

射影线性群 $\text{PGL}(2, p)$ 的一种新刻画

刘琳, 陈彦恒*, 贾松芳

重庆三峡科技大学数学与统计学院, 重庆

收稿日期: 2026年5月31日; 录用日期: 2026年6月30日; 发布日期: 2026年7月14日

摘要

不依赖有限单群分类定理, 证明了中心平凡的有限不可解群 G 若满足 $|G| = p(p^2 - 1)$ 且 $|G(p)| = p^2 - 1$, 则 $G \cong \text{PGL}(2, p)$, 其中 $p > 3$ 为素数, $G(p)$ 为 G 中所有 p 阶元的集合。这一结论在 Moretó 猜想的框架下, 通过引入中心平凡和不可解条件, 成功将其推广并验证几乎单群 $\text{PGL}(2, p)$ 。

关键词

射影线性群, 群阶, 最大素阶元个数, 数量刻画

A New Characterization of the Projective Linear Group $\text{PGL}(2, p)$

Lin Liu, Yanheng Chen*, Songfang Jia

College of Mathematics and Statistics, Chongqing Sanxia University of Science and Technology, Chongqing

Received: May 31, 2026; accepted: June 30, 2026; published: July 14, 2026

Abstract

Without relying on the classification of finite simple groups, we prove that if G is a finite insoluble group with a trivial center satisfying $|G| = p(p^2 - 1)$ and $|G(p)| = p^2 - 1$, then $G \cong \text{PGL}(2, p)$, where $p > 3$ is a prime and $G(p)$ is the set of elements of order p in G . This conclusion, within the framework of Moretó's conjecture and through the introduction of central triviality and non-solvability conditions, successfully generalizes the conjecture and verifies it for the almost simple group $\text{PGL}(2, p)$.

*通讯作者。

文章引用: 刘琳, 陈彦恒, 贾松芳. 射影线性群 $\text{PGL}(2, p)$ 的一种新刻画[J]. 理论数学, 2026, 16(7): 6-10.
DOI: 10.12677/pm.2026.167167

Keywords

Projective Linear Groups, Group Order, Number of Elements of Maximal Prime Order, Quantitative Characterization

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文所讨论的单群均指非交换单群。设 G 是一个有限群, $|G|$ 表示 G 的阶, $\pi(G)$ 表示 $|G|$ 的素因子集合, $\pi_e(G)$ 表示 G 中元素的阶之集合。对于正整数 k , 用 $G(k)$ 表示 G 中所有阶为 k 的元素构成的集合, $|G(k)|$ 表示 G 中阶为 k 的元素个数, 并定义 $\text{nse}(G) := \{|G(k)| \mid k \in \pi_e(G)\}$ 。其它未说明的符号都是标准的, 可参见文献[1]。

在有限群的研究中, 单群的数量特征与其结构特征之间的联系, 已被众多群论学者广泛研究, 并取得了丰富的成果。尤其在利用“群的阶”和“元素的阶之集”刻画有限单群方面, 取得了完整结果, 证明了所有有限单群均可由此“两个阶”唯一确定, 参见文献[2][3]。

设 S 是一个有限单群, 若群 G 满足 $S \leq G \leq \text{Aut}(S)$, 则称 G 是相对于 S 的几乎单群。从该定义可以看出, 几乎单群作为有限单群的自然拓展, 它与有限单群有相近的性质且有相对明确的结构与丰富的数量特征, 故也成为数量刻画研究的重要对象。例如, $\text{PGL}(2, p)$ 就是单群 $\text{PSL}(2, p)$ 的一个几乎单群, 常被作为典型例子加以研究。

Rolf Brandl 与施武杰在文献[4]中用“元素阶的集合”(即阶谱)刻画了 $\text{PSL}(2, q)$, 其中 q 为素数方幂且 $q \neq 9$; 而 Moghaddamfar 等人在文献[5]中进一步利用阶谱刻画几乎单群 $\text{PGL}(2, p)$ 。邵长国和蒋琴会在文献[6]中证明了群 G 若满足 $\text{nse}(G) = \text{nse}(\text{PSL}(2, p))$ 且 $p \mid |G|$, 则 $G \cong \text{PSL}(2, p)$, 其中 $p > 3$ 是素数; 而 Asboei 在文献[7]中证明了群 G 若满足 $\text{nse}(G) = \text{nse}(\text{PGL}(2, p))$, $p \in \pi(G)$ 但 $p^2 \nmid |G|$, 则 $G \cong \text{PGL}(2, p)$ 。陈彦恒与陈贵云在文献[8]中用群阶和一个特殊共轭类长刻画了 $\text{PSL}(2, p)$ 。随后, 陈彦恒等人在文献[9]中将此方法推广至几乎单群 $\text{PGL}(2, p)$ 。值得一提的是, 文献[6][9]借助于 Brauer 和 Reynolds 1958 年的结论[10], 证明过程中避免了有限单群分类定理的使用。由上面的讨论, 我们知道 $\text{PSL}(2, p)$ 的数量刻画途径可为研究 $\text{PGL}(2, p)$ 提供直接启示。

近期, Moretó 在文献[11]提出如下猜想, 并证明了当 p 是一个非梅森素数时, 该猜想对 $\text{PSL}(2, p)$ 成立。

Moretó 猜想 设 G 为有限群, S 为有限单群, p 是 $|S|$ 的最大素因子。若 $|G| = |S|$ 且 $|G(p)| = |S(p)|$, 则 $G \cong S$ 。

通过上面的分析, 很自然提出问题: 能否把该猜想推广到 $\text{PGL}(2, p)$? 基于此, 我们在 p 是大于 3 非梅森素数条件下, 尝试利用群阶和最大素阶元个数刻画 $\text{PGL}(2, p)$, 证明了若有限群 G 满足 $|G| = p(p^2 - 1)$ 且 $|G(p)| = p^2 - 1$, 则 $G/Z(G) \cong \text{PSL}(2, p)$ 或 $G \cong \text{PGL}(2, p)$ 。

值得注意的是, Moretó 猜想并不是对所有单群成立, 文献[12]给出多对反例。我们还发现如下反例[13], 若群 G 满足 $|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ 且 $|G(p)| = 2^4 \cdot 3$, 则 G 必同构于下列群之一: $((\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_7) \rtimes \mathbb{Z}_3$, $((\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_7) \times \mathbb{Z}_3$, $\text{PSL}(2, 7)$ 。进一步观察发现, 若对群 G 附加非可解性条件, 则可由群阶和最大素阶元的个数唯一确定 $\text{PSL}(2, 7)$ 。因此我们在 p 为梅森素数的情况下添加非可解条件, 尝试利用群阶和最大素阶元个数刻画 $\text{PGL}(2, p)$, 获得类似结论: 若有限不可解群 G 满足 $|G| = p(p^2 - 1)$ 且

$|G(p)| = p^2 - 1$, 则 $G/Z(G) \cong \text{PSL}(2, p)$ 或 $G \cong \text{PGL}(2, p)$ 。

综合上面两方面的结论, 发现无论 p 是否为梅森素数, 在假定 G 不可解群时均可得到: $G/Z(G) \cong \text{PSL}(2, p)$ 或 $G \cong \text{PGL}(2, p)$ 。因此, 在 Moretó 猜想的框架下, 基于引入的不可解条件, 为了成功将其推广并验证几乎单群 $\text{PGL}(2, p)$, 还需进一步引入中心平凡的条件。于是得到下面结论: 若中心平凡有限不可解群 G 满足 $|G| = p(p^2 - 1)$ 且 $|G(p)| = p^2 - 1$, 则 $G \cong \text{PGL}(2, p)$, 其中 p 是大于 3 的素数。

2. 预备知识

下面给出几个简单的引理, 这些引理对本文主要定理的证明是必须的。

引理 2.1 ([14]) 设 $R = R_1 \times \cdots \times R_k$, 其中每个 R_i 是 n_i 个同构于非交换单群 H_i 的群的直积, 并且当 $i \neq j$ 时 H_i 与 H_j 不同构。则

$$\text{Aut}(R) \cong \text{Aut}(R_1) \times \cdots \times \text{Aut}(R_k) \text{ 且 } \text{Aut}(R_i) \cong (\text{Aut}(H_i)) \wr S_{n_i}.$$

此外,

$$\text{Out}(R) \cong \text{Out}(R_1) \times \cdots \times \text{Out}(R_k) \text{ 且 } \text{Out}(R_i) \cong (\text{Out}(H_i)) \wr S_{n_i}.$$

引理 2.2 ([11]) 设 $|G| = 2n$, n 是奇数, 则 G 必可解。

借助以下两个引理, 可在主要定理证明中有效避免应用有限单群分类定理。

引理 2.3 ([11]) 设 p 是一个非梅森素数, G 是一个由其 p 阶元素生成的非交换群。若 G 恰有 $p^2 - 1$ 个 p 元, 则 $G/Z(G) \cong \text{PSL}(2, p)$ 。

引理 2.4 ([10]) 设 G 是一个有限单群, 其阶 $|G|$ 可被一个大于 $|G|^{\frac{1}{3}}$ 的素数 p 整除。则 G 同构于 $\text{PSL}(2, p)$, 其中 $p > 3$ 是一个素数; 或者同构于 $\text{PSL}(2, p-1)$, 其中 $p > 3$ 是一个 Fermat 素数。

3. 主要定理及证明

定理 3.1: 设 G 为有限群, p 是大于 3 的非梅森素数。若 $|G| = p(p^2 - 1)$ 且 $|G(p)| = p^2 - 1$, 则 $G/Z(G) \cong \text{PSL}(2, p)$ 或 $G \cong \text{PGL}(2, p)$ 。

证明: 设 H 为 G 的所有 p 阶元生成的子群, 则 $H \trianglelefteq G$ 且 $|H(p)| = |G(p)| = p^2 - 1$ 。假设 H 是 G 交换子群, 则 H 的唯一 Sylow p -子群 P 是 H 的特征子群, 从而由 $|G| = p(p^2 - 1)$ 知, P 循环且是 G 的唯一正规 Sylow p -子群。因此 $|H(p)| = 1$ 矛盾。故 H 为 G 的非交换正规子群。

由引理 2.3 知 $H/Z(H) \cong \text{PSL}(2, p)$ 。又因 $|G| = |G:H| \cdot |H:Z(H)| \cdot |Z(H)|$, 得到 $|G:H| = 2$ 或 $|Z(H)| = 2$ 。

若 $|G:H| = 2$, 则 $Z(H) = 1$, $H \cong \text{PSL}(2, p)$ 。因 $H \trianglelefteq G \trianglelefteq \text{Aut}(H)$, 由 G 群阶知 $G \cong \text{PGL}(2, p)$ 。

若 $|Z(H)| = 2$, 则 $|G:H| = 1$, 从而 $G/Z(G) \cong \text{PSL}(2, p)$ 。即证。

定理 3.2: 设 G 为有限不可解群, p 为大于 3 的梅森素数。若 $|G| = p(p^2 - 1)$ 且 $|G(p)| = p^2 - 1$, 则 $G/Z(G) \cong \text{PSL}(2, p)$ 或 $G \cong \text{PGL}(2, p)$ 。

证明: 设 P 为 G 的一个 Sylow p -子群, 则由已知条件知,

$$|P| = p, |N_G(P)| = \frac{|G|(p-1)}{|G(p)|} = p(p-1).$$

令 K 为 G 的极大正规可解子群, 则由群 G 不可解知, K 为 G 的真子群。若 $p \in \pi(K)$, 则据 Frattini 论断, 有 $G = N_G(P)K$ 。因为 p 为大于 3 的梅森素数, 所以可设 $p = 2^s - 1$, 其中 s 是奇素数, 从而 $|N_G(P)| = 2(2^s - 1)(2^{s-1} - 1)$ 。由引理 2.2 知 $N_G(P)$ 是可解群, 故而 G 也是可解群, 矛盾。因此 $p \notin \pi(K)$ 。

设 N 为 G/K 的任一个极小正规子群, 则 N 为一些同构非交换单群的直积。我们断定 $p \in \pi(N)$ 。否

则, 存在 G/K 的一个极小正规子群 R , 它的阶不被 p 整除。设 R 是 t 个非交单群 H 的直积, 即 $R = H \times \cdots \times H$ 。取 G/K 的一个 p 阶元 x , 则由 R 的正规性知, x 以共轭作用的形式诱导 R 上一个 p 阶自同构。因此由引理 2.1 知, t 是 p 的倍数。又由 $2^2 || H|$, 所以 $2^{2^t} || G|$ 。基于前面梅森素数 p 假设及 G 的阶知, $2(2^s - 1) \leq s+1$, 从而 $s=1$, 但 1 不是素数, 矛盾。由上讨论知 N 是非交换单群且是 G/K 的唯一极小正规子群。

设 $N = H/K$ 。因为 $p \in \pi(N)$ 且 $H/K \trianglelefteq G/K \trianglelefteq \text{Aut}(H/K)$, 得到 $p || |H/K| || |G/K| || |G| = p(p^2 - 1)$, 从而 $p > |H/K|^{\frac{1}{3}}$, 由引理 2.4 知 H/K 同构于 $\text{PSL}(2, p)$, 其中 p 是一个大于 3 的素数; 或 $\text{PSL}(2, p-1)$, 其中 p 是大于 3 的 Fermat 素数。显然, 由 p 是大于 3 的梅森素数知, H/K 一定同构于 $\text{PSL}(2, p)$, $p > 3$ 的梅森素数。因为 $H/K \trianglelefteq G/K \trianglelefteq \text{Aut}(H/K)$, 所 $\text{PSL}(2, p) \trianglelefteq G/K \trianglelefteq \text{PGL}(2, p)$, 从而 $G/K \cong \text{PSL}(2, p)$ 或 $\text{PGL}(2, p)$, p 是大于 3 的梅森素数。

如果 $G/K \cong \text{PSL}(2, p)$, 那么 K 是 G 的一个 2 阶正规子群, 从而 $K = Z(G)$ 。于是 $G/Z(G) \cong \text{PSL}(2, p)$ 。

如果 $G/K \cong \text{PGL}(2, p)$, 那么由 $|G| = p(p^2 - 1)$ 知 $K=1$, 从而 $G \cong \text{PGL}_2(p)$ 。即证。

在定理 3.1 和定理 3.2 中, 中心 $Z(G)$ 对 G 的结构有一定的影响。若假设 G 中心平凡, 易得如下两个推论。

推论 3.1: 设 G 是中心平凡的有限群, p 为大于 3 的非梅森素数。若 $|G| = p(p^2 - 1)$ 且 $|G(p)| = p^2 - 1$, 则 $G \cong \text{PGL}(2, p)$ 。

推论 3.2: 设 G 是中心平凡的有限不可解群, p 为大于 3 的梅森素数。若 $|G| = p(p^2 - 1)$ 且 $|G(p)| = p^2 - 1$, 则 $G \cong \text{PGL}(2, p)$ 。

综合推论 3.1 与推论 3.2 的结论, 发现无论 p 是否为梅森素数, 在分别假定的条件下均可推得相同结论, 因此可得下面定理, 这是射影线性群 $\text{PGL}(2, p)$ 的一种新刻画。

定理 3.3: 设 G 是中心平凡的有限不可解群, p 为大于 3 的素数。若 $|G| = p(p^2 - 1)$ 且 $|G(p)| = p^2 - 1$, 则 $G \cong \text{PGL}(2, p)$ 。

基金项目

重庆市自然科学基金项目(项目编号: CSTB2022NSCQ-MSX0238)。

参考文献

- [1] 徐明耀. 有限群导引(上册) [M]. 北京: 科学出版社, 1993.
- [2] 施武杰. 有限单群的数量刻画[J]. 中国科学: 数学, 2023, 53(7): 931-952.
- [3] Shi, W.J. (2025) Quantitative Characterization of Finite Simple Groups: A Complement. *International Journal of Group Theory*, **14**, 181-222.
- [4] Brandl, R. and Wujie, S. (1994) The Characterization of $\text{PSL}(2, q)$ by Its Element Orders. *Journal of Algebra*, **163**, 109-114. <https://doi.org/10.1006/jabr.1994.1006>
- [5] Moghaddamfar, A.R. and Shi, W.J. (2004) The Characterization of Almost Simple Groups $\text{PGL}(2, p)$ by Their Element Orders. *Communications in Algebra*, **32**, 3327-3338. <https://doi.org/10.1081/agb-120038641>
- [6] Shao, C.G. and Jiang, Q.H. (2014) A New Characterization of $\text{PSL}(2, p)$ by NSE. *Journal of Algebra and Its Applications*, **13**, Article 1350123. <https://doi.org/10.1142/S0219498813501235>
- [7] Asboei, A.R.K. (2013) A New Characterization of $\text{PGL}(2, p)$. *Journal of Algebra and Its Applications*, **12**, Article 13500400. <https://doi.org/10.1142/S0219498813500400>
- [8] Chen, Y. and Chen, G. (2012) Recognizing $L_2(p)$ by Its Order and One Special Conjugacy Class Size. *Journal of Inequalities and Applications*, **2012**, Article No. 310. <https://doi.org/10.1186/1029-242x-2012-310>
- [9] Chen, Y. and Chen, G. (2015) Characterization of $\text{PGL}(2, p)$ by Its Order and One Conjugacy Class Size. *Proceedings-Mathematical Sciences*, **125**, 501-506. <https://doi.org/10.1007/s12044-015-0253-4>

-
- [10] Brauer, R. and Reynolds, W.F. (1958) On a Problem of E. Artin. *The Annals of Mathematics*, **68**, 713-720.
<https://doi.org/10.2307/1970164>
 - [11] Moretó, A. (2017) The Number of Elements of Prime Order. *Monatshefte für Mathematik*, **186**, 189-195.
<https://doi.org/10.1007/s00605-017-1021-6>
 - [12] Li, J. and Shi, W. (2021) On Some Conjectures Related to Quantitative Characterizations of Finite Nonabelian Simple Groups. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, **27**, 269-275.
<https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-269-275>
 - [13] Liu, L., Chen, Y.H. and Jia, S.F. (2026) On Characterization of Simple K_3 -Groups by the Number of Elements of Prime Order. *International Journal of Group Theory*, **15**, 207-214.
 - [14] Robinson, D.J.S. (1982) *A Course in the Theory of Groups*. Springer-Verlag.