

不可压缩对流Brinkman-Forchheimer方程弱解的研究

翟 勇¹, 唐九奇^{1*}, 陈星文²

¹桂林学院信息工程学院, 广西 桂林

²南宁市第一职业技术学校信息专业部, 广西 南宁

收稿日期: 2026年6月22日; 录用日期: 2026年7月18日; 发布日期: 2026年7月24日

摘 要

本文研究当系数满足 $32\mu^2\beta\alpha \geq 1$ 时, 不可压缩对流Brinkman-Forchheimer方程的全局解的存在性、连续性以及唯一性。通过古典的能量方法、Friedrich方法证明了全局解的存在性, 同时运用Sobolev紧嵌入定理, 结合不等式估计证明了在限制条件下解的连续性和唯一性。该结果改进了已有文献中对阻尼指数 r 和参数 α, β 的限制条件, 揭示了Brinkman-Forchheimer方程模型的物理现象, 为多孔介质流体动力学的数学理论提供了重要基础。

关键词

Brinkman-Forchheimer方程, 存在性, 唯一性, 连续性

Study on the Weak Solutions to the Incompressible Convective Brinkman-Forchheimer Equations

Yong Zhai¹, Jiuqi Tang^{1*}, Xingwen Chen²

¹School of Information Engineering, Guilin College, Guilin Guangxi

²Information Department, No. 1 Vocational Technical School of Nanning, Nanning Guangxi

Received: June 22, 2026; accepted: July 18, 2026; published: July 24, 2026

Abstract

This paper study the existence, uniqueness, and continuity of global solutions for the incompressible

*通讯作者。

文章引用: 翟勇, 唐九奇, 陈星文. 不可压缩对流 Brinkman-Forchheimer 方程弱解的研究[J]. 理论数学, 2026, 16(7): 45-55. DOI: 10.12677/pm.2026.167172

convective Brinkman-Forchheimer equations under the condition that the coefficients satisfy $32\mu^2\beta\alpha \geq 1$. The existence of global solutions is established via classical energy methods and the Friedrichs method. Furthermore, by employing the Sobolev compact embedding theorem combined with key inequality estimates, the uniqueness and continuity of solutions are proved under the specified constraint. These results improve upon the restrictions on the damping exponent r and the parameters α, β found in existing literature. They also contribute to revealing the physical phenomena inherent in the Brinkman-Forchheimer model and provide a significant foundation for the mathematical theory of fluid dynamics in porous media.

Keywords

The Brinkman-Forchheimer Equation, Existence, Uniqueness, Continuity

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

全空间上的不可压缩对流 Brinkman-Forchheimer 方程如下

$$\begin{cases} \partial_t u - \mu \Delta u + u \cdot \nabla u + \alpha u + \beta |u|^{r-1} u + \nabla p = 0, & (0, T) \times \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} u = 0, & (0, T) \times \mathbb{R}^3, \\ u(0, x) = u^0(x), & \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $u(x, t) = (u_1, u_2, u_3)$ 表示速度场, $p(x, t)$ 表示压力。常数 μ 表示正的 Brinkman 系数, 此外 α 和 β 是两个正的常数, 分别表示 Darcy 系数(多孔介质的渗透率)和 Forchheimer 系数(与材料的孔隙率成比例)。对流 Brinkman-Forchheimer 方程(1.1)描述了饱和多孔介质中不可压缩粘性流体的运动, 适用于均质、各向同性、刚性多孔介质, 尤其在高流速、高孔隙率条件下更准确。该模型已被用于解释一些现实世界中的现象, 例如在非牛顿流体理论中, 或在潮汐动力学中, 详细内容见文献[1]-[3]。

本文我们仅考虑 $r=5$ 时的不可压对流 Brinkman-Forchheimer 方程:

$$\begin{cases} \partial_t u - \mu \Delta u + u \cdot \nabla u + \alpha u + \beta |u|^4 u + \nabla p = 0, & (0, T) \times \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} u = 0, & (0, T) \times \mathbb{R}^3, \\ u(0, x) = u^0(x), & \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.2)$$

方程组(1.2)的第一个方程中, 当系数 α 等于零时, 与 Navier-Stokes 方程具有相同的形式, 在这种情况下, 该方程被称为带有阻尼项的 Navier-Stokes 方程, 其中阻尼项为 $\beta |u|^4 u$ 。流体运动的阻力由诸如多孔介质流动、阻力或摩擦, 或其他耗散机制等物理因素引起。介质流动、阻力、摩擦或其他耗散机制等物理因素所导致的流体运动阻力, 由阻尼项 $\beta |u|^{r-1} u$ 决定。目前已有多位学者对带有阻尼项的 Navier-Stokes 方程进行了研究, 其中 Cai [4]证明了弱解的全局存在性。Benameur [5]为该领域带来了新的发现, 即模型阻尼项为 $a(e^{|u|^2} - 1)u$, 他们运用 Friedrich 方法和一些新工具证明了存在全局解。

近些年, Song [6]研究了三维有界区域上 Brinkman-Forchheimer 方程全局解的渐近稳定性, Gautam [7]研究了带有阻尼项的对流 Brinkman-Forchheimer 方程在有限域或周期域中的解的存在性、唯一性和正则

性, Li [8] 研究了一类带有非线性阻尼项 $\kappa|u|^{\alpha-1}u$ 与磁场阻尼项 $\gamma|b|^{\beta-1}b$ 的不可压的磁流体动力学方程组的解的整体存在性问题。而 Jilali [9] 证明了当系数满足 $r=3, 4\mu\beta \geq 1$ 时, 全空间上不可压缩对流 Brinkman-Forchheimer 方程存在唯一的全局解, Blel [10] 证明了当阻尼指数 $\beta > 3$ 时, 三维带非线性阻尼的 Navier-Stokes 方程全局弱解在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中具有唯一性和连续性。受到文献[9][10]的启发, 本文中在放宽吸收指数 $r=5$ 的条件下将推广文献[9][10]的结果, 该结果能够更加真实地模拟流体的实际运动, 同时也对磁流体动力学的发展提供了进一步的理论深化。

论文结构如下: 第 1 节建立了不可压缩对流 Brinkman-Forchheimer 方程 Cauchy 问题弱解的定义以及给出主要结果; 第 2 节回顾了基本定义和相关命题和引理; 第 3 节基于能量估计和紧致性等方法, 证明全局弱解的存在性、连续性及唯一性。

在讨论全局解存在性之前, 本节先给出弱解的定义。

定义 1 函数对 (u, p) 被称为方程(1.2)的弱解, 如果对于任何 $T > 0$, 满足以下条件:

- 1) $u \in L^\infty([0, T]; L_\sigma^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T]; \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^6([0, T], L^6(\mathbb{R}^3))$ 。
- 2) $\partial_t u - \mu \Delta u + u \cdot \nabla u + \alpha u + \beta|u|^4 u = -\nabla p$ 在 $\mathcal{D}'([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ 中成立: 对于任何 $\Phi \in C_0^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ 使得 $\operatorname{div} \Phi(t, x) = 0$ 对所有 $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3$ 成立且 $\Phi(T) = 0$, 有

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u; \partial_t \Phi) dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u; \nabla \Phi) dx dt + \alpha \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (u; \Phi) dx dt + \beta \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (|u|^4 u; \Phi) dx dt = (u^0; \Phi(0))_{L^2}.$$

- 3) $\operatorname{div} u(x, t) = 0$ 几乎处处成立 $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3$ 。 $(\cdot; \cdot)_{L^2}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中的内积。

本文主要定理由下面定理 1.1 给出。

定理 1.1 若 $u^0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $\operatorname{div} u^0 = 0$ 且 $32\mu^2\beta\alpha \geq 1$, 则柯西问题(1.2)存在唯一全局弱解 u 使得

$$u \in C_b(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^6(\mathbb{R}^+, L^6(\mathbb{R}^3)),$$

并且对于任意 $t \geq 0$, 有

$$\|u\|_{L^2}^2 + 2\mu \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 + 2\alpha \int_0^t \|u\|_{L^2}^2 + 2\beta \int_0^t \|u\|_{L^6}^6 \leq \|u^0\|_{L^2}^2. \quad (1.3)$$

2. 预备知识

首先给出本文的一些基本的预备知识, 这些内容的详细证明, 读者可查阅相关参考文献, 这里不再给出证明过程。

定义 2.1 [5] 对于函数 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $R > 0$, Friedrichs 算子 J_R 定义为

$$J_R(D) = \mathcal{F}^{-1}(\chi_{B_R} \hat{f}),$$

其中 B_R 是以 O 为中心, 半径为 R 的球。

定义 2.2 [9] Leray 投影 $P: (L^2(\mathbb{R}^3))^3 \rightarrow (L_\sigma^2(\mathbb{R}^3))^3$ 定义为

$$\mathcal{F}^{-1}(Pf) = \hat{f}(\xi) - \left(\hat{f}(\xi) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \right) \frac{\xi}{|\xi|} = M(\xi) \hat{f}(\xi),$$

其中 $L_\sigma^2(\mathbb{R}^3) = \left\{ f \in (L^2(\mathbb{R}^3))^3; \operatorname{div} f = 0 \right\}$, $M(\xi)$ 是矩阵 $\left(\delta_{k,\ell} - \frac{\xi_k \xi_\ell}{|\xi|^2} \right)_{1 \leq k, \ell \leq 3}$ 。

定义 2.3 [5] 算子 $A_R(D)$ 在 $(L^2(\mathbb{R}^3))^3$ 上, 定义如下

$$A_R(D)u := J_R(\mathbb{P}(u)) = \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto M(\xi)\mathcal{X}_{B(0,\mathbb{R})}(\xi)\mathcal{F}(u)(\xi)\right).$$

下面综述一些经典结果, 并给出一些研究柯西问题(1.2)的命题以及相关引理。

命题 2.1 [11] [12] 设 H 为希尔伯特空间。

1) 如果 (x_n) 是 H 中的有界序列, 那么存在一个子序列 $(x_{\phi(n)})$ 使得

$$(x_{\phi(n)} | y) \rightarrow (x | y), \quad \forall y \in H.$$

2) 如果 $x \in H$ 且 (x_n) 是 H 中的有界序列, 并且

$$(x_n | y) \rightarrow (x | y), \quad \forall y \in H,$$

那么

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

3) 如果 $x \in H$ 且 (x_n) 是 H 中的一个有界序列, 满足

$$(x_n | y) \rightarrow (x | y), \quad \forall y \in H,$$

并且

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \|x\|,$$

那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

命题 2.2 [13] 设 s_1 和 s_2 为两个实数, 若 $s_1 < \frac{3}{2}$ 且 $s_1 + s_2 > 0$, 则存在常数 $C_1 = C_1(s_1, s_2)$, 使得对任意

$f, g \in \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^3)$, 有 $f \cdot g \in \dot{H}^{s_1+s_2-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$ 且

$$\|fg\|_{\dot{H}^{s_1+s_2-\frac{3}{2}}} \leq C_1 (\|f\|_{\dot{H}^{s_1}} \|g\|_{\dot{H}^{s_2}} + \|f\|_{\dot{H}^{s_2}} \|g\|_{\dot{H}^{s_1}}).$$

若 $s_1, s_2 < \frac{3}{2}$ 且 $s_1 + s_2 > 0$, 则存在常数 $C_2 = C_2(s_1, s_2)$, 使得对任意 $f \in \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^3)$ 和 $g \in \dot{H}^{s_2}(\mathbb{R}^3)$, 有

$f \cdot g \in \dot{H}^{s_1+s_2-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$ 且

$$\|fg\|_{\dot{H}^{s_1+s_2-\frac{3}{2}}} \leq C_2 \|f\|_{\dot{H}^{s_1}} \|g\|_{\dot{H}^{s_2}}.$$

引理 2.2 [5] 对任意 $x, y \in \mathbb{R}^3$, 有

$$(|x|^4 x - |y|^4 y) \cdot (x - y) \geq \frac{1}{2} (|x|^4 + |y|^4) |x - y|^2.$$

引理 2.3 [5] 对任意 $s > \frac{d}{2}$, $L^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ 。进一步, 有

$$\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^d)} \leq \sigma_{s,d} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall f \in H^{-s}(\mathbb{R}^d),$$

这里 $\sigma_{s,d} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi \right)^{1/2}$ 。

引理 2.4 [5] 设 $p \in (1, \infty)$ 且 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个非空开子集。如果 (f_n) 是 $L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ 中的一个有界序

列, 且 $f \in L^2(\Omega)$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n | g)_{L^2} = (f | g)_{L^2}, \forall g \in L^2(\Omega).$$

那么 $f \in L^p(\Omega)$ 并且

$$\|f\|_{L^2} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^2},$$

$$\|f\|_{L^p} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^p}.$$

3. 主要结果的证明

步骤一:

在这一步中, 首先证明柯西问题(1.2)的一个一般性结果。

命题 3.1 假设 $v_1, v_2, v_3 \in [0, \infty)$, $r_1, r_2, r_3 \in (0, \infty)$, 并且 $f_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ 。对于 $n \in \mathbb{N}$, 令 $F_n: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是 $C^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3))$ 中的一个可测函数, 满足

$$A_n(D)F_n = F_n, \quad F_n(0, x) = A_n(D)f_0(x)$$

并且

$$\partial_t F_n + \sum_{k=1}^3 v_k |D_k|^{2r_k} F_n + A_n(D) \operatorname{div}(F_n \otimes F_n) + \alpha F_n + \beta A_n(D) [|F_n|^4 F_n] = 0, \quad (3.1)$$

$$\|F_n(t)\|_{L^2}^2 + 2 \sum_{k=1}^3 v_k \int_0^t \| |D_k|^{r_k} F_n \|^2_{L^2} + 2\alpha \int_0^t \|F_n\|_{L^2}^2 + 2\beta \int_0^t \|F_n\|_6^6 \leq \|f_0\|_{L^2}^2. \quad (3.2)$$

那么对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon, \alpha, \beta, \|f_0\|_{L^2}) > 0$ 使得对于所有 $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$, 有

$$|t_2 - t_1| < \delta \Rightarrow \|F_n(t_2) - F_n(t_1)\|_{H^{-s_0}} < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

其中 $s_0 = \max \left\{ 3, 2 \max_{1 \leq i \leq 3} r_i \right\}$ 。

证明: 命题 3.1 的证明受文献[5]命题 3.1 的启发。即在区间 $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}^+$ 上对(3.1)进行积分, 并在 H^{-s_0} 中取内积得

$$\|F_n(t_2) - F_n(t_1)\|_{H^{-s_0}} \leq I_{1,n}(t_1, t_2) + I_{2,n}(t_1, t_2) + I_{3,n}(t_1, t_2) + I_{4,n}(t_1, t_2),$$

其中

$$I_{1,n}(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^3 v_k \int_{t_1}^{t_2} \| |D_k|^{2r_k} F_n \|_{H^{-s_0}},$$

$$I_{2,n}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \| A_n(D) \operatorname{div}(F_n \otimes F_n) \|_{H^{-s_0}},$$

$$I_{3,n}(t_1, t_2) = \alpha \int_{t_1}^{t_2} \|F_n\|_{H^{-s_0}},$$

$$I_{4,n}(t_1, t_2) = \beta \int_{t_1}^{t_2} \| A_n(D) [|F_n|^4 F_n] \|_{H^{-s_0}}.$$

对于 $I_{1,n}(t_1, t_2)$, $I_{2,n}(t_1, t_2)$, $I_{3,n}(t_1, t_2)$ 的详细放缩见文献[5], 以下直接应用文献[5]的结果, 同时详细对 $I_{4,n}(t_1, t_2)$ 进行放缩。

设 $\varepsilon > 0$ 为任一正实数, 找一正实数 $\delta > 0$, 使得当 $|t_2 - t_1| < \delta$ 时, 有

$$I_{k,n} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall k = \{1, 2, 3, 4\}.$$

对于 $I_{1,n}(t_1, t_2)$, 有

$$\begin{aligned} I_{1,n}(t_1, t_2) &= \sum_{k=1}^3 v_k \int_{t_1}^{t_2} \|D_k|^{2n_k} F_n\|_{H^{-s_0}} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^3 v_k\right) \|f_0\|_{L^2} (t_2 - t_1). \end{aligned}$$

若 $|t_2 - t_1| < \delta_1 = \frac{\varepsilon}{4\left(\sum_{k=1}^3 v_k\right)\|f_0\|_{L^2} + 4}$, 有

$$I_{1,n}(t_1, t_2) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

对于 $I_{2,n}(t_1, t_2)$, 有

$$\begin{aligned} I_{2,n}(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} \|A_n(D) \operatorname{div}(F_n \otimes F_n)\|_{H^{-s_0}} \\ &\leq \sigma_{2,3} \|f_0\|_{L^2}^2 (t_2 - t_1). \end{aligned}$$

若 $|t_2 - t_1| < \delta_2 = \frac{\varepsilon}{4\sigma_{2,3}\|f_0\|_{L^2}^2 + 4}$, 有

$$I_{2,n}(t_1, t_2) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

对于 $I_{3,n}(t_1, t_2)$, 有

$$\begin{aligned} I_{3,n}(t_1, t_2) &= \alpha \int_{t_1}^{t_2} \|F_n\|_{H^{-s_0}} \\ &\leq \alpha \|f_0\|_{L^2} (t_2 - t_1). \end{aligned}$$

如果 $|t_2 - t_1| < \delta_3 = \frac{\varepsilon}{4\alpha\|f_0\|_{L^2} + 4}$, 得到

$$I_{3,n}(t_1, t_2) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

对于 $I_{4,n}(t_1, t_2)$, 由引理 2.3, 得

$$\begin{aligned} I_{4,n}(t_1, t_2) &\leq \beta \int_{t_1}^{t_2} \|A_n(D) [|F_n|^4 F_n]\|_{H^{-3}} \\ &\leq \sigma_{3,3} \beta \int_{t_1}^{t_2} \|(|F_n|^4 F_n)(\tau)\|_{L^1} d\tau. \end{aligned}$$

接下来, 对于 $(n, R, t) \in \mathbb{N} \times (1, +\infty) \times [0, +\infty)$, 考虑 $\mathbb{R}^3$ 的如下集合:

$$X_n(R, t) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |F_n(t, x)| \leq R\},$$

故得

$$\begin{aligned} I_{4,n}(t_1, t_2) &\leq \sigma_{3,3} \beta \int_{t_1}^{t_2} \int_{X_n(R, t)} |F_n(\tau, x)|^5 dx d\tau + \sigma_{3,3} \beta \int_{t_1}^{t_2} \int_{X_n(R, t)^c} |F_n(\tau, x)|^5 dx d\tau \\ &\leq \sigma_{3,3} \beta R^3 \int_{t_1}^{t_2} \|F_n(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau + \frac{\sigma_{3,3} \beta}{R} \int_{t_1}^{t_2} \|F_n(\tau)\|_{L^6}^6 d\tau. \end{aligned}$$

由(3.2)式得到

$$I_{4,n}(t_1, t_2) \leq \sigma_{3,3} \beta R^3 \|f_0\|_{L^2}^2 (t_2 - t_1) + \frac{\sigma_{3,3} \beta}{R} \|f_0\|_{L^2}^2.$$

取 $R = \frac{8\sigma_{3,3}\beta\|f_0\|_{L^2}^2}{\varepsilon}$ 和 $\delta_4 = \frac{\varepsilon}{8\sigma_{3,3}\beta R^3\|f_0\|_{L^2}^2}$, 得到

$$|t_2 - t_1| < \delta_4 \Rightarrow I_{4,n}(t_1, t_2) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

只需取 $\delta = \min_{1 \leq i \leq 4} \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$ 。因此对于所有 $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$, 有

$$|t_2 - t_1| < \delta \Rightarrow \|F_n(t_2) - F_n(t_1)\|_{H^{-s_0}} < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

注 3.1: 该引理主要用于证明接下来的等度连续。

步骤二:

在这一步中, 构造柯西问题(1.2)的全局解, 应用文献[5]的方法。为此, 考虑带有参数 $n \in \mathbb{N}$ 的逼近问题:

$$\begin{cases} \partial_t u - \mu \Delta J_n u + J_n (J_n u \cdot \nabla J_n u) + \alpha J_n u + \beta J_n [|J_n u|^4 J_n u] = -\nabla p_n, \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \\ p_n = (-\Delta)^{-1} \left(\operatorname{div} J_n (J_n u \cdot \nabla J_n u + \beta \operatorname{div} J_n [|J_n u|^4 J_n u]) \right) \\ \operatorname{div} u = 0, \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ u(0, x) = J_n u^0(x), \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

根据柯西-利普希茨定理, 得到柯西问题(1.2)的解 $u_n \in C^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3))$, 具有以下性质

$$\operatorname{div} u_n = 0, \quad J_n u_n = u_n.$$

另外 u_n 还满足

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \mu \Delta u_n + J_n (u_n \cdot \nabla u_n) + \alpha u_n + \beta J_n [|J_n u|^4 u_n] = -\nabla p_n, \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ p_n = (-\Delta)^{-1} \left(\operatorname{div} J_n (J_n u \cdot \nabla J_n u + \beta \operatorname{div} J_n [|u_n|^4 u]) \right) \\ \operatorname{div} u_n = 0, \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ u_n(0, x) = J_n u^0(x), \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

故得能量不等式

$$\|u_n(t)\|_{L^2}^2 + 2\mu \int_0^t \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 + 2\alpha \int_0^t \|u_n\|_{L^2}^2 + 2\beta \int_0^t \|u_n\|_{L^6}^6 \leq \|u^0\|_{L^2}^2, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.3)$$

根据不等式(3.3), 得到序列 (u_n) 在以下空间中有界

$$L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^6(\mathbb{R}^+, L^6(\mathbb{R}^3)).$$

利用命题 3.1, 得出序列 (u_n) 在 $C_b(\mathbb{R}^+, H^{-1}(\mathbb{R}^3))$ 中是等度连续的。

设 $(T_q)_q \in (0, \infty)^\mathbb{N}$ 满足 $T_q < T_{q+1}$ 且当 $q \rightarrow \infty$, $T_q \rightarrow \infty$ 。接下来, 假设 $(\theta_q)_{q \in \mathbb{N}}$ 是 $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 中的一个序列, 满足对于所有 $q \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \theta_q(x) = 1, \forall x \in B\left[0, q+1+\frac{1}{4}\right], \\ \theta_q(x) = 0, \forall x \in B(0, q+2)^c, \\ 0 \leq \theta_q \leq 1. \end{cases}$$

利用(3.3), 序列 (u_n) 等度连续以及通过结合 Ascoli's 定理和康托尔对角线过程, 得到一个非递减的数列

$$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ 和 } u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap C(\mathbb{R}^+, H^{-3}(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^6(\mathbb{R}^+, L^6(\mathbb{R}^3)),$$

使得对于所有 $q \in \mathbb{N}$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\theta_q(u_{\varphi(n)} - u)\|_{L^\infty([0, T_q], H^{-4})} = 0.$$

而对任意 $t > 0$, 序列 $(u_{\varphi(n)})_n$ 在 L^2 空间中弱收敛于 u , 结合上述不等式, 得到(2.3)。

下面证明 u 是问题(1.2)的解。类似于文献[5]中的思路, 可证明出 u 满足

$$\partial_t u - \mu \Delta u + u \cdot \nabla u + \alpha u + \beta |u|^4 u = -\nabla p, \text{ 在 } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3) \text{ 中}.$$

因此, u 是柯西问题(1.2)的解。

1) 连续性证明:

首先证明 u 在 $t=0$ 处的连续性。由能量估计

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t (\mu \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 + \alpha \|u(s)\|_{L^2}^2 + \beta \|u(s)\|_{L^6}^6) ds \leq \frac{1}{2} \|u^0\|_{L^2}^2,$$

可得 $\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u^0\|_{L^2}^2$,

由此立即推出 $\limsup_{t \rightarrow 0} \|u(t)\|_{L^2} \leq \|u^0\|_{L^2}$ 。

根据事实 $u(t)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中弱收敛于 u^0 , 即对任意 $v \in L^2(\mathbb{R}^3)$, 都有

$$\lim_{t \rightarrow 0} (u(t) - u^0, v)_{L^2} = 0.$$

由命题 2.1 可知

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(t) - u^0\|_{L^2} = 0,$$

即 u 在 $t=0$ 处按 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 连续。

接下来证明对任意 $t > 0$ 的连续性。为证 u 在 $(0, \infty)$ 上的连续性, 引入平移函数

$$v_\eta(t) = u(t + \eta), \quad p_\eta(t) = p(t + \eta), \quad \eta > 0.$$

而原方程为

$$\partial_t u - \mu \Delta u + u \cdot \nabla u + \alpha u + \beta |u|^4 u + \nabla p = 0,$$

因此平移后的函数满足

$$\partial_t v_\eta - \mu \Delta v_\eta + v_\eta \cdot \nabla v_\eta + \alpha v_\eta + \beta |v_\eta|^4 v_\eta + \nabla p_\eta = 0.$$

令 $\omega_\eta = u - v_\eta$, 将两式相减并整理可得

$$\partial_t \omega_\eta - \mu \Delta \omega_\eta + \alpha \omega_\eta + \beta (|u|^4 u - |v_\eta|^4 v_\eta) + \nabla(p - p_\eta) = \omega_\eta \cdot \nabla \omega_\eta - \omega_\eta \cdot \nabla u - u \cdot \nabla \omega_\eta.$$

将方程在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中与 ω_η 作内积, 利用不可压条件 $\operatorname{div} \omega_\eta = 0$ 以及分部积分恒等式 $(\omega_\eta \cdot \nabla \omega_\eta, \omega_\eta)_{L^2} = 0$, 可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\omega_\eta(t)\|_{L^2}^2 + \mu \|\nabla \omega_\eta(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\omega_\eta(t)\|_{L^2}^2 + \beta (|u|^4 u - |v_\eta|^4 v_\eta, \omega_\eta)_{L^2} = -(\omega_\eta \cdot \nabla u, \omega_\eta)_{L^2}. \quad (3.4)$$

应用引理 2.2, 对非线性阻尼项可得下界估计

$$\beta \left(|u|^4 u - |v_\eta|^4 v_\eta, \omega_\eta \right)_{L^2} \geq \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(|u|^4 + |v_\eta|^4 \right) |\omega_\eta|^2 \geq \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 |\omega_\eta|^2.$$

应用霍尔德不等式以及杨不等式在(3.4)的右端项, 有

$$\begin{aligned} \left| \left\langle w_\eta \cdot \nabla u, w_\eta \right\rangle_{L^2} \right| &\leq \left\| \omega_\eta u \right\|_{L^2} \left\| \nabla \omega_\eta \right\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{4\mu} \left\| \omega_\eta u \right\|_{L^2}^2 + \mu \left\| \nabla \omega_\eta \right\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{1}{4\mu} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 |\omega_\eta| |\omega_\eta| dx + \mu \left\| \nabla \omega_\eta \right\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{1}{32\mu^2 \beta} \int_{\mathbb{R}^3} |\omega_\eta|^2 + \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 |\omega_\eta|^2 + \mu \left\| \nabla \omega_\eta \right\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

代入(3.4)得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \omega_\eta(t) \right\|_{L^2}^2 + \left(\alpha - \frac{1}{32\mu^2 \beta} \right) \left\| \omega_\eta(t) \right\|_{L^2}^2 \leq 0.$$

因此应用条件 $32\mu^2 \beta \alpha \geq 1$ 以及两边积分得

$$\left\| \omega_\eta(t) \right\|_{L^2}^2 \leq \left\| \omega_\eta(\eta) \right\|_{L^2}^2 \Leftrightarrow \left\| v_\eta(t) - u(t) \right\|_{L^2}^2 \leq \left\| v_\eta(\eta) - u(\eta) \right\|_{L^2}^2.$$

于是得

$$\left\| u(t+\eta) - u(t) \right\|_{L^2}^2 \leq \left\| u(2\eta) - u(\eta) \right\|_{L^2}^2 \leq \left\| u(2\eta) - u^0 \right\|_{L^2}^2 + \left\| u(\eta) - u^0 \right\|_{L^2}^2.$$

因为 $\limsup_{\eta \rightarrow 0^+} (u(t+\eta), u^0)_{L^2} = (u(\eta), u^0)_{L^2}$, 于是

$$\limsup_{\eta \rightarrow 0^+} \left\| u(t+\eta) - u(t) \right\|_{L^2} \leq \limsup_{\eta \rightarrow 0^+} \left\| u(2\eta) - u^0 \right\|_{L^2} + \limsup_{\eta \rightarrow 0^+} \left\| u(\eta) - u^0 \right\|_{L^2} = 0.$$

由此可得, u 在 $\mathbb{R}^+$ 上的每一点都右连续。同理取

$$v_\eta = u(t-\eta), p_\eta = p(t-\eta),$$

令 $\eta \rightarrow 0^+$, 可证出 u 在 t 处左连续。因此 $u \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3))$ 。

2) 唯一性证明:

设 (u, p_u) 和 (v, p_v) 是柯西问题(2.1)的两个弱解。定义差值函数 $\omega = u - v$, 满足 $\omega(0) = 0$ 和 $\operatorname{div} \omega = 0$ 。将 u 和 v 对应的方程两式子相减得

$$\partial_t \omega - \mu \Delta \omega + (u \cdot \nabla u - v \cdot \nabla v) + \alpha \omega + \beta (|u|^4 u - |v|^4 v) + \nabla (p_u - p_v) = 0.$$

计算对流项得

$$u \cdot \nabla u - v \cdot \nabla v = u \cdot \nabla \omega + \omega \cdot \nabla v.$$

代入方程得

$$\partial_t \omega - \mu \Delta \omega + u \cdot \nabla \omega + \omega \cdot \nabla v + \alpha \omega + \beta (|u|^4 u - |v|^4 v) + \nabla (p_u - p_v) = 0.$$

将上式与 ω 相乘, 并在 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 取内积, 利用 $\operatorname{div} \omega = 0$ 和 $\operatorname{div} u = 0$, 且 $(u \cdot \nabla \omega, \omega)_{L^2} = 0$ 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\omega\|_{L^2}^2 + \mu \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 + \alpha \|\omega\|_{L^2}^2 + \beta (|u|u - |v|v, \omega)_{L^2} \\ & = -(\omega \cdot \nabla v, \omega)_{L^2} \leq \|\omega v\|_{L^2} \|\nabla \omega\|_{L^2} \leq \frac{1}{4\mu} \|\omega v\|_{L^2}^2 + \mu \|\nabla \omega\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

通过引理 2.2 得

$$\beta (|u|^4 u - |v|^4 v, \omega)_{L^2} \geq \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|u|^4 + |v|^4) |\omega|^2 \geq \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^4 |\omega|^2.$$

应用杨不等式得

$$\frac{1}{4\mu} \int_{\mathbb{R}^3} |\omega|^2 |v|^2 \leq \frac{1}{32\mu^2\beta} \int_{\mathbb{R}^3} |\omega|^2 + \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^4 |\omega|^2.$$

代入方程得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\omega\|_{L^2}^2 + \alpha \|\omega\|_{L^2}^2 + \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^4 |\omega|^2 \leq \frac{1}{32\mu^2\beta} \int_{\mathbb{R}^3} |\omega|^2 + \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^4 |\omega|^2.$$

于是

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\omega\|_{L^2}^2 + \left(\alpha - \frac{1}{32\mu^2\beta} \right) \|\omega\|_{L^2}^2 \leq 0,$$

由 Gronwall 引理及 $\omega(0) = 0$ ，得对所有 $t \geq 0$ 都有 $\omega(t) = 0$ 成立，故 $u = v$ ，唯一性得证。

基金项目

本研究得到了广西高校中青年教师科研基础能力提升项目(项目编号: 2025KY1019)资助。

参考文献

- [1] Shenoy, A.V. (1994) Non-Newtonian Fluid Heat Transfer in Porous Media. In: *Advances in Heat Transfer*, Elsevier, 101-190. [https://doi.org/10.1016/s0065-2717\(08\)70233-8](https://doi.org/10.1016/s0065-2717(08)70233-8)
- [2] Gordeev, R.G. (1973) The Existence of a Periodic Solution in a Certain Problem of Tidal Dynamics. In: *Problems of Mathematical Analysis, No. 4: Integral and Differential Operators (Differential Equations, in Russian)*, Izdat Leningrad University.
- [3] Likhtarnikov, A.L. (1981) Existence and Stability of Bounded and Periodic Solutions in a Nonlinear Problem of Tidal Dynamics. In: *The Direct Method in the Theory of Stability and Its Applications (Irkutsk, 1979)*, Nauka Sibirsk Otdel, 83-91.
- [4] Cai, X. and Jiu, Q. (2008) Weak and Strong Solutions for the Incompressible Navier-Stokes Equations with Damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **343**, 799-809. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.01.041>
- [5] Benameur, J. (2022) Global Weak Solution of 3D-NSE with Exponential Damping. *Open Mathematics*, **20**, 590-607. <https://doi.org/10.1515/math-2022-0050>
- [6] Song, X.L. and Xie, X.Q. (2024) Asymptotic Stability of Solutions to the Three-Dimensional Brinkman-Forchheimer Equations. *Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition)*, **52**, 60-66.
- [7] Gautam, S. and Mohan, M.T. (2024) On the Convective Brinkman-Forchheimer Equations. <https://arxiv.org/abs/2412.20940v1>
- [8] Li, L.R., Hong, M.L. and Zheng, L. (2024) Global Existence of Solutions for a Class of MHD Equations with Nonlinear Damping Term. *Journal of Applied Mathematics*, **37**, 63-72.
- [9] Jlali, L. and Benameur, J. (2024) Long Time Decay of Incompressible Convective Brinkman-Forchheimer in $L^2(\mathbb{R}^3)$. *Demonstratio Mathematica*, **57**, 101-190. <https://doi.org/10.1515/dema-2024-0013>
- [10] Blel, M. and Benameur, J. (2024) Asymptotic Analysis of Leray Solution for the Incompressible NSE with Damping. *Demonstratio Mathematica*, **57**, 843-868. <https://doi.org/10.1515/dema-2024-0042>
- [11] Brezis, H. (1992) *Analyse Fonctionnelle: Theorie et Application*. 3rd Edition, Masson.

-
- [12] Chemin, J.Y., Desjardins, B., Gallagher, I. and Grenier, E. (2000) Fluids with Anisotropic Viscosity. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **34**, 315-335. <https://doi.org/10.1051/m2an:2000143>
 - [13] Chemin, J.Y. (1996) About Navier-Stokes Equations (Report No. R96023). Publications du Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Paris VI.