + 2 \int_{\Omega} v^2 |\nabla w|^2 + 2 \left(\mu_2 - \frac{\chi_2^2}{4\epsilon_3}\right) \int_{\Omega} v^3 |\nabla w|^2 \\ &\leq \frac{3\chi_2^2}{2\epsilon} \int_{\Omega} v^2 |\nabla w|^4 + \frac{2}{\epsilon_4} \int_{\Omega} v |\nabla v|^2 + \frac{3}{\epsilon} \int_{\Omega} v^4 + 2(\epsilon_3 + \epsilon_4) \int_{\Omega} v |\nabla |\nabla w|^2|^2 \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} vw |\nabla w|^2 + \frac{2\epsilon}{3} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 |\nabla w|^2 + 2r \int_{\Omega} uv^2 |\nabla w|^2. \end{aligned} \quad (23)$$

证明: 通过直接计算 u^2 与 $|\nabla w|^2$ 的耦合项, 可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 |\nabla w|^2 &= 2 \int_{\Omega} u |\nabla w|^2 (\Delta u - \chi_1 \nabla \cdot (u \nabla w) + w - \mu_1 u^2) + 2 \int_{\Omega} u^2 \nabla w \cdot \nabla (\Delta w + u + v - w) \\ &= -2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 |\nabla w|^2 - 4 \int_{\Omega} u \nabla u \cdot \nabla |\nabla w|^2 + 2 \chi_1 \int_{\Omega} u |\nabla w|^2 \nabla u \cdot \nabla w \\ &\quad + 2 \chi_1 \int_{\Omega} u^2 \nabla w \cdot \nabla |\nabla w|^2 + 2 \int_{\Omega} uw |\nabla w|^2 - 2 \mu_1 \int_{\Omega} u^3 |\nabla w|^2 + 2 \int_{\Omega} u^2 \nabla u \cdot \nabla w \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} u^2 \nabla v \cdot \nabla w - 2 \int_{\Omega} u^2 |\nabla w|^2 + \int_{\partial \Omega} u^2 \frac{\partial |\nabla w|^2}{\partial \nu} - 2 \int_{\Omega} u^2 |D^2 w|^2. \end{aligned} \quad (24)$$

对 $\forall t \in (0, T_{\max})$ 成立。如前所述, 在 $\partial\Omega \times (0, T_{\max})$ 有

$$\frac{\partial |\nabla w|^2}{\partial \nu} \leq 0. \quad (25)$$

对 $\forall t \in (0, T_{\max})$, 存在与系统参数 μ_i , χ_i ($i=1,2$) 及 r 无关的常数 $\varepsilon_3 > 0$ 和 $\varepsilon_4 > 0$, 通过利用 young 不等式可得

$$2\chi_1 \int_{\Omega} u^2 \nabla w \cdot \nabla |\nabla w|^2 \leq 2\varepsilon_3 \int_{\Omega} u |\nabla |\nabla w|^2|^2 + \frac{\chi_1^2}{2\varepsilon_3} \int_{\Omega} u^3 |\nabla w|^2, \quad (26)$$

以及

$$-4 \int_{\Omega} u \nabla u \cdot \nabla |\nabla w|^2 \leq 2\varepsilon_4 \int_{\Omega} u |\nabla |\nabla w|^2|^2 + \frac{2}{\varepsilon_4} \int_{\Omega} u |\nabla u|^2. \quad (27)$$

此外, 对 $\forall t \in (0, T_{\max})$ 且 $\varepsilon \in (0,1)$, 还可得到

$$2 \int_{\Omega} u^2 \nabla u \cdot \nabla w \leq \frac{2\varepsilon}{3} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 |\nabla w|^2 + \frac{3}{2\varepsilon} \int_{\Omega} u^4, \quad (28)$$

$$2 \int_{\Omega} u^2 \nabla v \cdot \nabla w \leq \frac{2\varepsilon}{3} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 |\nabla w|^2 + \frac{3}{2\varepsilon} \int_{\Omega} u^4, \quad (29)$$

$$2\chi_1 \int_{\Omega} u |\nabla w|^2 \nabla u \cdot \nabla w \leq \frac{2\varepsilon}{3} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 |\nabla w|^2 + \frac{3\chi_1^2}{2\varepsilon} \int_{\Omega} u^2 |\nabla w|^4. \quad (30)$$

另外, 显然 $\forall t \in (0, T_{\max})$, 有 $-2 \int_{\Omega} u^2 |D^2 w|^2 \leq 0$ 成立。

将(26)~(30)代入(24), 即可证明(22)。同理可证明(23)式成立。

引理 8 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n=4,5$) 为凸区域, 初值 (u_0, v_0, w_0) 满足初始条件(2), (u, v, w) 是趋化系统(1)的解。

对任意的 $\varepsilon \in (0,1)$, 若死亡率参数 μ_1 和 μ_2 满足以下下界条件:

$$\mu_1 > \frac{1}{3} \left[\sqrt{\frac{3}{\varepsilon^2}} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} + \sqrt{\frac{3n}{2\varepsilon}} + 2\sqrt{n+8} \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\varepsilon}} \right) \right] \chi_0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2} \right) r + 1, \quad (31)$$

$$\mu_2 > \frac{1}{3} \left[\sqrt{\frac{3}{\varepsilon^2}} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} + \sqrt{\frac{3(n+4)}{2\varepsilon}} + 2\sqrt{n+8} \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\varepsilon}} \right) \right] \chi_2 + \frac{1}{2} r + 1, \quad (32)$$

则存在正常数 $K_1 > 0$ 和 $K_2 > 0$, 对所有的 $\forall t \in (0, T_{\max})$, 有

$$\|u\|_{L^3(\Omega)} + \|v\|_{L^3(\Omega)} + \|w\|_{L^3(\Omega)} + \|\nabla w\|_{L^6(\Omega)} \leq K_1, \quad (33)$$

$$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K_2, \quad (34)$$

证明: 证明细节参考[8]。

5. 主要定理的证明

定理 1 的证明 第一步: 设 $t \in (0, T_{\max})$, 定义

$$M(T) := \sup_{t \in T} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

利用方程 $u_t = \Delta u - \nabla \cdot \left(\frac{\chi_0 u}{1+ku} \nabla w \right) + w - \mu_1 u^2$, 其半群表示为

$$\begin{aligned}
u(\cdot, t) &= e^{(t-t_0)\Delta} u(\cdot, t_0) - \int_{t_0}^t e^{(t-s)\Delta} \nabla \cdot \left(\frac{\chi_0 u}{1+ku} \nabla w \right) (\cdot, s) ds + \int_{t_0}^t e^{(t-s)\Delta} (w(\cdot, s) - \mu_1 u^2(\cdot, s)) ds \\
&=: u_1(\cdot, t) + u_2(\cdot, t) + u_3(\cdot, t).
\end{aligned} \quad (35)$$

其中 $t_0 = (t+1)_+$ 。

第二步: 估计 $u_1(\cdot, t)$ 、 $u_2(\cdot, t)$ 、 $u_3(\cdot, t)$ 。利用最大值原理, 对 $\forall t \in (0, 1]$ 时,

$$\|u_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \|e^{(t-t_0)\Delta} u(\cdot, t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u(\cdot, t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M(T) \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}。$$

当 $\forall t > 1$ 时, 利用 Neumann 热半群的标准 $L^p - L^q$ 估计, 存在 $C_1 > 0$, 使得

$$\|u_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 (t-t_0)^{-\frac{n}{2}} \|u(\cdot, t_0)\|_{L^1(\Omega)} = C_1 \|u(\cdot, t_0)\|_{L^1(\Omega)} \leq C_1 M(T), \quad (36)$$

对 $\forall t \in (0, T_{\max})$, $u_3(\cdot, t) = \int_{t_0}^t e^{(t-s)\Delta} (w(\cdot, s) - \mu_1 u^2(\cdot, s)) ds$ 。由已得的 L^∞ 估计可知, $\sup_{x \in \Omega} \|w(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq K_2$

且 $-\mu_1 u^2 \leq 0$, 故 $u_3(\cdot, t) \leq \int_{t_0}^t e^{(t-s)\Delta} w(\cdot, s) ds \leq K_2 \int_{t_0}^t ds = K_2 (t-t_0)$ 。

利用 Neumann 热半群的正则化估计, 对任意 $p \in (n, 6)$, 存在 $C_2 > 0$, 使得

$$u_2(\cdot, t) = - \int_{t_0}^t e^{(t-s)\Delta} \nabla \cdot \left(\frac{\chi_0 u}{1+ku} \nabla w \right) (\cdot, s) ds \leq \|e^{(t-s)\Delta} \nabla \cdot f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_2 (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2p}} \|f\|_{L^p(\Omega)}。 \quad (37)$$

取 $f = \frac{\chi_0 u}{1+ku} \nabla w$, 注意到饱和项满足 $\frac{1}{1+ku} \leq 1$, 故 $|f| \leq \chi_0 |u \nabla w|$, 因此

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \chi_0 \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^p(\Omega)}。$$

再由 Hölder 不等式, 存在 $a \in (0, 1)$ 使得

$$\|\nabla w\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla w\|_{L^\infty}^{1-a} \|\nabla w\|_{L^2}^a。 \quad (38)$$

又因为 $\|\nabla w\|_{L^2} \leq C$, $\|\nabla w\|_{L^\infty} \leq K_2$, 故可得

$$\|u_2(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_2 \chi_0 \int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2p}} \|u\|_{L^\infty} \|\nabla w\|_{L^p} ds \leq CM(T) \int_0^1 \eta^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2p}} d\eta。 \quad (39)$$

结合(36)~(39)式, 对 $\forall t \in (0, T_{\max})$, 存在常数 $C_3 > 0$, 有

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} &= \sup_{x \in \Omega} u(x, t) \\
&\leq \sup_{x \in \Omega} u_1(x, t) + \sup_{x \in \Omega} u_2(x, t) + \sup_{x \in \Omega} u_3(x, t) \\
&\leq C_3 + C_3 M^a(T).
\end{aligned} \quad (40)$$

因此可得到, $M(T) \leq \max \left\{ 1, (2C_3)^{\frac{1}{1-a}} \right\}$, 则 $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K_1$ 得证。接下来, 又因为

$$ruv - \mu_2 v^2 \leq rK_3 v - \mu_2 v^2 \leq \frac{(rK_3)^2}{4\mu_2}。 \quad (41)$$

利用(41)式, 可通过与 u 完全相同的方法证明 $\|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K_2$ 。再由抛物正则性可得

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K_3。$$

则定理 1.1 得证。

6. 结论与展望

本文研究含饱和型密度依赖奇异敏感性的高维斑秃三组分趋化系统,改进传统常数趋化敏感性假设,更贴合免疫细胞迁移的生物调控机制。在光滑边界有界凸区域内,通过能量泛函、不等式估计与热半群理论,证明当 Logistic 阻尼与死亡率参数满足下界条件时,系统存在唯一、全局一致有界的经典解,证实强阻尼可抑制细胞过度聚集,避免爆破。研究将低维结果拓展至高维,完善了斑秃趋化模型理论体系。

后续可引入空间异质性、多细胞耦合及时滞优化模型。理论上探究稳态、渐近稳定性与弱阻尼爆破机制;数值上开展高维模拟与临床数据拟合,探索靶向干预策略,为斑秃诊疗提供理论支撑。

基金项目

本研究得到新疆维吾尔自治区基本科研业务项目(项目编号: XJEDU2026P028)和新疆农业大学 2024 年度大学生创新训练计划项目(项目编号: dxsc2024603)的资助。

参考文献

- [1] Gilhar, A., Etzioni, A. and Paus, R. (2012) Alopecia Areata. *New England Journal of Medicine*, **366**, 1515-1525. <https://doi.org/10.1056/nejmra1103442>
- [2] Dobrev, A., Paus, R. and Cogan, N.G. (2020) Toward Predicting the Spatio-Temporal Dynamics of Alopecia Areata Lesions Using Partial Differential Equation Analysis. *Bulletin of Mathematical Biology*, **82**, Article No. 34. <https://doi.org/10.1007/s11538-020-00707-0>
- [3] Lou, Y. and Tao, Y. (2021) The Role of Local Kinetics in a Three-Component Chemotaxis Model for Alopecia Areata. *Journal of Differential Equations*, **305**, 401-427. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.10.020>
- [4] Tao, Y. and Xu, D. (2022) Combined Effects of Nonlinear Proliferation and Logistic Damping in a Three-Component Chemotaxis System for Alopecia Areata. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **66**, Article ID: 103517. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2022.103517>
- [5] Horstmann, D. and Winkler, M. (2005) Boundedness vs. Blow-Up in a Chemotaxis System. *Journal of Differential Equations*, **215**, 52-107. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.10.022>
- [6] Tao, Y. and Wang, Z. (2013) Competing Effects of Attraction vs. Repulsion in Chemotaxis. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **23**, 1-36. <https://doi.org/10.1142/s0218202512500443>
- [7] Fujie, K., Ito, A., Winkler, M. and Yokota, T. (2016) Stabilization in a Chemotaxis Model for Tumor Invasion. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **36**, 151-169. <https://doi.org/10.3934/dcds.2016.36.151>
- [8] Zhang, W., Xu, L. and Xin, Q. (2023) Global Boundedness of a Higher-Dimensional Chemotaxis System on Alopecia Areata. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **20**, 7922-7942. <https://doi.org/10.3934/mbe.2023343>