

黎曼流形上 k -海森堡方程的斜边值问题

李程明, 韩 菲

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2026年6月4日; 录用日期: 2026年7月10日; 发布日期: 2026年7月20日

摘 要

本文研究了具有脐边界的黎曼流形上 k -海森堡方程的斜边界值问题。利用比较原理和最大值原理, 我们得到了了解的 c^0 , c^1 和 c^2 估计。特别地, 我们证明了二阶导数可以由边界上双法向方向的导数控制, 进而通过控制边界上双法向方向的导数, 可实现对二阶导数的控制。

关键词

k -海森堡, 先验估计, 斜边界值, 脐边界, 费米坐标

Oblique Boundary Value Problems for k -Hessian Equations on Riemannian Manifolds

Chengming Li, Fei Han

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: June 4, 2026; accepted: July 10, 2026; published: July 20, 2026

Abstract

This paper investigates oblique boundary value problems for k -Hessian equations on Riemannian manifolds with umbilical boundary. By virtue of the comparison principle and the maximum principle, we establish c^0 , c^1 and c^2 a priori estimates for solutions. In particular, we prove that the second-order derivatives can be dominated by the derivative in the double normal direction on the boundary; consequently, control over the second-order derivatives is achieved via bounding the double normal derivative at the boundary.

Keywords

k -Hessian, A Priori Estimate, Oblique Boundary Value, Umbilical Boundary, Fermi Coordinate



1. 引言

设 (M, g) 是一个 n 维紧致黎曼流形, 其边界为 (M, g) 。我们考虑如下边界值问题:

$$\begin{cases} \sigma_k(D^2u) = f(x, u), x \in M, \\ u_\eta = -u\phi_1(x) + \phi_2(x), x \in \partial M, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\sigma_k(D^2u)$ 表示海森堡矩阵 D^2u 的特征值的阶初等对称函数, $f \in C^\infty(M)$, ϕ_1, ϕ_2 是定义在边界上的两个光滑函数, η 是 ∂M 单位向量, ν 是 ∂M 的外单位法向量, 且满足 $\eta \cdot \nu = \cos \theta \geq \eta_0$ ($0 < \eta_0 < 1$)。

关于 k -海森堡方程的边界值问题已有诸多研究。Caffarelli-Nirenberg-Spruck [1] 得到了方程 $\sigma_k(D^2u) = f(x)$ ($x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$) 解的 C^0, C^1 和 C^2 估计, 随后利用连续性方法得到了该方程狄利克雷问题解的存在性。Lions-Truinger-Urbas [2] 证明了 k -海森堡方程诺伊曼问题的早期结果, 他们借助曲面的几何性质得到了蒙日-安培方程解的存在性。2019 年, Ma-Qiu [3] 得到 k -海森堡方程解的 C^0, C^1 和 C^2 估计, 进而通过连续性方法得到了方程解的存在性结果, 该结论解决了 Truinger [4] 提出的猜想。

Guan [5] 研究了黎曼流形上一类蒙日-安培型完全非线性椭圆方程的狄利克雷问题, 该方法可用于处理实流形和复流形上各类完全非线性椭圆或抛物型偏微分方程。2014 年, Guan [6] 进一步研究了如下方程: $\sigma_k(D^2u + A) = f(x)$, 其中 $A = A(x)$ 是一个光滑的型张量。之后, Guan-Jiao [7] 将上述结果推广到 $A = A(x, u)$ 的情形。对于黎曼流形上 k -海森堡方程 $(0, 2)$ 的诺伊曼问题, Guan-Xiang [8] 在存在下解的条件下, 得到了一类完全非线性方程更一般解的存在性和正则性。He-Tu-Zhang [9] 考虑了具有全脐边界的紧致黎曼流形上海森堡方程诺伊曼问题的先验估计, 并利用连续性方法得到了该方程解的存在性。

本文研究黎曼流形上 k -海森堡方程的斜边界值问题, 采用与 [9] 类似的方法, 导出解的 C^0, C^1 和 C^2 估计。基于上述结果, 可利用连续性方法证明解的存在性。

2. 主要结果

以下三个定理分别是解的 C^0, C^1 和 C^2 估计。

定理 1.1 设 M 是带有边界 ∂M 的紧致黎曼流形, 且存在一个具有正定海森堡矩阵的光滑函数 ρ 。若是方程(1)的 k -容许解, 则存在常数 M_0 , 使得

$$\sup_M |u| \leq M_0,$$

其中 M_0 一个仅依赖于 $n, \text{diam}(M), \phi_1, \phi_2, f$ 的正常数。

定理 1.2 设 ∂M 是脐边界, 且 $u \in C^2(M)$ 是方程(1)的 k -容许解, 满足 $|u| \leq M_0$ 。则存在 $\sup_{\mu_0}$ 使得

$$\sup_{\mu_0} |Du| \leq C,$$

其中 c 是一个仅依赖 M, n, ϕ_1, ϕ_2, f 的正常数。

定理 1.3 设 M 是脐边界 ∂M 且具有非负截面曲率的光滑紧致黎曼流形。若 $u \in C^4(M)$ 是方程(1)的 k -容许解, 则

$$u \in C^2(M) \quad \sup_M |D^2u| \leq C,$$

其中 C 是一个仅依赖于 $k, \|u\|_{C^1(M)}, \|f\|_{C^1(M)}, \phi_1, \phi_2, \partial M$ 的正常数。

3. 预备知识

3.1. 一些定义和定理

定义 2.1 若函数 u 满足 $\sigma_1(D^2u) > 0, \sigma_2(D^2u) > 0, \dots, \sigma_k(D^2u) > 0$, 则称 u 是 k -容许。

定义 2.2 锥 Γ_k 定义为

$$\Gamma_k = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^n \mid \sigma_1(D^2u) > 0, \sigma_2(D^2u) > 0, \dots, \sigma_k(D^2u) > 0 \right\}.$$

定义 2.3 记 $F^{ij} = \frac{\partial \sigma_k}{\partial u_{ij}}$ 。

定理 2.4 u 是 k -容许的, 则 $\sigma_k^{\frac{1}{k}}$ 是椭圆的且凹的。

定理 2.5 证明: 参见[10]。

3.2. 协变导数和里奇恒等式

设 D 是 (M, g) 的列维 - 奇维塔联络。曲率张量定义为

$$R(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]}Z, \quad R(X, Y, Z, W) = \langle R(Z, W)Y, X \rangle.$$

设 $e_1, \dots, e_n$ 是 M 上的局部标架, 记 $g_{ij} = g(e_i, e_j), g^{ij} = (g_{ij})^{-1}, D_i = D_{e_i}$ 。则

$$R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l), R_{jkl}^i = g^{im} R_{mjkl}, D_i = D_{e_i}.$$

对于光滑函数 v , 有

$$\begin{aligned} v_{ji} &= \partial_i(v_j) - \Gamma_{ij}^k v_k, v_{kji} - v_{kij} = -R_{kij}^l v_l, \\ v_{lkji} - v_{ljki} &= -R_{ijk}^m v_{mi} - R_{ijk,i}^m v_m, \\ v_{ljki} - v_{ljik} &= -R_{jik}^m v_{lm} - R_{lik}^m v_{mj}, \\ v_{ljik} - v_{jilk} &= v_{jilk} - v_{jilk} = -R_{jil,k}^m v_m - R_{jil}^m v_{mk}, \\ v_{lkji} - v_{jilk} &= -R_{ijk}^m v_{mi} - R_{ijk,i}^m v_m - R_{jik}^m v_{lm} - R_{lik}^m v_{mj} - R_{jil,k}^m v_m - R_{jil}^m v_{mk}. \end{aligned} \quad (2)$$

3.3. 费米坐标

我们将在边界附近使用费米坐标系, 该坐标系下的度量表达式 $g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + (dx^n)^2$, 其中希腊字母 $\alpha, \beta, \dots$ 表示切向指标, 拉丁字母 $i, j, k, \dots$ 表示全指标。在该坐标系中, x^n 恰好是该点到边界的距离。外单位法向量 ν 可表示为 $\nu = -\frac{\partial}{\partial x^n}$ 。坐标邻域为

$$B_r^+ = \left\{ x^n \geq 0, \sum_i (x^i)^2 < r^2 \right\}.$$

第二基本形式记为 L^{ij} , 则在边界上有

$$\Gamma_{\alpha\beta}^n = L_{\alpha\beta}, \Gamma_{\alpha n}^\beta = -L_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}, \Gamma_{\alpha n}^n = 0.$$

若 ∂M 是脐边界且 ∂M 上的平均曲率为 κ , 则

$$\Gamma_{\alpha\beta}^n = \kappa g_{\alpha\beta}, \Gamma_{\alpha n}^\beta = -\kappa \delta_{\alpha\beta}, \Gamma_{\alpha n}^n = 0.$$

4. c^0 估计

这里我们使用[3]中的技巧。

首先, 我们指出边界上任何向量都可以分解为切向和法向方向的线性组合, 即

$$\eta = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \tau_i, \eta \rangle \tau_i + \langle \nu, \eta \rangle \nu, \quad (3)$$

其中 η 是边界上的任意方向, τ_i 是切向量, ν 是外单位法向量。

取足够大的 A_1 , 使得

$$\sigma_k(D^2 u) = f \leq \sigma_k(D^2(A_1 \rho)).$$

根据比较原理, $u - A_1 \rho$ 在边界点 x_0 处取得非正最小值, 因此由方程(1)的边界条件和(3)可得

$$0 \geq (u - A_1 \rho)_\nu(x_0) = \frac{1}{\langle \eta, \nu \rangle} (u - A_1 \rho)_\eta(x_0) = \frac{1}{\cos \theta} (u - A_1 \rho)_\eta(x_0),$$

即

$$0 \geq -u(x_0) - C.$$

因此, 我们有

$$u(x) \geq u(x_0) - C \geq -C. \quad (4)$$

另一方面, 由于流形是紧致的, 存在 B_1 , 使得

$$\sigma_k(D^2 u) = f \geq \frac{1}{B_1} \sigma_k(D^2 \rho).$$

再次根据比较原理, $u - \frac{1}{B_1} \rho$ 在边界点 x_1 处取得非负最大值, 则

$$0 \leq \left(u - \frac{1}{B_1} \rho\right)_\nu(x_1) = \frac{1}{\langle \eta, \nu \rangle} \left(u - \frac{1}{B_1} \rho\right)_\eta(x_1) = \frac{1}{\cos \theta} \left(u - \frac{1}{B_1} \rho\right)_\eta(x_1),$$

即

$$0 \leq u(x_1) + C.$$

因此, 我们有

$$u(x) \leq u(x_1) \leq C. \quad (5)$$

结合(4)和(5), 可得

$$\sup_M |u| \leq C.$$

由以上结论我们完成了定理 1.1 的证明。

5. c^1 估计

在进行全局 C^1 估计之前, 我们需要先给出两个引理。

设 $M_0 = \sup_M |u|$, 定义

$$d(x) = \text{dist}(x, \partial M), M_\mu = \{x \in M \mid d(x) < \mu\}.$$

引理 5.1 若 u 是 k -容许的, 且 $u_{11} < -\frac{h'|Du|^2}{4}$ (其中 h' 是一个正函数), 则

$$\frac{1}{n-k+1} \sum_i F^{ii} \leq F^{11}, \text{ 且 } \sum_i F^{ii} \geq C_{n-1}^{k-1} \left[\frac{h'}{4C_{n-1}^k} \right]^{k-1} |Du|^{2k-1}.$$

引理 5.2 设 $u \in C^3(M)$ 是方程(1)的 k -容许解, 满足 $|u| \leq M_0$, 且存在正常数 L_1 , 使得

$$\begin{aligned} |f(x, z)| &\geq 0, \\ |f(x, z)| + |f_x(x, z)| + |f_z(x, z)| &\leq L_1, \end{aligned}$$

其中 $f \in C^2(M \times [-M_0, M_0])$ 。则对于任意 $M' \subset \subset M$, 有

$$\sup_{M'} |Du| \leq \tilde{M}_1,$$

其中 $\tilde{M}_1$ 是一个仅依赖于 $k, M_0, \text{dist}(M', \partial M), L_1$ 的正常数。

上述两个引理的证明参见[11]。

引理 5.2 是内部估计。因此, 我们只需证明边界和近边界处的梯度估计, 即可得到全局梯度估计。直接处理方程很难, 因此我们使用辅助函数来处理, 然后使用极值原理, 将全局估计降为边界的估计。

定理 1.2 的证明

考虑辅助函数

$$G(x) = \log |D\omega|^2 + h(u) + g(d), \quad (6)$$

其中

$$\omega(x) = \cos \theta \cdot u(x) + \varphi(x, u)d(x), \quad \varphi(x, u) = -u\phi_1(x) + \phi_2(x), \quad (7)$$

$$h(u) = -\frac{1}{2} \log(1 + 4M_0 - u), \quad (8)$$

$$g(d) = \alpha_0 d, (\alpha_0 \text{ 为一个待确定的常数}), \quad (9)$$

由(8), 有

$$-\frac{1}{2} \log(1 + 5M_0) \leq h \leq -\frac{1}{2} \log(1 + 3M_0),$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{1 + 5M_0} \leq h' \leq \frac{1}{2} \frac{1}{1 + 3M_0},$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{(1 + 5M_0)^2} \leq h'' \leq \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + 3M_0)^2},$$

对 ω 求导可得

$$\omega_i = \cos \theta u_i + (\varphi_i + \varphi_u u_i)d + \phi d_i. \quad (10)$$

假设 $G(x)$ 在 $x_0 \in M_{\mu_0}$ 处取得最大值, 由引理 5.2, 我们只需考虑 x_0 在边界和近边界的情况。因此, 我们分两种情况证明。

情况一: 边界估计

我们在费米坐标系下进行的计算。设 x_0 在边界上, 则

$$0 \geq G_n = \frac{\omega_n \omega_{nn} + \omega_\alpha \omega_{\alpha n}}{|D\omega|^2} + g' + h' u_n. \quad (11)$$

由(3)和(10), 有

$$\omega_n = \cos \theta u_n + (\varphi_n + \varphi_u u_n) d + \varphi = -\cos \theta u_v + \varphi = -u_\eta + \varphi = 0. \quad (12)$$

进而由上式, 可得

$$\omega_{\alpha n} = \omega_{n\alpha} = \partial_\alpha \omega_n - \Gamma_{n\alpha}^i \omega_i = -\Gamma_{n\alpha}^n \omega_n = \kappa \omega_\alpha. \quad (13)$$

将(12)和(13)带入(11), 我们推出, 只要 α_0 足够大, 就有

$$0 \geq G_n \geq \kappa + \alpha_0 - C > 0.$$

这是一个矛盾, 表明 $G(x)$ 不能在边界上取得最大值。

情况二: 近边界估计

我们对 $G(x)$ 求一阶和二阶导数, 有

$$0 = G_i = \frac{2\omega_p \omega_{pi}}{|D\omega|^2} + g'd_i + h'u_i, \quad (14)$$

$$0 \geq G_{ij} = \frac{2\omega_{pj} \omega_{pi} + 2\omega_p \omega_{pij}}{|D\omega|^2} - \frac{4\omega_p \omega_{pi} \omega_q \omega_{qj}}{|D\omega|^4} + g''d_i d_j + g'd_{ij} + h''u_i u_j + h'u_{ij}. \quad (15)$$

注意到 $F^{ij}(D^2u) > 0$, 由于 u 是 k -容许解。在 G 的最大值点处, 有

$$\begin{aligned} 0 \geq F^{ij} G_{ij} &= \frac{2F^{ij} \omega_{pj} \omega_{pi} + 2F^{ij} \omega_p \omega_{pij}}{|D\omega|^2} - \frac{4F^{ij} \omega_p \omega_{pi} \omega_q \omega_{qj}}{|D\omega|^4} \\ &\quad + g''F^{ij} d_i d_j + g'F^{ij} d_{ij} + h''F^{ij} u_i u_j + h'F^{ij} u_{ij}. \end{aligned} \quad (16)$$

对(10)求导, 可得

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \cos \theta u_{ij} + (\varphi_{ij} + \varphi_{iu} u_j + \varphi_{uj} u_i + \varphi_{uu} u_i u_j + \varphi_u u_{ij}) d \\ &\quad + (\varphi_i + \varphi_u u_i) d_j + (\varphi_j + \varphi_u u_j) d_i + \varphi d_{ij}. \end{aligned} \quad (17)$$

对 ω_{ij} 求导, 可得

$$\begin{aligned} \omega_{ijp} &= (\cos \theta + \varphi_u d) u_{ijp} + (\varphi_{ijp} + \varphi_{iju} u_p + \varphi_{iup} u_j + \varphi_{iuu} u_p u_j \\ &\quad + \varphi_{iu} u_{jp} + \varphi_{ujp} u_i + \varphi_{uju} u_p u_i + \varphi_{uj} u_{ip} + \varphi_{uup} u_i u_j + \varphi_{uuu} u_p u_i u_j \\ &\quad + \varphi_{uu} u_{ip} u_j + \varphi_{uu} u_i u_{jp} + \varphi_{up} u_{ij} + \varphi_{uu} u_p u_{ij}) d \\ &\quad + (\varphi_{ij} + \varphi_{iu} u_j + \varphi_{uj} u_i + \varphi_{uu} u_i u_j + \varphi_u u_{ij}) d_p \\ &\quad + (\varphi_{ip} + \varphi_{iu} u_p + \varphi_{up} u_i + \varphi_{uu} u_p u_i + \varphi_u u_{ip}) d_j \\ &\quad + (\varphi_{jp} + \varphi_{ju} u_p + \varphi_{up} u_j + \varphi_{uu} u_p u_j + \varphi_u u_{jp}) d_i \\ &\quad + (\varphi_i + \varphi_u u_i) d_{jp} + (\varphi_j + \varphi_u u_j) d_{ip} + (\varphi_p + \varphi_u u_p) d_{ij} + \varphi d_{ijp}. \end{aligned} \quad (18)$$

现在我们在 x_0 处选取坐标系, 使得 $|\nabla \omega| = \omega_1$ 且 $(u_{ij})_{2 \leq i, j \leq n}$ 是对角的。此外, 在下面的证明中我们仅考虑 ω_1 足够大的情况, 否则情况二已得证。

这样, 由(10)和(14), 对于 $i=1$, 有

$$u_1 = \frac{\omega_1 - (\varphi_1 d + \varphi d_1)}{\cos \theta + \varphi_u d}, \quad (19)$$

$$\omega_{11} = -\frac{1}{2}(g'd_1 + h'u_1)\omega_1, \quad (20)$$

对于 $2 \leq i \leq n$, 有

$$u_i = \frac{-(\varphi_i d + \varphi d_i)}{\cos \theta + \varphi_u d}, \quad (21)$$

$$\omega_{1i} = -\frac{1}{2}(g'd_i + h'u_i)\omega_1, \quad (22)$$

假设 μ_0 足够小, 使得

$$\frac{1}{2} \leq \cos \theta + \varphi_u d \leq 1.$$

对于 $2 \leq i \leq n$, 由(21)可得

$$u_i \leq C. \quad (23)$$

对于 u_1 , 由(10)有

$$\omega_1 = (\cos \theta + \varphi_u d)u_1 + \varphi_1 d + \varphi d_1, \quad (24)$$

因此,

$$\frac{1}{4}u_1 \leq \omega_1 \leq 2u_1. \quad (25)$$

基于(17)和(22), 结合(23), 对于 $2 \leq i \leq n$, 有

$$|u_{1i}| \leq C\omega_1. \quad (26)$$

$$|\omega_{1i}| \leq C\omega_1. \quad (27)$$

对于 $i=1$, 由(20)和(25)有

$$\omega_{11} \leq C\omega_1^2. \quad (28)$$

结合(17)和上式, 可得

$$u_{11} \leq C\omega_1^2. \quad (29)$$

有了上述准备, 我们现在处理(16)。

首先, 由(18), (23), (25), (26)和里奇恒等式, 有

$$\begin{aligned} 0 \geq F^{ij}\omega_{ij1} &\geq (\cos \theta + \varphi_u d)F^{ij}u_{ij1} - C \sum_i F^{ij} |D\omega|^2 + F^{ij}(\varphi_{uj}d + \varphi_{uu}u_jd + \varphi_ud_j)u_{1i} \\ &\quad + F^{ij}(\varphi_{ui} + \varphi_{uu}u_id + \varphi_ud_i)u_{1j} + F^{ij}(\varphi_{uu}u_1d + \varphi_{1u}d + \varphi_ud_1)u_{ij}. \end{aligned} \quad (30)$$

注意到方程(1)是 k 次齐次的, 有

$$F^{ij}u_{ij} = kf, \quad (31)$$

$$F^{ij}u_{ij1} = f_1 + f_u u_1. \quad (32)$$

由(31), (32)和(30), 我们得到

$$\begin{aligned} 0 \geq F^{ij}\omega_{ij1} &\geq -C \sum_i F^{ij} |D\omega|^2 + F^{ij}(\varphi_{uj}d + \varphi_{uu}u_jd + \varphi_ud_j)u_{1i} \\ &\quad + F^{ij}(\varphi_{ui} + \varphi_{uu}u_id + \varphi_ud_i)u_{1j}. \end{aligned} \quad (33)$$

由于 F^{ij} 是正定的且 $|F^{ij}| \leq C \sum_i F^{ii}$, 结合(26)和(27), 可得

$$\begin{aligned}
 0 &\geq F^{ij} \omega_{ij1} \\
 &\geq -C \sum_i F^{ij} |D\omega|^2 + 2F^{11} (\varphi_{u1}d + \varphi_{uu}u_1d + \varphi_u d_1) u_{11} + \sum_{j \neq 1} 2F^{1j} (\varphi_{uj}d + \varphi_{uu}u_jd + \varphi_u d_j) u_{11} \\
 &\quad + \sum_{i \neq 1} 2F^{i1} (\varphi_{u1}d + \varphi_{uu}u_1d + \varphi_u d_1) u_{1i} + \sum_{i,j \neq 1} 2F^{ij} (\varphi_{uj}d + \varphi_{uu}u_jd + \varphi_u d_j) u_{1i} \\
 &\geq -C \sum_i F^{ij} |D\omega|^2 + 2F^{11} (\varphi_{u1}d + \varphi_{uu}u_1d + \varphi_u d_1) u_{11} \\
 &\geq -C \sum_i F^{ij} |D\omega|^2.
 \end{aligned} \tag{34}$$

将(34)代入(16), 由 $h'' = 2(h')^2$ 可得

$$\begin{aligned}
 0 &\geq F^{ij} G_{ij} = \frac{F^{ij} \omega_i \omega_{ij}}{|D\omega|^2} - \frac{4F^{ij} \omega_1^2 \omega_i \omega_{1j}}{|D\omega|^4} + g'' F^{ij} d_i d_j + g' F^{ij} d_{ij} + h'' F^{ij} u_i u_j + h' F^{ij} u_{ij} \\
 &\geq \frac{F^{ij} \omega_i \omega_{ij} - C \sum_i F^{ii} \omega_i^2}{|D\omega|^2} - \frac{F^{ij} \omega_1^4 (g'd_i + h'u_i)(g'd_j + h'u_j)}{|D\omega|^4} - C \sum_i F^{ii} - C \sum_i F^{ii} |u_i| + h'' F^{11} u_1^2 + h' k f \\
 &\geq -C \sum_i F^{ii} |D\omega| - F^{ij} (g'd_i + h'u_i)(g'd_j + h'u_j) - C \sum_i F^{ii} - C \sum_i F^{ii} |u_i| + h'' F^{11} u_1^2 + h' k f \\
 &\geq -C \sum_i F^{ii} - C \sum_i F^{ii} |u_i| + [h'' - (h')^2] F^{11} u_1^2 \\
 &\geq -C \sum_i F^{ii} - C \sum_i F^{ii} |u_i| + (h')^2 F^{11} u_1^2.
 \end{aligned} \tag{35}$$

因为 u_1 足够大, 我们可以假设

$$\frac{1}{2} h' u_1 \leq g'd + h'u_1 \leq \frac{3}{2} h' u_1,$$

因此, 由(20)可得

$$u_{11} \leq -\frac{1}{4} h' u_1 \omega_1 \leq -\frac{1}{4} h' |Du|^2.$$

于是, (35)结合引理 5.1 可进一步估计为

$$0 \geq F^{ij} G_{ij} \geq -C \sum_i F^{ii} + \frac{1}{2(n-k+1)} (h')^2 \sum_i F^{ii} u_1^2, \tag{36}$$

这就完成了情况二的证明。

由上述两种情况和引理 5.2, 可得 u 的梯度估计。

6. c^2 估计

对于解的二阶导数估计, 我们通常采用分别处理二阶切向导数, 二阶切法向导数和二阶法向导数的方法。

由[3]可知, 我们只需估计二阶切法向导数和二阶法向导数, 然后利用一个关键引理说明解的二阶导数可以由边界上的二阶法向导数控制, 即可完成定理 1.3 的证明。

根据[9], 我们已经得到二阶法向导数估计:

引理 6.1: 设 M 是带有凸脐边界 ∂M 的光滑紧致流形, ν 是边界上的外单位法向量。若 $u \in C^4(M)$ 是

方程(1)的 k -容许解, 则

$$\sup_{\partial M} |u_{\nu\nu}| \leq C,$$

其中 C 是一个仅依赖于 n, k, f 的最小值, $\varphi_1, \varphi_2, \|u\|_{C^1}, \|f\|_{C^2}, \partial M$ 的正常数。

对于二阶切法向估计, 我们有如下引理:

引理 6.2: 设 τ 是切向的, ν 是法向的。在定理 1.3 的条件下, 有

$$|D_{\tau\nu} u(y)| \leq C,$$

其中 $y \in \partial M$, C 是一个仅依赖于 $\|u\|_{C^1}, \|f\|_{C^2}, \partial M, \varphi_1, \varphi_2$ 的正常数。

下面的引理说明解的二阶导数可以由边界上的二阶法向导数控制。

引理 6.3: 设 M 是带有凸脐边界且截面曲率非负的光滑紧致流形, ν 是边界上的外单位法向量。设 $M_1 = \sup_{\partial M} |u_{\nu\nu}|$, u 是方程(1)的 k -容许解。则

$$\sup u_{\xi\xi} \leq C_0(1 + M_1),$$

其中 $\xi \in S^{n-1}$, C 是一个仅依赖于 $\|u\|_{C^1}, \|f\|_{C^2}, \partial M, \varphi_1, \varphi_2$ 的正常数。

引理 6.2 的证明

我们在费米坐标系下进行计算。

由边界条件 $u_\eta = -u_{\tau_1}(x) + r_2(x)$ 和(3), 有

$$\begin{aligned} u_\eta &= -u_\nu = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \eta, \tau_i \rangle}{\langle \eta, \nu \rangle} u_{\tau_i} - \frac{1}{\langle \eta, \nu \rangle} u_\eta \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \langle \eta, \tau_i \rangle u_{\tau_i} - u_\eta \right) \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \langle \eta, \tau_i \rangle u_{\tau_i} + u\varphi_1 - \varphi_2 \right). \end{aligned} \quad (37)$$

对(37)求切向协变导数, 可得

$$\begin{aligned} u_{\eta\tau_i} &= \partial_{\tau_i} u_\eta - \Gamma_{\tau_j n}^i u_i \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \langle \eta, \tau_i \rangle u_{\tau_i\tau_j} + (u\varphi_1)_{\tau_j} - (\varphi_2)_{\tau_j} \right) + \kappa u_{\tau_j}. \end{aligned} \quad (38)$$

因此, 由(38)可得

$$|u_{n\alpha}| \leq C.$$

以上成了引理 6.2 的证明。

引理 6.3 的证明

考虑辅助函数

$$v(x, \xi) = u_{\xi\xi} - a^l u_l + K_1 \rho^2 + K_2 |Du|^2, \quad (39)$$

其中 $a^l = g^{il} a_i, a^l u_l = \langle Da, Du \rangle$, a 是一个待确定的函数。

对(39)求协变导数, 可得

$$v_i = u_{\xi\xi i} - a_i^l u_l - a^l u_{li} + K_1 (\rho^2)_i + 2K_2 u_l u_{li}.$$

对上式再求协变导数, 可得

$$v_{ij} = u_{\xi\xi ij} - a_{ij}^l u_l - a_i^l u_{lj} - a_j^l u_{li} - a^l u_{lij} + K_1(\rho^2)_{ij} + 2K_2 u_{lj} u_{li} + 2K_2 u_l u_{lij}.$$

记 $\sigma_k^{\frac{1}{k}}$ 为 $\tilde{F}$, 对方程 $\tilde{F} = \sigma_k^{\frac{1}{k}} = f^{\frac{1}{k}} = \tilde{f}$, 求协变导数, 可得

$$\tilde{F}^{ij} u_{ijl} = \tilde{f}_l + \tilde{f}_u u_l. \quad (40)$$

注意到 $\sigma_k^{\frac{1}{k}}$ 是凹的, 则

$$\tilde{F}^{ij} u_{ij\xi\xi} \geq \tilde{F}^{ij} u_{ij\xi\xi} + \tilde{F}^{ij,pq} u_{ij\xi} u_{pq\xi} = \tilde{f}_{\xi\xi}. \quad (41)$$

结合(2), (40)和(41), 可得

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{ij} v_{ij} &= \tilde{F}^{ij} u_{ij\xi\xi} - \tilde{F}^{ij} a_{ij}^l u_l - 2\tilde{F}^{ij} a_i^l u_{lj} - \tilde{F}^{ij} a^l u_{lij} + 2K_1 \sum_i \tilde{F}^{ii} + 2K_2 \tilde{F}^{ij} u_{lj} u_{li} + 2K_2 \tilde{F}^{ij} u_l u_{lij} \\ &\geq -C \left(\sum_i \tilde{F}^{ii} + 1 \right) + 2K_1 \sum_i \tilde{F}^{ii} + 2K_2 \tilde{F}^{ij} u_{lj} u_{li} - 2\tilde{F}^{ij} a_i^l u_{lj} - 2\tilde{F}^{ij} R_{ij\xi}^m u_{m\xi}. \end{aligned} \quad (42)$$

假设 $v(x, \xi)$ 在内部取得最大值。且我们假设 g_{ij} 和 u_{ij} 是对角的, $u_{ii} = \lambda_i, \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ 。现在我们证明存在 K_2 , 使得

$$K_2 \tilde{F}^{ii} u_{ii}^2 - 2\tilde{F}^{ij} R_{ii\xi}^\xi u_{\xi\xi} > 0. \quad (43)$$

若上式成立, 则根据

$$K_2 \tilde{F}^{ii} u_{ii} u_{ij} - 2\tilde{F}^{ij} u_{ij} a_i^l = K_2 \left(u_{ii} - \frac{a_i^l}{K_2} \right)^2 - \tilde{F}^{ii} \left[\frac{(a_i^l)^2}{K_2} \right], \quad (44)$$

可得

$$\tilde{F}^{ii} v_{ij} \geq K_2 \sum_i \tilde{F}^{ii} \left(u_{ii} - \frac{a_i^l}{K_2} \right)^2 + \left[2K_2 - \frac{(a_i^l)^2}{K_2} - C \right] \sum_i \tilde{F}^{ii}. \quad (45)$$

这样, 只需进一步选取 K_1, K_2 和 a , 使得
因此, v 在边界上取得最大值。

$$K_1 - \frac{(a_i^l)^2}{K_2} - C > 0, \quad (46)$$

即可得到

$$\tilde{F}^{ij} v_{ij} > 0.$$

现在我们证明(43)。首先, 有

$$K_2 \tilde{F}^{ii} u_{ii}^2 - 2\tilde{F}^{ij} R_{ii\xi}^\xi u_{\xi\xi} = K_2 \tilde{F}^{ii} u_{ii}^2 + 2\tilde{F}^{ij} g^{\xi\xi} R_{i\xi i\xi}^\xi u_{\xi\xi}.$$

若, 则(43)得证。下面假设 $u_{\xi\xi} < 0$, 我们有

$$F^{\xi\xi} \geq C(n, k) \sum_i F^{ii}.$$

因此, 对于足够大的 K^2 , 有

$$\begin{aligned}
& K_2 \tilde{F}^{ii} u_{ii}^2 - 2 \tilde{F}^{ii} R_{ii}^{\xi} u_{\xi\xi} \\
& \geq K_2 \tilde{F}^{\xi\xi} u_{\xi\xi}^2 + 2 \tilde{F}^{ii} g^{\xi\xi} R_{i\xi i\xi}^{\xi} u_{\xi\xi} \\
& \geq \frac{1}{k} \sigma_k^{\frac{1}{k}-1} \left(K_2 C(n, k) \sum_i F^{ii} u_{\xi\xi}^2 - C \sum_i F^{ii} |u_{\xi\xi}| \right) \\
& > 0,
\end{aligned} \tag{47}$$

这表明 u 在边界上取得最大值。我们在 v 的最大值点处使用费米坐标系, 则

$$0 \geq v_n = u_{\xi\xi n} - (a^i u_i)_n + K_1 (\rho^2)_n + 2K_2 u_l u_{ln}. \tag{48}$$

结合边界条件 $u_\eta = -ur_1 + r_2$ 和(3), 有

$$\begin{aligned}
u_n = -u_\nu &= \frac{1}{\cos \theta} (u\varphi_1 - \varphi_2). \\
u_{\alpha n} = u_{n\alpha} &= \partial_n u_\alpha - \Gamma_{\alpha n}^i u_i = \frac{1}{\cos \theta} (u\varphi_1 - \varphi_2)_\alpha - \Gamma_{\alpha n}^\beta u_\beta = \frac{1}{\cos \theta} (u\varphi_1 - \varphi_2)_\alpha + \kappa u_\alpha,
\end{aligned}$$

因此, 对于 $1 \leq \alpha \leq n-1$, 有

$$u_{\alpha n} = u_{n\alpha} = \partial_n u_\alpha - \Gamma_{\alpha n}^i u_i = \frac{1}{\cos \theta} (u\varphi_1 - \varphi_2)_\alpha - \Gamma_{\alpha n}^\beta u_\beta = \frac{1}{\cos \theta} (u\varphi_1 - \varphi_2)_\alpha + \kappa u_\alpha, \tag{49}$$

且

$$\begin{aligned}
u_{n\beta\alpha} &= \partial_\alpha u_{n\beta} - \Gamma_{\alpha n}^i u_{i\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^i u_{ni} \\
&= \frac{1}{\cos \theta} \partial_\alpha [(u\varphi_1 - \varphi_2)_\beta] + \partial_\alpha (\kappa u_\beta) + \kappa u_{\alpha\beta} \\
&\quad - \kappa g_{\alpha\beta} u_{nn} - \frac{1}{\cos \theta} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma (u\varphi_1 - \varphi_2)_\gamma - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \kappa u_\gamma.
\end{aligned} \tag{50}$$

我们还需要里奇恒等式

$$u_{n\alpha\beta} = u_{\beta n\alpha} = u_{\beta\alpha n} - R_{\beta\alpha n}^i u_i. \tag{51}$$

因此, 结合。(49)~(51), 可得

$$\begin{aligned}
0 &\geq u_{\alpha\alpha n} - (a^n u_n)_n - (a^\alpha u_\alpha)_n + K_1 (\rho^2)_n + 2K_2 u_n u_{nn} + 2K_2 u_\alpha u_{\alpha n} \\
&= u_{n\alpha\alpha} + R_{\alpha\alpha n}^i u_i - (a^n u_n)_n - (a^\alpha u_\alpha)_n + K_1 (\rho^2)_n + 2K_2 u_n u_{nn} + 2K_2 u_\alpha u_{\alpha n} \\
&\geq \frac{1}{\cos \theta} \partial_\alpha [(u\varphi_1 - \varphi_2)_\alpha] + \partial_\alpha (\kappa u_\alpha) + \kappa u_{\alpha\alpha} - \kappa g_{\alpha\alpha} u_{nn} - \frac{1}{\cos \theta} \Gamma_{\alpha\alpha}^\gamma (u\varphi_1 - \varphi_2)_\gamma \\
&\quad - \Gamma_{\alpha\alpha}^\gamma \kappa u_\gamma - (a^n u_n)_n - (a^\alpha u_\alpha)_n + K_1 (\rho^2)_n + 2K_2 u_n u_{nn} + 2K_2 u_\alpha u_{\alpha n} - C \\
&\geq \partial [(u\varphi_1)_\alpha + \kappa u_\alpha] + \kappa u_{\alpha\alpha} - [\kappa g_{\alpha\alpha} + a^n - 2K_2 (u\varphi_1 - \varphi_2)] u_{nn} - C \\
&\geq (\varphi_1 + \kappa) (u_{\alpha\alpha} + \Gamma_{\alpha\alpha}^i u_i) + \kappa u_{\alpha\alpha} - [\kappa g_{\alpha\alpha} + a^n - 2K_2 (u\varphi_1 - \varphi_2)] u_{nn} - C \\
&\geq (\varphi_1 + \kappa) u_{\alpha\alpha} - [\kappa g_{\alpha\alpha} + a^n - 2K_2 (u\varphi_1 - \varphi_2)] u_{nn} - C.
\end{aligned} \tag{52}$$

因此, 只要 a^n 和 K_2 满足

$$\kappa g_{\alpha\alpha} + a^n - 2K_2 (ur_1 - r_2) > 0, \tag{53}$$

就有

$$u_{\alpha\alpha} \leq C(1+u_{nn}),$$

且

$$u_{\xi\xi} \leq C(1+|u_{\nu\nu}|).$$

这就完成了引理 6.3 的证明。

基金项目

新疆维吾尔自治区自然科学基金资助项目(No. 2024D01A90)。

参考文献

- [1] Caffarelli, L.A., Nirenberg, L. and Spruck, J. (1985) The Dirichlet Problem for Nonlinear Second Order Elliptic Equations, III: Functions of the Eigenvalues of the Hessian. *Acta Mathematica*, **155**, 261-301. <https://doi.org/10.1007/bf02392544>
- [2] Lions, P.L., Trudinger, N.S. and Urbas, J.I.E. (1986) The Neumann Problem for Equations of Monge-Ampère Type. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **39**, 539-563. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160390405>
- [3] Ma, X.N. and Qiu, G.H. (2019) The Neumann Problem for Hessian Equations. *Communications in Mathematical Physics*, **366**, 1-28. <https://doi.org/10.1007/s00220-019-03339-1>
- [4] Trudinger, N.S. (2007) Recent Developments in Elliptic Partial Differential Equations of Monge-Ampère Type. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Madrid, 22-30 August 2006, 291-301. <https://doi.org/10.4171/022-3/15>
- [5] Guan, B. (1999) The Dirichlet Problem for Hessian Equations on Riemannian Manifolds. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **8**, 45-69. <https://doi.org/10.1007/s005260050116>
- [6] Guan, B. (2014) Second-order Estimates and Regularity for Fully Nonlinear Elliptic Equations on Riemannian Manifolds. *Duke Mathematical Journal*, **163**, 1491-1524. <https://doi.org/10.1215/00127094-2713591>
- [7] Guan, B. and Jiao, H.M. (2015) Second Order Estimates for Hessian Type Fully Nonlinear Elliptic Equations on Riemannian Manifolds. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **54**, 2693-2712. <https://doi.org/10.1007/s00526-015-0880-8>
- [8] Guan, B. and Xiang, N. (2018) On Estimates for Fully Nonlinear Elliptic Equations with Neumann Boundary Conditions on Riemannian Manifolds. https://www.researchgate.net/publication/329362377_On_estimates_for_fully_nonlinear_elliptic_equations_with_Neumann_boundary_conditions_on_Riemannian_Manifolds
- [9] He, Y., Tu, Q. and Zhang, J.N. (2020) The Neumann Boundary Problem for k-Hessian Equations on Compact Manifolds. *Scientia Sinica Mathematica*, **52**, 155-176. <https://doi.org/10.1360/ssm-2020-0067>
- [10] Gårding, L. (1959) An Inequality for Hyperbolic Polynomials. *Indiana University Mathematics Journal*, **8**, 957-965. <https://doi.org/10.1512/iumj.1959.8.58061>
- [11] Chou, K.S. and Wang, X.J. (2001) A Variational Theory of the Hessian Equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **54**, 1029-1064. <https://doi.org/10.1002/cpa.1016>