

数学分析中重积分的解法探讨

九加西

西华大学理学院数学系, 四川 成都

收稿日期: 2026年6月1日; 录用日期: 2026年7月2日; 发布日期: 2026年7月16日

摘 要

重积分的解法是数学分析课程中的重要内容, 本文利用极坐标变换衍生出一种解法, 将重积分转化成为关于定积分和曲面(线)积分的累次积分, 即: 先固定半径在球面(圆)上积分, 再对半径积分。通过该解法, 能加深学生对重积分的几何直观理解。

关键词

定积分, 曲面(线)积分, 调和函数

On the Calculation Methods of Multiple Integrals in Mathematical Analysis

Jiayi Jiu

Department of Mathematics, School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: June 1, 2026; accepted: July 2, 2026; published: July 16, 2026

Abstract

The calculation methods for multiple integrals constitute an important part of Mathematical Analysis. This paper proposes a new approach derived from polar coordinate transformation, which converts multiple integrals into iterated integrals involving definite integrals and surface/line integrals. Specifically, integration is first performed over a sphere (circle) with a fixed radius, followed by integration with respect to the radius. This method helps students develop clearer geometric intuition for multiple integrals.

Keywords

Definite Integrals, Surface/Line Integrals, Harmonic Functions



1. 引言

重积分是数学系本科生数学分析课程中的重要内容, 由于高维欧氏空间中有更为复杂的几何结构, 如何计算重积分是学生普遍反映的重点和难点。通常来说, 计算重积分是根据积分区域将其转化成为关于定积分的累次积分, 或者利用变量替换转化成为累次积分的形式; 更进一步地, 也可利用格林公式和高斯公式将重积分转化成为区域边界上的曲面积分[1][2]。笔者在教学过程中发现, 很多学生只是机械式地“记住”上述办法, 逐个“试”, 但对其中涉及的几何结构没有很好的理解。本文基于通常的重积分解法, 总结了一种新的解法, 即球坐标变换的几何诠释, 从而让学生灵活运用各种技巧计算重积分。

2. 重积分的解法探讨

本文在三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 上展开讨论, 对 $\mathbb{R}^3$ 上的连续函数 f , 文中将利用以下计算公式

$$\begin{aligned} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} f(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^R dr \iint_{x^2+y^2+z^2=r^2} f(x, y, z) d\sigma \\ &= \int_0^R r^2 dr \iint_{x^2+y^2+z^2=1} f(rx, ry, rz) d\sigma, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $R > 0$, 以及 $d\sigma$ 为球面上的面积微元。从几何上来看, 公式(1)可以理解为先固定半径在球面上积分(第一型曲面积分), 再对半径积分(定积分)。事实上, 对公式(1)的左边进行球坐标变换[1][2], 有

$$\begin{aligned} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} f(x, y, z) dx dy dz \\ = \int_0^R r^2 \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) d\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

而公式(1)右边涉及第一型曲面积分, 运用第一型曲面积分的计算方法[1], 有

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2+z^2=r^2} f(x, y, z) d\sigma &= \int_0^\pi r^2 \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) d\theta \\ &= r^2 \iint_{x^2+y^2+z^2=1} f(rx, ry, rz) d\sigma. \end{aligned} \quad (3)$$

将公式(2)和(3)联立, 容易发现(1)的等号都是成立的。更一般地, 公式(1)在欧氏空间 $\mathbb{R}^d$ 中也是成立的, 即

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq R} f(x) dx &= \int_0^R dr \int_{|\xi|=r} f(\xi) d\sigma(\xi) \\ &= \int_0^R r^{d-1} dr \int_{|\xi|=1} f(\xi) d\sigma(\xi), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$ 。

2.1. 对径向函数解重积分

从公式(1)和(4)右边看出, 重积分转化为先对函数 f 在球面上积分, 如果 f 是径向函数的话 ($f(x) = f(A(x))$), 其中 A 为任意的正交矩阵), 那么运用公式(1)将极大地简化计算过程。

例 1: 计算单位球内积分 $I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} (x^2+y^2+z^2) dx dy dz$ 。

解: 由公式(1)可知, 有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dr \int_{x^2+y^2+z^2=r^2} (x^2+y^2+z^2) d\sigma \\ &= \int_0^1 dr \int_{x^2+y^2+z^2=r^2} r^2 d\sigma \\ &= \int_0^1 r^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{5}. \end{aligned}$$

□

例 2: 设 v_d 为 $\mathbb{R}^d$ 中单位球体积, ω_{d-1} 为 $\mathbb{R}^d$ 中单位球面面积, 求证: $v_d = \omega_{d-1}/d$ 。

证明: 由公式(4)可知, 有

$$v_d = \int_{|x| \leq 1} dx = \int_0^1 r^{d-1} dr \int_{|x|=1} d\sigma = \omega_{d-1} \int_0^1 r^{d-1} dr = \frac{\omega_{d-1}}{d}.$$

□

2.2. 对非径向函数解重积分

从上一节可以发现, 当对径向函数求解重积分时, 运用公式(1)和(4)直接将重积分转化为定积分, 而在处理一些非径向函数时, 公式(1)和(4)也会简化重积分的解法。

例 3: 计算 $I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^4+y^4) dx dy$ 。

解: 容易看出被积函数 x^4+y^4 不是径向函数, 但是它可以写成如下形式

$$x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2,$$

其中 $(x^2+y^2)^2$ 是径向函数, 而函数 $2x^2y^2$ 虽然不是径向的, 但是比起原本的径向函数更好处理了。

对 $(x^2+y^2)^2$, 利用公式(4)可知

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2)^2 dx dy = \int_0^1 r^4 \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi}{3};$$

对函数 x^2y^2 , 再次利用公式(4), 有

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2y^2 dx dy &= \int_0^1 dr \int_{x^2+y^2=r^2} x^2y^2 d\sigma \\ &= \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} (r \cos \theta)^2 (r \sin \theta)^2 d\theta \\ &= \int_0^1 r^5 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^1 r^5 \cdot \frac{\pi}{2} dr = \frac{\pi}{12}, \end{aligned}$$

其中第二个等式使用了第一型曲线积分的解法[1]。从而, 有 $I = \frac{\pi}{3} - 2 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ 。□

例 4: 计算 $I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^3+xy^2) \arctan \frac{y}{x} dx dy$ 。

解: 题中函数并非径向函数, 然而有 $x^3+xy^2 = x(x^2+y^2)$; 利用公式(4), 有

$$I = \int_0^1 r^2 dr \int_{x^2+y^2 \leq r^2} x \arctan \frac{y}{x} d\sigma(x, y).$$

进一步, 利用第一型曲线积分的计算方法[1]可知,

$$\int_{x^2+y^2 \leq r^2} x \arctan \frac{y}{x} d\sigma(x, y) = r^2 \int_0^{2\pi} \theta \cos \theta d\theta = 0.$$

从而, 有 $I=0$. $\square$

调和函数是数学系本科生初学复分析或者偏微分方程时最为重要的内容, 其中调和函数的均值性质是最为核心的性质之一, 运用公式(4)可以说明调和函数不仅具有关于球面的均值性质, 也满足球体均值性质. 事实上, 调和函数有以下球面均值性质.

定理 1.1 [3]: 设 u 为 $\mathbb{R}^d$ 中的调和函数, 那么对任意的 $x \in \mathbb{R}^d$ 及 $r > 0$, 有

$$u(x) = \frac{1}{\omega_{d-1} r^{d-1}} \int_{|x-y|=r} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{\omega_{d-1}} \int_{|y|=1} u(x+ry') d\sigma(y'), \quad (5)$$

其中 ω_{d-1} 是 $\mathbb{R}^d$ 中单位球面面积.

借助公式(4), 本文给出以下调和函数的球体均值性质, 即

例 5: 对 $\mathbb{R}^d$ 中的调和函数 u , 证明其满足球体均值性质, 即: 对任意的 $x \in \mathbb{R}^d$ 及 $r > 0$,

$$u(x) = \frac{1}{v_d r^d} \int_{|y|<r} u(x+y) dy = \frac{1}{v_d} \int_{|x-y|<r} u(y) dy, \quad (6)$$

其中 v_d 是 $\mathbb{R}^d$ 中单位球体积.

证明: 任意的 $x \in \mathbb{R}^d$ 及 $r > 0$, 由公式(5)可知

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x) \cdot \frac{d}{r^d} \int_0^r t^{d-1} dt \\ &= \frac{d}{r^d} \int_0^r t^{d-1} \left\{ \frac{1}{\omega_{d-1}} \int_{|y|=1} u(x+ty') d\sigma(y') \right\} dt \\ &= \frac{d}{\omega_{d-1}} \cdot \frac{1}{r^d} \int_0^r t^{d-1} \left\{ \int_{|y|=1} u(x+ty') d\sigma(y') \right\} dt; \end{aligned}$$

进一步, 由例 2 和公式(4)可知,

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{v_d} \cdot \frac{1}{r^d} \int_0^r t^{d-1} \left\{ \int_{|y|=1} u(x+ty') d\sigma(y') \right\} dt \\ &= \frac{1}{v_d r^d} \int_{|y|<r} u(x+y) dy \\ &= \frac{1}{v_d} \int_{|x-y|<r} u(y) dy. \end{aligned}$$

从而, 公式(6)得证. $\square$

综上所述, 求解重积分, 如果积分区域是球体区域, 利用公式(4)可以转化为关于定积分和曲面积分的累次积分. 如果被积函数是径向的, 运用该解法往往有事半功倍的效果, 对非径向函数, 也可以将其简化到更容易处理的步骤. 最后, 本文给出公式(4)一个在调和函数理论中的具体应用, 验证了调和函数不仅满足球面均值性质, 还满足球体均值性质. 需要注意的是, 本文中提到的办法只对一些球对称的区域适用, 对一些非对称区域则需要另想办法.

参考文献

- [1] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析: 下册[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [2] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析: 下册[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [3] 丁勇. 现代分析基础[M]. 第 3 版. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.