

一类时滞微分变分不等式的解的存在性

赵文¹, 许界科²

¹中国电子科技集团公司第三十研究所, 四川 成都

²成都理工大学数学科学学院, 四川 成都

收稿日期: 2026年6月10日; 录用日期: 2026年7月10日; 发布日期: 2026年7月20日

摘要

本文研究一类由时滞微分方程与变分不等式耦合构成的动力系统解的存在性问题。该类系统在控制理论与工程系统中具有重要应用背景。利用Schauder不动点定理、扩展解方法及变分不等式相关理论, 在适当假设条件下证明了系统解的存在性, 并进一步分析了其解的结构特征。

关键词

时滞系统, 变分不等式, 存在性, 不动点定理

Existence of Solutions to a Class of Time-Delay Differential Variational Inequalities

Wen Zhao¹, Jieke Xu²

¹The 30th Research Institute of China Electronics Technology Group Corporation, Chengdu Sichuan

²School of Mathematical Sciences, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: June 10, 2026; accepted: July 10, 2026; published: July 20, 2026

Abstract

This paper studies the existence of solutions to a class of dynamical systems coupled with time-delay differential equations and variational inequalities. These systems have important applications in control theory and engineering systems. Using Schauder's fixed-point theorem, the extended solution method, and related theories of variational inequalities, the existence of system solutions is proved under appropriate assumptions, and the structural characteristics of the solutions are further analyzed.

文章引用: 赵文, 许界科. 一类时滞微分变分不等式的解的存在性[J]. 理论数学, 2026, 16(7): 27-33.

DOI: 10.12677/pm.2026.167170

Keywords

Time-Delay System, Variational Inequality, Existence, Fixed-Point Theorem

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

2008 年, Pang 与 Stewart 在文献[1]中首次提出了微分变分不等式这一数学模型, 该模型有效结合了微分方程与变分不等式的结构特征。此后, 该模型引起了研究者的广泛关注, 围绕其理论分析、数值算法及实际应用, 已有大量研究成果相继涌现, 参见文献[2] [3]。在相关领域中, 傅等人利用带时滞的 Gronwall-Bellman 不等式, 建立了一系列判定时滞微分方程稳定性的充分条件[4]。

在许多实际工程和控制系统中, 经常遇到一类同时包含时滞和约束的耦合动力系统。在此类系统中, 动力学由微分方程描述, 约束或控制条件则采用变分不等式[4]的形式给出。本文所研究的系统如下:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = h(t, x(t-s), u(t-s)) & \forall t \in [0, T] \\ x(t) = \varphi(t), & \forall t \in [-s, 0], \\ u(t) = \psi(t), & \forall t \in [-s, 0] \end{cases} \quad (1)$$

$$\langle f(t, x(t), u(t)), v - u(t) \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K. \quad (2)$$

其中 $s > 0$ 为时滞常数, $x(t) \in R^n$ 为状态变量, $u(t) \in R^m$ 为控制变量, $K \subset R^m$ 为闭凸集,

$h: [0, T] \times R^n \times R^m \rightarrow R^n$, $f: [0, T] \times R^n \times R^m \rightarrow R^m$, $\varphi: [0, T] \rightarrow R^n$, 为连续映射, $\psi: [0, T] \rightarrow R^m$ 是可测的。

该类系统在机器人控制、电力网络、交通系统等领域有着广泛的应用背景。然而, 时滞与变分不等式的相互耦合使得其解的存在性分析颇具难度。本文旨在适当的函数空间框架与合理假设下, 建立系统解的存在性。

2. 预备知识

2.1. 函数空间与范数

2.1.1. 连续函数空间[5]

设 $C([a, b], R^n)$ 为从 $[a, b]$ 到 R^n 的连续函数全体, 赋予一致范数

$$\|x\|_C = \max_{t \in [a, b]} \|x(t)\|.$$

2.1.2. 可积函数空间[6]

设 $L^p([0, T], R^m)$ 为 p 次可积函数空间, 其中 $1 < p < \infty$, 赋予范数

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

2.2. Gronwall 不等式[7]

设 $u(t) \geq 0$, 且满足

$$u(t) \leq a + b \int_0^t u(s) ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

则

$$u(t) \leq ae^{bt}.$$

3. 时滞微分变分不等式解的存在性证明

3.1. 引理 1

设 h 是 Lipschitz 连续函数, φ 是连续函数, 且 $K \subset \mathbb{R}^m$ 是紧集, 则对一个可测函数 $u(t): [0, T] \rightarrow K$, 存在一个连续函数 $x(t)$ 为时滞微分方程(1)的解。

证明: 设对任意给定的 $u: [0, T_1] \rightarrow K$, 定义

$$Hx(t) = \varphi(0) + \int_0^t [h(t, x(\tau-s), u(\tau-s))] d\tau, \quad \forall t \in [0, T_1],$$

其中 $0 < T_1 < T$, 且

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t), & \forall t \in [-s, 0], \\ u(t) = \psi(t) & \forall t \in [-s, 0]. \end{cases}$$

设

$$\|x\|_{C([0, T_1]; \mathbb{R}^m)} = \sup_{[0, T_1]} \|x(t)\|, \quad \forall x \in C([0, T_1]; \mathbb{R}^m).$$

对任意给定正常数 b , 有

$$S = \{x(t) \mid x(t) \in C([0, T_1], \mathbb{R}^n), \|x(t) - \varphi(0)\| \leq b, \forall t \in [0, T_1]\},$$

由于 h 是 Lipschitz 连续的, 且 K 是紧的, $u(\tau-s)$ 和 $x(\tau-s)$ 在 $[-s, 0]$ 上是有界的, 则存在常数 $M_1 > 0$, 使得对任意的 $x(t) \in S$,

$$\|h(t, x(\tau-s), u(\tau-s))\| \leq M_1.$$

设 $T_1 = \min\left\{T, \frac{b}{M_1}\right\}$, 则对任意的 $t \in [0, T_1]$,

$$\|Hx(t) - \varphi(0)\| \leq M_1 T \leq b.$$

此外, 对任意的 $t_1, t_2 \in [0, T_1]$, 有

$$\begin{aligned} \|Hx(t_1) - Hx(t_2)\| &\leq \left\| \int_{t_2}^{t_1} h(t, x(\tau-s), u(\tau-s)) d\tau \right\| \\ &\leq M_1 |t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

因此, 映射 $H: S \rightarrow S$ 是一致有界且等度连续. 并且, 满足 Schauder 不动点定理[8], 所以存在 $x(t) \in S$, 使得 $Hx(t) = x(t)$ 。

由于 h 是 Lipschitz 连续且有界, 并且 $u(t)$ 是有界的, 即

$$\begin{aligned} &\|h(t, x(t-s), u(t-s))\| \\ &\leq \|h(t, x(t-s), u(t-s)) - h(t, 0, u(t-s))\| \\ &\quad + \|h(t, 0, u(t-s)) - h(t, 0, 0)\| + \|h(t, 0, 0) - h(0, 0, 0)\| \\ &\leq L \|x(t-s)\| + L \|u(t-s)\| + C \end{aligned}$$

其中 $L > 0$, C 是常数。

接下来, 设

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t [h(t, x(\tau-s), u(\tau-s))] d\tau, \quad \forall t \in [0, T_1],$$

则有,

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \left\| \varphi(0) + \int_0^t [h(t, x(\tau-s), u(\tau-s))] d\tau \right\| \\ &\leq \|\varphi(0)\| + \left\| \int_0^t h(t, x(\tau-s), u(\tau-s)) d\tau \right\| \\ &\leq \|\varphi(0)\| + \int_0^t L \|x(t-s)\| + L \|u(t-s)\| + C d\tau \\ &\leq \|\varphi(0)\| + LM_u T + L \|\psi\| s + L \int_0^t \|x(\tau-s)\| d\tau \\ &\leq \|\varphi(0)\| + LM_u T + L \|\psi\| s + L \|\varphi\| s + L \int_0^t \|x(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

通过 Gronwall 不等式得

$$\|x(t)\| \leq \alpha e^{LT}, \quad (3)$$

其中 $\alpha = \|\varphi(0)\| + LM_u T + L \|\psi\| s + L \|\varphi\| s$ 。

最后, 通过扩展解方法[9], 得到存在一个连续函数 $x(t)$, 使得对任意 $t \in [0, T]$, 有

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t [A_0 x(\tau) + A_1 x(\tau-s) + Bu(\tau-s)] d\tau$$

根据[10], 可以得到 $x(t)$ 是时滞微分方程(1)的解, 对几乎处处 $t \in [0, T]$ 。

3.2. 引理 2

设 f, g 是连续函数, $K \subset R^m$ 是紧凸集, 当 $u \in K$ 时, $f(t, x, \cdot)$ 是单调的, 对每一个固定的 t 和 x , 则有对一个连续函数 $x(t)$, 存在一个可测函数 $u(t): [0, T] \rightarrow K$, 使得对任意可测函数 $x_k(t): [0, T] \rightarrow K$, 有

$$\int_0^T \langle f(t, x(t), u(t)), u(t) - v(t) \rangle dt \leq 0$$

证明: 由于 g 是连续函数和 $K \subset R^m$ 是紧凸集, 根据文献[11]结论 2.2.5, 对每个固定的时间 $t \in [0, T]$, 存在一个解 $u \in K$, 满足下面变分不等式

$$\langle f(t, x(t), u), v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K. \quad (4)$$

而且, 根据 g 的单调性, $u_k(t): [0, T] \rightarrow K$ 根据文献[12]中命题 1, 变分不等式(2)可以等价为如下对偶变分不等式

$$\langle f(t, x(t), v), u - v \rangle \leq 0, \quad \forall v \in K. \quad (5)$$

因为 $x(t)$ 在 $[0, T]$ 上是连续的, 则存在函数列 $\{x_k(t)\}$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 使得 $x_k(t)$ 收敛到 $x(t)$ [13]。因此, 由不等式(4)可得, 对于一个阶跃函数 $x_k(t)$, 存在一个阶跃函数, 使得 $u_k(t): [0, T] \rightarrow K$

$$\langle f(t, x_k(t), v), u_k(t) - v \rangle \leq 0, \quad \forall v \in K.$$

由于这个阶跃函数 $\{u_k(t)\}$ 是可测且有界的, 存在一个 $\{u_k(t)\}$ 的子列, 也将这个子列记作 $\{u_k(t)\}$, 使得

$$u_k(t) \xrightarrow{w} u(t),$$

由于 Mazur 定理[14], 在 $L^2[0, T]$ 空间上, $\{u_k(t)\}$ 一系列凸组合在 $\|\cdot\|_{L^2}$ 范数下弱收敛到 $u(t)$ 。在 $L^2[0, T]$ 空间下, 收敛序列具有几乎处处逐点收敛的子列[15], 因此可得 $u(t)$ 在 $[0, T]$ 上可测, 对几乎处处所有 $t \in [0, T]$, $u(t) \in K$ 。

因为对任意可测函数 $v(t): [0, T] \rightarrow K$,

$$\int_0^T \langle f(t, x_k(t), v(t)), u_k(t) - v(t) \rangle dt \leq 0,$$

且

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \int_0^T \langle f(t, x_k(t), v(t)), u_k(t) - v(t) \rangle dt - \int_0^T \langle f(t, x(t), v(t)), u(t) - v(t) \rangle dt \right\| \\ & \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \int_0^T \langle f(t, x_k(t), v(t)), u_k(t) - v(t) \rangle dt - \int_0^T \langle f(t, x(t), v(t)), u_k(t) - v(t) \rangle dt \right\| \\ & \quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \int_0^T \langle f(t, x(t), v(t)), u_k(t) - v(t) \rangle dt - \int_0^T \langle f(t, x(t), v(t)), u(t) - v(t) \rangle dt \right\| \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle f(t, x(t), v(t)), u(t) - v(t) \rangle dt \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \langle f(t, x_k(t), v(t)), u_k(t) - v(t) \rangle dt \\ & \leq 0. \end{aligned}$$

3.3. 定理 1

设 φ , f 是连续函数, h 是 Lipschitz 连续, $K \subset R^m$ 是紧凸集, 当 $u \in K$ 时, $f(t, x, \cdot)$ 是单调的, 对每一个固定的 t 和 x , 则存在一对 $(u(t), x(t))$, 使得 $u(t)$ 是可测的并且满足变分不等式(2), 对几乎处处 $t \in [0, T]$, 以及 $x(t)$ 是时滞微分方程(1)的解。

证明: 对于一个可测函数 $u^0(t): [0, T] \rightarrow K$, 由引理 3.1, 存在一个连续函数 $x^1(t)$, 满足以下微分方程,

$$\begin{cases} x^1(t) = \int_0^t h(\tau, x^1(\tau-s), u^0(\tau-s)) d\tau & \forall t \in [0, T], \\ x^1(t) = \varphi(t), & \forall t \in [-s, 0], \\ u^0(t) = \psi(t), & \forall t \in [-s, 0] \end{cases}$$

由引理 3.2, 存在一个可测函数 $u^1(t): [0, T] \rightarrow K$, 使得对任意可测函数 $v(t): [0, T] \rightarrow K$,

$$\int_0^T \langle f(t, x^1(t), v(t)), u^1(t) - v(t) \rangle dt \leq 0.$$

重复上述方法步骤, 当 $n=1, 2, \dots$, 我们得到一个序列 $\{x^n(t), u^n(t)\}$, 使得

$$\begin{cases} x^{n+1}(t) = \int_0^t h(\tau, x^{n+1}(\tau-s), u^n(\tau-s)) d\tau & \forall t \in [0, T], \\ x^{n+1}(t) = \varphi(t), & \forall t \in [-s, 0], \\ u^n(t) = \psi(t), & \forall t \in [-s, 0] \end{cases} \quad (6)$$

和对任意可测函数 $v(t): [0, T] \rightarrow K$, 有

$$\int_0^T \langle f(t, x^n(t), v(t)), u^n(t) - v(t) \rangle dt \leq 0. \quad (7)$$

随后, 由于 K 的紧性, 可以推出 $\{u^n(t)\}$ 具有一个子列, 该子列依然记作 $\{u^n(t)\}$, 使得 $u^n(t)$ 在 L^2 范数下弱收敛到一个极限 $u(t)$ 。此外

$$\begin{aligned} & \|x^{n+1}(t) - x^n(t)\| \\ &= \left\| \int_0^t h(\tau, x^{n+1}(\tau-s), u^n(\tau-s)) d\tau - \int_0^t h(\tau, x^n(\tau-s), u^{n-1}(\tau-s)) d\tau \right\| \\ &\leq \int_0^t L \|x^{n+1}(\tau-s) - x^n(\tau-s)\| d\tau + \left\| \int_0^t L(u^n(\tau-s) - u^{n-1}(\tau-s)) d\tau \right\| \\ &\leq \left\| \int_0^t L(u^n(\tau-s) - u^{n-1}(\tau-s)) d\tau \right\| \cdot \exp\left(\int_0^T L d\tau\right) \end{aligned} \quad (8)$$

上面最后一个不等式是通过 Gronwall 不等式推导出来的, 得到 $\{x^n(t)\}$ 的一致有界性。然后, 我们定义

$$M_1 = \max_{\tau \in [0, T]} \left[h(\tau, x^n(\tau-s), u^{n-1}(\tau-s)) \right]$$

由(5)得

$$\begin{aligned} \|x^n(t_1) - x^n(t_2)\| &= \left\| \int_{t_2}^{t_1} h(\tau, x^n(\tau-s), u^{n-1}(\tau-s)) d\tau \right\| \\ &\leq M_1 |t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

因此, $\{x^n(t)\}$ 在 $[0, T]$ 上是等度连续的, 通过 Arzelà-Ascoli 定理, 序列 $\{x^n(t)\}$ 存在一个子列, 也记作 $\{x^n(t)\}$, 使得 $\{x^n(t)\}$ 一致收敛到极限 $x(t)$ 。

当 $n \rightarrow \infty$, 由(6)得

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t h(\tau, x(\tau-s), u(\tau-s)) d\tau & \forall t \in [0, T], \\ x(t) = \varphi(t), & \forall t \in [-s, 0], \\ u(t) = \psi(t), & \forall t \in [-s, 0] \end{cases}$$

由文献[10], 可以推导出 $x(t)$ 是(1)的解, 对于几乎处处的 $t \in [0, T]$ 。

同样为了得到和(5)相似的结论, 由不等式(7)和(8), 对任意的可测函数 $v(t): [0, T] \rightarrow K$,

$$\int_0^T \langle f(t, x(t), v(t)), u(t) - v(t) \rangle dt \leq 0, \quad (9)$$

随后, 我们证明, 对几乎所有 $t \in [0, T]$,

$$\langle f(t, x(t), v(t)), u(t) - v(t) \rangle \leq 0, \quad \forall v \in K \quad (10)$$

我们采用反证法, 去证明上述不等式成立, 我们假设存在一个子集 $E \subset [0, T]$, 其中 Lebesgue 测度 $m(E) > 0$, 并且对于每一个 $t \in E$, $u(t)$ 都不满足对偶变分不等式(10)的解。然后, 存在一个 $t_0 \in E$ 和一个 $v_0 \in K$, 使得

$$\langle f(t_0, x(t_0), v_0), u(t_0) - v_0 \rangle = \lambda > 0,$$

定义

$$h(t) = \langle f(t, x(t), v_0), u(t) - v_0 \rangle.$$

由于 $u(t)$ 在 $[0, T]$ 上可测, 根据 Lusin 定理[6], 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $E_1 \subset E$, 使得 $m(E - E_1) < \varepsilon$, 并且 $u(t)$ 在 E_1 上连续, 因此 $h(t)$ 在 E_1 上连续, 并且存在 t_0 的邻域 $U(t_0)$, 使得 Lebesgue 测度

$m(U(t_0) \cap E_1) > 0$, 并且对于所有 $t \in U(t_0) \cap E_1$, 都有 $|h(t) - h(t_0)| \leq \frac{\lambda}{2}$, 令

$$v(t) = \begin{cases} v_0, & \forall t \in U(t_0) \cap E_1, \\ u(t), & \forall t \in [0, T] / (U(t_0) \cap E_1), \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle f(t, x(t), v(t)), u(t) - v(t) \rangle dt \\ &= \int_{U(t_0) \cap E_1} \langle f(t, x(t), v_0), u(t) - v_0 \rangle dt \\ & \quad + \int_{[0, T] / (U(t_0) \cap E_1)} \langle f(t, x(t), u(t)), u(t) - u(t) \rangle dt \\ & > \frac{\lambda}{2} > 0. \end{aligned}$$

这与不等式(9)是矛盾的, 因此对于几乎所有 $t \in [0, T]$ 都满足不等式(10), 由于变分不等式(3)和(4)等价. 对几乎所有 $t \in [0, T]$, $u(t)$ 都满足不等式(2)。

4. 结论

本文研究了一类由时滞微分方程与变分不等式耦合构成的动力系统, 在适当的假设条件下, 综合运用 Schauder 不动点定理、Gronwall 不等式、扩展解方法以及变分不等式理论, 严格证明了系统解的存在性。研究结果表明, 在 Lipschitz 连续性、单调性及紧凸性等条件下, 该耦合系统存在满足约束的解。本文的工作为进一步探讨解的唯一性、稳定性及数值计算方法奠定了理论基础。

参考文献

- [1] Pang, J. and Stewart, D.E. (2008) Differential Variational Inequalities. *Mathematical Programming*, **113**, 345-424. <https://doi.org/10.1007/s10107-006-0052-x>
- [2] Chen, X. and Wang, Z.Y. (2014) Differential Variational Inequality Approach to Dynamic Games with Shared Constraints. *Mathematical Programming*, **146**, 379-408. <https://doi.org/10.1007/s10107-013-0689-1>
- [3] Chen, T., Huang, N. and Sofonea, M. (2022) A Differential Variational Inequality in the Study of Contact Problems with Wear. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **67**, Article ID: 103619. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2022.103619>
- [4] 傅朝金, 廖晓昕. 时滞微分方程的稳定性[J]. 数学物理学报, 2003, 23(4): 494-498.
- [5] 张石生. 变分不等式及其相关问题[M]. 重庆: 重庆科学技术出版社, 2008.
- [6] 孙炯, 贺飞, 郝晓玲, 等. 泛函分析[M]. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [7] Chen, X.J. and Wang, Z.Y. (2013) Convergence of Regularized Time-Stepping Methods for Differential Variational Inequalities. *SIAM Journal on Optimization*, **23**, 1647-1671. <https://doi.org/10.1137/120875223>
- [8] Smart, D.R. (1973) Fixed Point Theorems. Cambridge University Press.
- [9] Hirsch, M.W., Smale, S. and Devaney, R.L. (2004) Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos. Academic Press.
- [10] Rudin, W. (1970) Real and Complex Analysis. The McGraw-Hill Companies, Inc.
- [11] Facchinei, F. and Pang, S.J. (2003) Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems, Volume I. Springer. <https://doi.org/10.1007/b97544>
- [12] Crouzeix, J. (1997) Pseudomonotone Variational Inequality Problems: Existence of Solutions. *Mathematical Programming*, **78**, 305-314. <https://doi.org/10.1007/bf02614358>
- [13] Dinculeanu, N. (2000) Vector Integration and Stochastic Integration in Banach Spaces. John Wiley & Sons. <https://doi.org/10.1002/9781118033012>
- [14] Yosida, K. (1980) Functional Analysis. Springer.
- [15] Lang, S. (1993) Real and Functional Analysis. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0897-6>