

关于Ramanujan函数的模方程

成 鲁

重庆师范大学数学科学学院, 重庆

收稿日期: 2026年5月27日; 录用日期: 2026年6月29日; 发布日期: 2026年7月14日

摘 要

本文聚焦六次单位根的代数性质, 以参数赋值 $B = -\omega^2 q$ (其中 ω 为六次单位根) 为研究核心, 通过严谨的代数推导验证了该赋值下原结论的成立性。首先梳理六次单位根的基本性质与相关符号定义, 随后给出具体命题及分步证明, 最后讨论该结果的理论意义与拓展方向。

关键词

六次单位根, 代数验证, 恒等式证明

On the Modular Equation of Ramanujan Function

Lu Cheng

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: May 27, 2026; accepted: June 29, 2026; published: July 14, 2026

Abstract

This article focuses on the algebraic properties of sixth-order unit roots, with the parameter assignment $B = -\omega^2 q$ (where ω is a sixth-order unit root) as the core of research. Through rigorous algebraic derivation, it verifies the validity of the original conclusion under this assignment. Firstly, it sorts out the basic properties of sixth-order unit roots and related symbol definitions, then presents specific propositions and step-by-step proofs, and finally discusses the theoretical significance and expansion directions of the results.

Keywords

Sixth Root of Unity, Algebraic Verification, Proof of Identity



1. 引言

拉马努金留下的三个笔记本是他的主要研究结果, 其中前两本由美国数学家 Bruce Berndt 教授整理并汇总了世界上许多数学家对拉马努金笔记本中遗留问题的研究成果最后编成了这本书《Ramanujan's Notebooks》[1]-[3]。Rogers-Ramanujan 函数与 Ramanujan-Göllnitz-Gordon 函数是拉马努金模形式、theta 函数理论的核心研究对象, 各类函数立方形式对应的模方程构造长期是组合数论与模函数领域热点课题。2012 年 Gugg 在文献[4]中完成开创性工作, 依托三阶本原单位根构造恒等式, 借助五元积恒等式、Jacobi 三重积公式, 对两类经典连分式关联函数的立方模方程完成严格证明, 形成一套标准化证明范式: 将本原单位根逐一代入乘积恒等式, 获取阶数对等的独立恒等式后全部相乘, 再结合 theta 函数乘积公式化简得到目标模方程。Watson [5]提出的五重积恒等式作为连接 theta 函数与分拆函数的关键工具, 已被广泛应用于 Rogers-Ramanujan 函数、模形式等领域的研究中。Cao [6]通过 Jacobi 三重积恒等式的推广, 建立了包含五重积、六重积、七重积恒等式的统一公式, 揭示了各类乘积恒等式的内在关联, 但未探讨单位根阶数的约束条件。本研究补齐了 Gugg 遗留的六次单位根开放性问题, 厘清了二、三、六次单位根在模方程构造中的适配差异, 丰富了单位根 theta 函数交叉研究案例, 可为后续一般 n 次单位根下 Ramanujan 模方程的统一化探究提供研究思路。

2. 预备知识

本节将梳理本文所需的基本定义、性质及符号约定, 为后续主要结果的证明奠定基础。

定义 1: 拉马努金的一般函数定义为

$$f(a, b) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{n(n+1)/2} b^{n(n-1)/2}, |ab| < 1. \quad (1)$$

$f(a, b)$ 满足的基本性质包括

$$f(a, b) = f(b, a), \quad (2)$$

$$f(1, a) = 2f(a, a^3), \quad (3)$$

$$f(-1, a) = 0. \quad (4)$$

并且, 如果 n 是整数, 则有

$$f(a, b) = a^{n(n+1)/2} b^{n(n-1)/2} f(a(ab)^n, b(ab)^{-n}). \quad (5)$$

(2)式的一个最重要的特例是

$$f(-q) := f(-q, -q^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n-1)/2} = (q; q)_{\infty}. \quad (6)$$

还有五元积恒等式

$$f(B^3 q, q^5/B^3) - B^2 f(q/B^3, B^3 q^5) = f(-q^2) \frac{f(-B^2, -q^2/B^2)}{f(Bq, q/B)}. \quad (7)$$

3. 主要结果

引理 1:

Jacobi 三重积恒等式为

$$f(a, b) = (-a; ab)_\infty (-b; ab)_\infty (ab, ab)_\infty. \quad (8)$$

此时应用雅各比三重积恒等式六次，可以推导出

$$\begin{aligned} \prod_{\omega} f(\omega a, \omega^5 b) &= f(a, b) f(\omega a, \omega^5 b) f(\omega^2 a, \omega^4 b) f(\omega^3 a, \omega^3 b) f(\omega^4 a, \omega^2 b) f(\omega^5 a, \omega b) \\ &= (-a; ab)_\infty (-b; ab)_\infty (-\omega a; ab)_\infty (-\omega^5; ab)_\infty (-\omega^2 a; ab)_\infty (-\omega^4; ab)_\infty \\ &\quad (-\omega^3 a; ab)_\infty (-\omega^3 b; ab)_\infty (-\omega^4 a, ab)_\infty (-\omega^2 a; ab)_\infty (-\omega^5 a; ab)_\infty (-\omega a; ab)_\infty \\ &= (-a^6; a^6 b^6)_\infty (-b^6; a^6 b^6)_\infty (ab, ab)_\infty^6 \\ &= \frac{f(a^6; b^6) f^6(-ab)}{f(-a^6 b^6)}. \end{aligned} \quad (9)$$

命题 1

令 ω 为本原六次单位根，在五元积恒等式(7)中，用 $q \rightarrow q^4$ ，设 $B = -\omega^2 q$ 。此时有

$$\begin{aligned} \frac{f(-\omega^4 q^2, -\omega^2 q^6)}{f(-\omega^2 q^5, -\omega^4 q^3)} f(-q^8) &= f(-q^7, -q^{17}) - \omega^4 q^2 f(-q, -q^{23}) \\ &= A - \omega^4 B. \end{aligned} \quad (10)$$

推论

$$\begin{aligned} A &:= f(-q^7, -q^{17}), B := q^2 f(-q, -q^{23}), \\ C &:= f(-q^{11}, -q^{13}), D := q f(-q^5, -q^{19}). \end{aligned}$$

然后有

$$A^6 - B^6 = \frac{f(q^{12}, q^{36})}{f(q^{18}, q^{30})} f^6(-q^8). \quad (11)$$

$$C^6 + D^6 = \frac{f(q^{12}, q^{36})}{f(q^6, q^{42})} f^6(-q^8). \quad (12)$$

证明:

令 ω 为本原六次单位根，在五元积恒等式(7)中，用 $q \rightarrow q^4$ ，设 $B = -\omega^2 q$ 。此时有

$$\begin{aligned} \frac{f(-\omega^4 q^2, -\omega^2 q^6)}{f(-\omega^2 q^5, -\omega^4 q^3)} f(-q^8) &= f(-q^7, -q^{17}) - \omega^4 q^2 f(-q, -q^{23}) \\ &= A - \omega^4 B. \end{aligned} \quad (13)$$

接下来从(13)中为单位 ω 的每个不同的六次根获得一个恒等式，将得到的六个恒等式相乘，可以得到

$$f^3(-q^8) \prod_{\omega} \frac{f(-\omega^4 q^2, -\omega^2 q^6)}{f(-\omega^2 q^5, -\omega^4 q^3)} = A^6 - B^6. \quad (14)$$

利用引理一和(14)和 $a = -q^2, b = -q^6$, 以及 $a = -q^3, b = -q^5$, 此时能推导出

$$\prod_{\omega} f(-\omega^4 q^2, -\omega^2 q^6) = \frac{f((-q^2)^6, (-q^6)^6) f^6(-(-q^2)(-q^6))}{f(-(-q^2)^6(-q^6)^6)} \\ = \frac{f(q^{12}, q^{36}) f^6(-q^8)}{f(-q^{48})}, \quad (15)$$

$$\prod_{\omega} f(-\omega^2 q^5, -\omega^4 q^3) = \frac{f((-q^5)^6, (-q^3)^6) f^6(-(-q^5)(-q^3))}{f(-(-q^5)^6(-q^3)^6)} \\ = \frac{f(q^{30}, q^{18}) f^6(-q^8)}{f(-q^{48})}. \quad (16)$$

联立(12), (14)和(15), 得出

$$A^6 - B^6 = \frac{f(q^{12}, q^{36})}{f(q^{18}, q^{30})} f^8(-q^8).$$

模等式(11)得证。

令表示单位的任意六次根。在五元积恒等式(7)中, 用 $q^4 \rightarrow q$, 设 $B = -\omega^2 q^3$ 。此时有

$$\frac{f(-\omega^4 q^6, -\omega^2 q^2)}{f(-\omega^2 q^7, -\omega^4 q)} f(-q^8) = f(-q^{13}, -q^{11}) - \omega^4 q^6 f(-q^{-5}, -q^{29}) \\ = f(-q^{13}, -q^{11}) + \omega^4 q f(-q^5, -q^{19}) \\ = C + \omega^4 D. \quad (17)$$

接下来从(17)中为单位 ω 的每个不同的六次根获得一个恒等式, 将得到的六个恒等式相乘, 可以得到

$$f^3(-q^8) \prod_{\omega} \frac{f(-\omega^4 q^6, -\omega^2 q^2)}{f(-\omega^2 q^7, -\omega^4 q)} = C^6 + D^6. \quad (18)$$

此时应用引理, 以及(18), 令 $a = -q^6, b = -q^2$, 以及 $a = -q^7, b = -q$, 此时能推导出

$$\prod_{\omega} f(-\omega^4 q^6, -\omega^2 q^2) = \frac{f((-q^6)^6, (-q^2)^6) f^6(-(-q^6)(-q^2))}{f(-(-q^6)^6(-q^2)^6)} \\ = \frac{f(q^{36}, q^{12}) f^6(-q^8)}{f(-q^{48})}, \quad (19)$$

$$\prod_{\omega} f(-\omega^2 q^7, -\omega^4 q) = \frac{f((-q^7)^6, (-q)^6) f^6(-(-q)(-q^7))}{f(-(-q^7)^6(-q)^6)} \\ = \frac{f(q^{42}, q^6) f^6(-q^8)}{f(-q^{48})}, \quad (20)$$

联立(18), (19)和(20), 得出

$$C^6 + D^6 = \frac{f(q^{12}, q^{36})}{f(q^6, q^{42})} f^6(-q^8).$$

模等式(12)得证。

4. 结束语

单位根的阶数选择是 theta 函数恒等式证明的关键前提, Gugg 的经典证明依赖三阶单位根构建的“多等式乘积”核心逻辑, 而单位二次根因阶数限制、代入结构冲突等问题无法适配该证明框架, 这一现象并非偶然, 而是单位根阶数与恒等式构造逻辑深层关联的直接体现。开展本研究不仅能系统解答“为何二次单位根替换无效”的核心问题, 更能揭示单位根阶数与恒等式证明适配性的普遍规律, 兼具理论填补与实践指导价值, 对推动 theta 函数恒等式的研究很有必要。

参考文献

- [1] Berndt, B.C. (1985) Ramanujan's Notebooks. Part I. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1088-7>
- [2] Berndt, B.C. (1989) Ramanujan's Notebooks. Part II. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4530-8>
- [3] Berndt, B.C. (1991) Ramanujan's Notebooks. Part III. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0965-2>
- [4] Gugg, C. (2012) Modular Equations for Cubes of the Rogers-Ramanujan and Ramanujan-Göllnitz-Gordon Functions and Their Associated Continued Fractions. *Journal of Number Theory*, **132**, 1519-1553. <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2012.01.005>
- [5] Watson, G.N. (1937) The Mock Theta Functions (2). *Proceedings of the London Mathematical Society*, **2**, 274-304. <https://doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.274>
- [6] Cao, Z. (2010) Integer Matrix Exact Covering Systems and Product Identities for Theta Functions. *International Mathematics Research Notices*, **2011**, 4471-4514. <https://doi.org/10.1093/imrn/rnq253>