

艾森斯坦(Eisenstein)判别法的应用

程梦醒, 杨冰燕, 陈晓友*

河南工业大学数学与统计学院, 河南 郑州

收稿日期: 2026年6月10日; 录用日期: 2026年7月31日; 发布日期: 2026年8月26日

摘要

多项式是高等代数中重要的研究对象, 而不可约多项式在多项式里处于关键地位。因此, 判断有理数域上的多项式是否可约就显得非常重要。艾森斯坦(Eisenstein)判别法是判断有理数域上的多项式不可约的有效方法。本文给出了该判别法的几个应用。

关键词

不可约多项式, 次数, 有理数域, 艾森斯坦(Eisenstein)判别法

Applications of Eisenstein's Criterion

Mengxing Cheng, Bingyan Yang, Xiaoyou Chen*

School of Mathematics and Statistics, Henan University of Technology, Zhengzhou Henan

Received: June 10, 2026; accepted: July 31, 2026; published: August 26, 2026

Abstract

Polynomials are important objects of study in advanced algebra, and irreducible polynomials play a significant role among polynomials. Therefore, determining whether a polynomial over the field of rational numbers is irreducible becomes very crucial. The Eisenstein criterion is an effective method for determining the irreducibility of polynomials over the field of rational numbers. Several application of this criterion are presented in this paper.

Keywords

Irreducible Polynomial, Degree, Rational Field, Eisenstein Criterion

*通讯作者。



1. 引言

设 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, 分别表示整数集合, 有理数域, 实数域, 复数域。设 F 是数域, 称 $F[x]$ 为 F 上的一元多项式环。若次数不小于 1 的多项式 $p(x) \in F[x]$ 不能表示成 $F[x]$ 中的两个次数比 $p(x)$ 的次数低的多项式的乘积, 则称 $p(x)$ 为 F 上的不可约多项式。根据代数学基本定理可知, $\mathbb{C}$ 上的不可约多项式只有一次的; $\mathbb{R}$ 上的不可约多项式或为一次或为二次; 然而, $\mathbb{Q}$ 上的不可约多项式却可以有任意正整数次的。这也就显示了, $\mathbb{Q}$ 上不可约多项式的复杂性。

在高等代数中, 判断一个多项式 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是否可约是重要的研究问题。而由高斯引理可知, 对 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 的研究可以转化到 $\mathbb{Z}$ 上进行。艾森斯坦(Eisenstein)判别法([1], 第一章, 定理 13)是用于判断 $\mathbb{Q}$ 上的多项式不可约的重要方法, 陈述如下。

定理 1.1 (Eisenstein 判别法) 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x],$$

其中 $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, 非负整数 n 为 $f(x)$ 的次数。若存在素数 p 使得

- 1) $p \nmid a_n$;
- 2) $p \mid a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$;
- 3) $p^2 \nmid a_0$,

则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

需要注意的是, 艾森斯坦(Eisenstein)判别法中的条件只是判断一个多项式不可约的充分条件。例如, 虽然 $x-1$ 是不可约多项式, 但找不到素数 p 满足定理中的条件。文章[2]-[5]也讨论艾森斯坦(Eisenstein)判别法及其应用。

因此, 通过某种变换找到一个素数去利用艾森斯坦(Eisenstein)判别法判断多项式不可约就显得比较关键。

命题 1.2 设 $f(x) \in F[x]$, $a \in F$, 令 $x = y + a$, 记 $g(y) = f(y + a)$, 则 $f(x)$ 在 F 上可约当且仅当 $g(y)$ 在 F 上可约。

证明 若 $f(x)$ 在 F 上可约, 用 $\partial(f(x))$ 表示 $f(x)$ 的次数, 则存在 $f_1(x), f_2(x) \in F[X]$ 使得

$$f(x) = f_1(x) f_2(x),$$

其中 $1 \leq \partial(f_1(x)), \partial(f_2(x)) < \partial(f(x))$ 。于是,

$$g(y) = f(y + a) = f_1(y + a) f_2(y + a)。$$

又因 $f_1(y + a), f_2(y + a) \in F[y]$ 且 $1 \leq \partial(f_1(y + a)) = \partial(f_1(x))$, $\partial(f_2(y + a)) = \partial(f_2(x)) < \partial(g(y)) = \partial(f(x))$, 因此 $g(y)$ 在 F 上可约。

若 $g(y)$ 在 F 上可约, 则存在 $g_1(y), g_2(y) \in F[Y]$ 使得

$$g(y) = g_1(y) g_2(y),$$

其中 $1 \leq \partial(g_1(y)), \partial(g_2(y)) < \partial(g(y))$ 。于是,

$$f(x) = f((x-a)+a) = g(x-a) = g_1(x-a)g_2(x-a)。$$

又因 $g_1(x-a), g_2(x-a) \in F[x]$ 且 $1 \leq \partial(g_1(x-a)) = \partial(g_1(y))$,
 $\partial(g_2(x-a)) = \partial(g_2(y)) < \partial(g(y)) = \partial(f(x))$, 因此 $f(x)$ 在 F 上可约。

由命题 1.2 可得下面的推论。

推论 1.3 设 $f(x) \in F[x]$, $a \in F$, 令 $x = y + a$, 记 $g(y) = f(y+a)$, 则 $f(x)$ 在 F 上不可约当且仅当 $g(y)$ 在 F 上不可约。

2. 应用

在这一节中, 通过推论 1.3 我们给出艾森斯坦(Eisenstein)判别法的几个应用。

命题 2.1 设 p 为奇素数, 则多项式 $x^p + px + 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

证明 不妨记 $f(x) = x^p + px + 1$ 。令 $x = y - 1$, 则

$$\begin{aligned} f(x) &= (y-1)^p + p(y-1) + 1 \\ &= y^p + \sum_{k=1}^{p-2} \binom{p}{k} y^{p-k} (-1)^k + 2py - p = g(y) \end{aligned}$$

其中 $\binom{p}{k} = \frac{p!}{(p-k)!k!}$ 。又因为

$$p \nmid b_p = 1; p \mid b_{p-1}, \dots, p \mid b_0; p^2 \nmid b_0,$$

其中 $-p = b_0, b_1, \dots, b_{p-1}, b_p = 1$ 为多项式 $g(y)$ 的系数。由艾森斯坦(Eisenstein)判别法知, $g(y)$ 不可约。由推论 1.3 知, $f(x)$ 与 $g(y)$ 具有相同的不可约性。因此, $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上也不可约。 ■

注意, 在上面的命题 1.2 中, 素数 p 不能等于 2。否则, $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, 从而 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约。

命题 2.2 设 p 为素数, 则多项式 $\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。特别地, $x^2 + x + 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

证明 注意到,

$$\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = \frac{x^p - 1}{x - 1}$$

令 $x = y + 1$, 则

$$\Phi_p(x) = \frac{(y+1)^p - 1}{y} = y^{p-1} + py^{p-2} + \sum_{i=2}^{p-3} \binom{p}{i} y^{p-i-1} + \frac{p(p-1)}{2} y + p = h(y)。$$

由艾森斯坦(Eisenstein)判别法知, $h(y)$ 不可约。从而, 由推论 1.3 知, $\Phi_p(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上也不可约。 ■

接下来, 我们通过两种方法讨论一个具体的例子。

例 2.3 证明多项式 $x^6 + x^3 + 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

证明 (法一) 记 $f(x) = x^6 + x^3 + 1$ 。令 $x = y + 1$, 则

$$f(x) = (y+1)^6 + (y+1)^3 + 1 = y^6 + 6y^5 + 15y^4 + 21y^3 + 18y^2 + 9y + 3 = k(y)。$$

取 $p = 3$, 由艾森斯坦(Eisenstein)判别法知, $k(y)$ 不可约。从而, 由推论 1.3 知, $f(x)$ 不可约。

(法二) 由([1], 第一章, 定理 12)知, $f(x) = x^6 + x^3 + 1$ 可能的有理根只能是 ± 1 , 但 $f(1) = 3 \neq 0$, $f(-1) = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$, 因此, $f(x)$ 无一次因子。假设 $f(x)$ 可约, 则 $f(x)$ 或分解为二次与四次多项式的

乘积或两个三次多项式的乘积。

若

$$x^6 + x^3 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f),$$

其中 $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ ，则根据左右两端系数关系可得，

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ ac + b + d = 0 \\ e + ad + bc = 1 \\ f + ae + bd = 0 \\ af + be = 0 \\ bf = 1. \end{cases}$$

于是，

$$\begin{cases} a + c = 0 \Rightarrow a = -c \\ ac + b + d = 0 \\ e + ad + bc = 1 \Rightarrow a(d - 2) = 1, ad = 1 \\ f + ae + bd = 0 \\ af + be = 0 \Rightarrow a = -e \\ bf = 1 \Rightarrow b = f = 1, b = f = -1. \end{cases}$$

从而， $b = f = 1$ 时， $a(d - 2) = 1 \Rightarrow a = 1, d = 3$ 或 $a = -1, d = 1$ ； $b = f = -1$ 时， $ad = 1 \Rightarrow a = 1 = d$ 或 $a = -1 = d$ ；这些情况代入到 $ac + b + d = 0$ 均产生矛盾。

若

$$x^6 + x^3 + 1 = (x^3 + ax^2 + bx + c)(x^3 + dx^2 + ex + f),$$

其中 $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ ，则根据左右两端系数关系可得，

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ e + ad + b = 0 \\ c + f + ae + bd = 1 \\ af + be + cd = 0 \\ bf + ce = 0 \\ cf = 1. \end{cases}$$

于是，

$$\begin{cases} a + d = 0 \Rightarrow a = -d \\ e + ad + b = 0 \Rightarrow ad = 0 \\ c + f + ae + bd = 1 \\ af + be + cd = 0 \\ bf + ce = 0 \Rightarrow b = -e \\ cf = 1 \Rightarrow c = f = 1, c = f = -1. \end{cases}$$

由于 $a = d = 0$ ，从而 $1 = c + f + ae + df = c + f$ ，矛盾。

因此， $f(x) = x^6 + x^3 + 1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。 ■

艾森斯坦(Eisenstein)判别法具有一定的局限性。虽然无法用定理 1.1 以及推论 1.2 来说明 $x^4 + 1$ 在 $\mathbb{Q}$

上不可约, 但是利用上例中的方法(二)可判断出 x^4+1 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

基金项目

河南工业大学项目(GJXYLH202613, KYXL2026217, lxxcxy202424, 2024PYJH019)与河南省自然科学基金项目(252300421983)。

参考文献

- [1] 北京大学数学系前代数小组, 编, 王萼芳, 石生明, 王立中, 修订. 高等代数(第六版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2025.
- [2] 丁南庆. 谈谈艾森斯坦判别法[J]. 高等数学研究, 2026, 29(2): 1-3+39.
- [3] 宋岩. 浅谈不可约多项式的判定[J]. 新教育时代, 2021(25): 129-130.
- [4] 李贵荣, 韩忠月, 陈志国. 艾森斯坦判别法的推广[J]. 德州学院学报, 2005, 21(4): 33-35.
- [5] 高凤德, 朱一心. 关于 Eisenstein 判别法[J]. 徐州师范大学学报, 2000, 18(4): 8-10.