

全纯纤维全空间上负曲率Finsler度量的研究

张 静, 黄珠珠

重庆理工大学数学科学学院, 重庆

收稿日期: 2026年6月24日; 录用日期: 2026年7月28日; 发布日期: 2026年8月7日

摘 要

本文旨在紧全纯纤维化的全空间上, 构造具有负全纯截面曲率的复Finsler度量。设 $p: X \rightarrow B$ 为紧复流形间的全纯纤维化, 假设底空间 B 具有负全纯截面曲率的Hermitian度量 h_B , 全空间 X 具有光滑强拟凸复Finsler度量 G , 且 G 在每个纤维 $X_t = p^{-1}(t)$ 上的限制具有负全纯截面曲率。本文采用混合叠加构造 $F_k = G + kA = G + kp^*h_B$, 证明: 当参数 k 充分大时, F_k 是 X 上光滑强拟凸复Finsler度量, 并具有负全纯截面曲率。

关键词

负全纯截面曲率, 复Finsler度量, 紧全纯纤维化, 曲率估计, Kobayashi双曲性

Finsler Metrics of Negative Curvature on the Total Space of a Holomorphic Fibration

Jing Zhang, Zhuzhu Huang

School of Mathematical Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: June 24, 2026; accepted: July 28, 2026; published: August 7, 2026

Abstract

This paper constructs complex Finsler metrics with negative holomorphic sectional curvature on the total space of a compact holomorphic fibration. Let $p: X \rightarrow B$ be a holomorphic fibration between compact complex manifolds. Assume that the base B admits a Hermitian metric h_B of negative holomorphic sectional curvature, and that X is equipped with a smooth strongly pseudoconvex complex Finsler metric G whose restriction to every fiber $X_t = p^{-1}(t)$ has negative holomorphic sectional curvature. We consider the mixed metric $F_k = G + kA = G + kp^*h_B$. Prove that, for

all sufficiently large k , F_k is a smooth strongly pseudoconvex complex Finsler metric on X with negative holomorphic sectional curvature.

Keywords

Negative Holomorphic Sectional Curvature, Complex Finsler Metric, Compact Holomorphic Fibration, Curvature Estimate, Kobayashi Hyperbolicity

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

负曲率在复几何中一直是研究重点。根据 Kobayashi 双曲理论[1], 配备负全纯截面曲率度量的紧复流形必为 Kobayashi 双曲流形。反之, 一般的 Kobayashi 双曲性是否能够推出某种负曲率度量的存在, 仍是复几何中的重要问题。因此, 研究在自然几何结构下构造负曲率度量, 不仅有助于理解曲率与复解析映射之间的关系, 也为双曲几何中的稳定性问题提供了可计算的模型。

在 Hermitian 与 Kähler 框架中, 关于全纯纤维化全空间负曲率度量的构造已有较系统的研究。在文献[2]中, Grauert 与 Reckziegel 在一族紧 Riemann 曲面的纤维邻域内构造了负全纯截面曲率 Hermitian 度量; Cowen [3]将这一结果推广至高维情形, 紧 Hermitian 流形的复解析族中任意具有负全纯截面曲率的纤维, 其邻域内整个解析族都具有负全纯截面曲率。对于典型紧全纯纤维化 Kodaira 曲面, Cheung [4]构造了具有负全纯截面曲率的 Kähler 度量; Tsai [5]进一步给出负双全纯截面曲率 Hermitian 度量; To 与 Yeung [6]、Tsui [7]也借助 Teichmüller 空间、独立构造等不同手段, 分别得到负双全纯截面曲率 Kähler 度量的存在性结果。进一步地, Cheung [1]证明: 若一般紧全纯纤维化的底空间与纤维均具有负全纯截面曲率 Hermitian 度量, 则全空间亦具有负全纯截面曲率 Hermitian 度量。Wan [8]在紧相对 Kähler 纤维化情形中得到了负全纯截面曲率和负全纯双截面曲率 Kähler 度量的构造。

然而, 现有构造主要建立在 Hermitian/Kähler 度量体系之上。复 Finsler 度量允许切变量非二次依赖, 更适合刻画某些自然的非二次几何结构; 同时, 复 Finsler 曲率公式显著依赖切变量方向, 曲率估计中出现的水平提升也随度量改变而改变。这使得 Hermitian/Kähler 框架中的张量线性估计不能直接照搬到 Finsler 框架。特别地, 若试图在底空间和全空间均使用 Finsler 度量, 直接考虑

$$G_X + kp^*G_B,$$

则 p^*G_B 在垂直切丛 $\ker p_*$ 附近通常不能在 $TX \setminus \{0\}$ 上保持光滑。该问题并非技术性小缺口, 而是与 Finsler 度量必须在全非零切丛上光滑这一基本定义直接冲突。因此, 从 Hermitian/Kähler 构造过渡到 Finsler 构造时, 必须重新选择叠加项并重新组织曲率估计。本文选择混合构造

$$F_k = G + kA = G + kp^*h_B, \quad A(x; \xi) = h_B(p_*\xi, p_*\xi),$$

其原因如下。第一, G 是全空间上的强拟凸 Finsler 度量, 其在垂直方向的限制正是纤维上的 Finsler 度量, 因此它保留了纤维负曲率假设。第二, $A = p^*h_B$ 是关于切变量的二次光滑函数, 在垂直方向恰为零, 在非垂直方向为正; 因此 kA 可以在水平占优方向放大底空间的负曲率效应, 而不会破坏垂直方向的原有 Finsler 曲率结构。第三, h_B 是 Hermitian 度量, 故其拉回项在整个 TX 上光滑, 包括垂直切丛附近; 这正

是纯 Finsler 拉回项通常缺失的性质。由此, F_k 同时兼顾了 Finsler 框架的非二次灵活性与 Hermitian 拉回项的光滑可控性。本文证明的核心思想是分区估计。对于水平占优区域, kA 在数值上主导 G , 通过正函数 $\partial\bar{\partial}$ 不等式和底空间负曲率获得负性。对于垂直邻域, A 在垂直方向消失, 不能直接提供曲率压制; 此时需要证明 F_k 的 Finsler 水平提升在垂直射影丛上一致趋近于纤维度量 G_t 的水平提升。该渐近分析是本文区别于 Hermitian/Kähler 构造的主要技术部分。

具体而言, 本文建立如下定理。

定理 1.1 设 $p: X \rightarrow B$ 是紧复流形间的全纯纤维化, 假设:

- (i) 底空间 B 具有负全纯截面曲率的 Hermitian 度量 h_B ;
- (ii) 全空间 X 具有光滑强拟凸复 Finsler 度量 G , 且对任意 $t \in B$, 其在纤维 $X_t = p^{-1}(t)$ 上的限制 $G_t = G|_{TX_t}$ 具有负全纯截面曲率。

则存在 $k_0 > 0$, 使得对所有 $k \geq k_0$,

$$F_k = G + kA = G + kp^*h_B$$

是 X 上光滑强拟凸复 Finsler 度量, 并且具有负全纯截面曲率。

注 1.2 因 X 紧, 射影丛 $\mathbb{P}(TB)$ 与 $\mathbb{P}(T_{X/B})$ 均紧。由假设可取常数 $\kappa_B, \kappa_F > 0$, 使得

$$K_{h_B} \leq -\kappa_B, \quad K_{G_t} \leq -\kappa_F, \quad (1.1)$$

分别在 $\mathbb{P}(TB)$ 与 $\mathbb{P}(T_{X/B})$ 上成立, 其中 K_{G_t} 表示 G_t 在纤维 X_t 上的全纯截面曲率。

注 1.3 本文最初尝试将 Cheung 与 Wan 的叠加构造完全推广至底流形和全空间均配备复 Finsler 度量的双重 Finsler 框架, 即构造度量族 $G_k = G_X + kp^*G_B$, 但当 $\xi \in \ker p_*$, 即 $p_*\xi = 0$ 时, $p^*G_B(x; \xi) = G_B(p(x); 0)$, 而其在垂直方向附近涉及 G_B 在零截面附近的正则性。一般复 Finsler 度量仅要求在 $TB \setminus \{0\}$ 上光滑, 故 p^*G_B 往往不能在 $TX \setminus \{0\}$ 的垂直方向附近光滑。本文采用 Hermitian 拉回项 p^*h_B , 正是为了避免这一障碍。

本文结构如下, 第二节回顾复 Finsler 度量及其全纯截面曲率定义; 第三节构造混合度量 F_k 并根据 Finsler 度量定义进行验证; 第四节建立正函数 $\partial\bar{\partial}$ 不等式及曲率比较工具; 第五节分水平占优区域和垂直邻域证明 F_k 的曲率负性; 第六节讨论该结果与 Kobayashi 双曲性的关系; 第七节给出结论与展望。

2. 预备知识

设 X 为复流形, 局部全纯坐标为 $z = (z^1, \dots, z^N)$, 在 TX 上诱导切坐标为 $(z; v) = (z^1, \dots, z^N; v^1, \dots, v^N)$ 。

定义 2.1 [9] 函数 $F: TX \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 称为 X 上的复 Finsler 度量, 若满足:

- (1) F 在 $TX \setminus \{0\}$ 上光滑;
- (2) $F(z, v) \geq 0$, 且 $F(z, v) = 0$ 当且仅当 $v = 0$;
- (3) 对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, 有 $F(z, \lambda v) = |\lambda|^2 F(z, v)$ 。

若进一步满足其纤维 Levi 矩阵

$$F_{A\bar{B}} := \frac{\partial^2 F}{\partial v^A \partial \bar{v}^B}$$

在 $TX \setminus \{0\}$ 上正定, 则称 F 为强拟凸复 Finsler 度量。

令 $\Delta = \{\omega \in \mathbb{C}: |\omega| < 1\}$ 。对任意全纯映射 $\varphi: \Delta \rightarrow X$, 定义拉回共形度量

$$\varphi^*F(t) := F(\varphi(t); \varphi'(t)).$$

当 $\varphi'(0) \neq 0$ 时, 其在 0 处的 Gauss 曲率为

$$K_{\varphi^*F}(0) = -\frac{2}{\varphi^*F(0)} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \bar{t}} \log(\varphi^*F)(t) \Big|_{t=0}. \quad (2.1)$$

定义 2.2 [10] F 在 $(z, [v]) \in P(TX) := (TX \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ 处的全纯截面曲率定义为:

$$K_F(z, [v]) = \sup_{\varphi} K_{\varphi^*F}(0). \quad (2.2)$$

其中上确界取遍所有满足 $\varphi(0) = z$ 、 $\varphi'(0) = \lambda v$ ($\lambda \in \mathbb{C}^*$) 的全纯映射 $\varphi: \Delta \rightarrow X$ 。

对强拟凸复 Finsler 度量, 还可使用如下等价公式。设 $(F^{\bar{B}A})$ 为 $(F_{A\bar{B}})$ 的逆矩阵, 令

$$F_{\bar{B},A} := \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{v}^B \partial z^A}, \quad \frac{\delta_F}{\delta z^A} := \frac{\partial}{\partial z^A} - F_{\bar{B},A} F^{\bar{B}C} \frac{\partial}{\partial v^C},$$

并记

$$\hat{P}_F := v^A \frac{\delta_F}{\delta z^A}, \quad (2.3)$$

则

$$K_F(z, [v]) = -\frac{2}{F(z, v)} (\partial \bar{\partial} \log F) (\hat{P}_F, \overline{\hat{P}_F}). \quad (2.4)$$

该公式是后文垂直方向渐近估计的主要计算工具。

3. 全纯纤维全空间上 Finsler 度量的构造

设 $p: X \rightarrow B$ 为全纯纤维化, X 紧, 因而 B 亦紧。记

$$T_{X/B} := \ker(p_*: TX \rightarrow TB)$$

为相对切丛。对 $t \in B$, 记 $X_t := p^{-1}(t)$ 。

设 h_B 为 B 上的 Hermitian 度量, 将其视为 TB 上的二次 Finsler 度量, 定义

$$A(x; \xi) := h_B(p_* \xi, p_* \xi), \quad (x, \xi) \in TX.$$

则 A 在 TX 上光滑, 关于切变量二次齐次, 在非垂直方向为正, 在 $T_{X/B}$ 上为零。

设 G 为 X 上光滑强拟凸复 Finsler 度量, 对每个 $t \in B$, 其在 TX_t 上的限制记为

$$G_t := G|_{TX_t}.$$

由于 G 在 $TX \setminus \{0\}$ 上光滑且强拟凸, G_t 是 X_t 上光滑强拟凸复 Finsler 度量。

对 $k \geq 0$ 定义

$$F_k(x; \xi) := G(x; \xi) + kA(x; \xi)$$

定理 3.1 对任意 $k \geq 0$, $F_k = G + kA$ 为 X 上光滑强拟凸复 Finsler 度量。

证明: 光滑性显然, G 在 $TX \setminus \{0\}$ 上光滑, A 在 TX 上光滑, 故 F_k 在 $TX \setminus \{0\}$ 上光滑。

正定性方面, 当 $\xi \neq 0$, $G(x; \xi) > 0$ 且 $A \geq 0$, 故当 $\xi \neq 0$,

$$F_k(x; \xi) > 0,$$

同时 $F_k(x; 0) = 0$ 。

齐次性由 G 与 A 的二次齐次性直接得到: 对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$F_k(x; \lambda \xi) = |\lambda|^2 F_k(x; \xi),$$

最后验证强拟凸性。取适配纤维化的局部坐标

$$(z, w) = (z^1, \dots, z^m, w^1, \dots, w^n), \quad p(z, w) = z,$$

并将切向量记为 (u, η) , 其中

$$u = u^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \quad \eta = \eta^i \frac{\partial}{\partial w^i},$$

则

$$A(z, w; u, \eta) = h_{\alpha\bar{\beta}}(z) u^\alpha \bar{u}^\beta,$$

因此 A 关于切变量 (u, η) 的纤维 Levi 矩阵半正定。由于 G 的纤维 Levi 矩阵在 $TX \setminus \{0\}$ 上正定, F_k 的纤维 Levi 矩阵是 G 正定矩阵与 kA 的半正定矩阵之和, 仍为正定, 故 F_k 强拟凸。

4. 基本不等式

本节给出后文所需的正函数 $\partial\bar{\partial}$ 不等式及其在单位圆盘上对 Gauss 曲率的推论。

引理 4.1 [11] 令 a 和 b 是复流形上光滑正函数, 则在实 $(1, 1)$ -形式意义下,

$$(a+b)\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(a+b) \geq a\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log a + b\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log b. \quad (4.1)$$

证明: 对任意光滑正函数 f , 有

$$\partial\bar{\partial}\log f = \frac{\partial\bar{\partial}f}{f} - \frac{\partial f \wedge \bar{\partial}f}{f^2}.$$

于是

$$\begin{aligned} & (a+b)\partial\bar{\partial}\log(a+b) - a\partial\bar{\partial}\log a - b\partial\bar{\partial}\log b \\ &= -\frac{(\partial a + \partial b) \wedge (\bar{\partial} a + \bar{\partial} b)}{a+b} + \frac{\partial a \wedge \bar{\partial} a}{a} + \frac{\partial b \wedge \bar{\partial} b}{b} \\ &= \frac{1}{a+b} \left(\frac{b}{a} \partial a \wedge \bar{\partial} a + \frac{a}{b} \partial b \wedge \bar{\partial} b - \partial a \wedge \bar{\partial} b - \partial b \wedge \bar{\partial} a \right) \\ &= \frac{1}{a+b} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} \partial a - \sqrt{\frac{a}{b}} \partial b \right) \wedge \overline{\left(\sqrt{\frac{b}{a}} \partial a - \sqrt{\frac{a}{b}} \partial b \right)}. \end{aligned}$$

乘以 $\sqrt{-1}$ 后, 最后一式为半正实 $(1, 1)$ -形式, 故结论成立。

推论 4.2 设 $a(t)|dt|^2$ 与 $b(t)|dt|^2$ 为圆盘上 0 附近的正共形度量, $K_a(0)$ 、 $K_b(0)$ 、 $K_{a+b}(0)$ 为其在 0 处的 Gauss 曲率, 则

$$K_{a+b}(0) \leq \frac{a(0)^2}{(a(0)+b(0))^2} K_a(0) + \frac{b(0)^2}{(a(0)+b(0))^2} K_b(0). \quad (4.2)$$

证明: 由 Gauss 曲率公式

$$K_f(0) = -\frac{2}{f(0)} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \bar{t}} \log f(t) \Big|_{t=0},$$

将引理 4.1 在 0 处沿 $\partial/\partial t$ 与 $\partial/\partial \bar{t}$ 赋值, 并乘以 $-2/(a(0)+b(0))^2$, 即得所需不等式。

引理 4.3 设 F_1, F_2 为复流形 M 上光滑强拟凸复 Finsler 度量, $U \subset \mathbb{P}(TM)$ 为开集。若在 U 上有

$$K_{F_1} < 0, \quad K_{F_2} \leq 0,$$

则在 U 上

$$K_{F_1+F_2} < 0.$$

若 K_{F_1}, K_{F_2} 均负, 结论同样成立。

证明: 取 $(x, [v]) \in U$ 及任意切于 $[v]$ 的全纯映射 φ , 令 $a = \varphi^* F_1, b = \varphi^* F_2$ 。由推论 4.2,

$$K_{\varphi^*(F_1+F_2)}(0) \leq \frac{a(0)^2}{(a(0)+b(0))^2} K_a(0) + \frac{b(0)^2}{(a(0)+b(0))^2} K_b(0). \quad (4.3)$$

由全纯截面曲率定义, $K_a(0) \leq K_{F_1}(x, [v]) < 0$, $K_b(0) \leq K_{F_2}(x, [v]) \leq 0$ 。故(4.3)右端严格为负, 对所有此类 φ 取上确界即得结论。

5. 全纯截面曲率的负性

本节分水平占优区域和垂直邻域估计 F_k 的全纯截面曲率, 并完成定理 1.1 的证明。

取定 X 上 Hermitian 度量 ω_X , 以 h_B 作为 TB 上 Hermitian 范数。对 $\eta > 0$, 定义 $\mathbb{P}(TX)$ 的两个锥区域

$$U_{\text{vert}}(\eta) := \left\{ (x, [\xi]) \in \mathbb{P}(TX) : |p_* \xi|_{h_B}^2 \leq \eta |\xi|_{\omega_X}^2 \right\}, \quad (5.1)$$

$$U_{\text{hor}}(\eta) := \overline{\mathbb{P}(TX) \setminus U_{\text{vert}}(\eta)}, \quad (5.2)$$

$U_{\text{vert}}(\eta)$ 是垂直射影丛 $\mathbb{P}(T_{X/B})$ 的锥邻域。

5.1. 水平占优区域上的曲率负性

由于 X 紧且 G 二次齐次, 存在常数 $M_X > 0$, 使得

$$G(x; \xi) \leq M_X |\xi|_{\omega_X}^2, \quad (x, \xi) \in TX. \quad (5.3)$$

在 $U_{\text{hor}}(\eta)$ 上有

$$A(x, \xi) = |p_* \xi|_{h_B}^2 \geq \eta |\xi|_{\omega_X}^2. \quad (5.4)$$

引理 5.1. 对任意固定 $\eta > 0$, 存在 $k_{\text{hor}}(\eta) > 0$, 使得当 $k \geq k_{\text{hor}}(\eta)$ 时, 在 $U_{\text{hor}}(\eta)$ 上有

$$K_{F_k} < 0.$$

证明: 因 G 光滑强拟凸且 X 紧, K_G 在 $\mathbb{P}(TX)$ 上有上界。取常数 $C_G \in \mathbb{R}$, 使得

$$K_G \leq C_G, \quad (5.5)$$

并记 $C_G^+ = \max\{C_G, 0\}$ 。

固定 $(x, [\xi]) \in U_{\text{hor}}(\eta)$, 取任意满足 $\varphi(0) = x$, $\varphi'(0) = \lambda \xi$ ($\lambda \in \mathbb{C}^*$) 的全纯映射 $\varphi: \Delta \rightarrow X$ 。令

$$a = \varphi^*(kA) = k(p \circ \varphi)^* h_B, \quad b = \varphi^* G.$$

在水平占优区域中 $p_* \xi \neq 0$, 故 $a(0) > 0$ 。由底空间曲率负性和缩放性质,

$$K_a(0) = \frac{1}{k} K_{(p \circ \varphi)^* h_B}(0) \leq -\frac{\kappa_B}{k}. \quad (5.6)$$

同时由(5.5),

$$K_b(0) \leq C_G. \quad (5.7)$$

记

$$r := \frac{b(0)}{a(0)} = \frac{G(x; \xi)}{kA(x; \xi)}.$$

由(5.3)与(5.4)得

$$r \leq \frac{M_X}{k\eta}. \quad (5.8)$$

结合推论 4.2、(5.6)与(5.7), 有

$$K_{\varphi^* F_k}(0) \leq \frac{1}{(1+r)^2} \left(-\frac{\kappa_B}{k} + C_G r^2 \right) \leq \frac{1}{(1+r)^2} \left(-\frac{\kappa_B}{k} + C_G^+ \frac{M_X^2}{k^2 \eta^2} \right). \quad (5.9)$$

取 $k_{\text{hor}}(\eta)$ 充分大, 使得对所有 $k \geq k_{\text{hor}}(\eta)$,

$$C_G^+ \frac{M_X^2}{k\eta^2} \leq \frac{\kappa_B}{2}. \quad (5.10)$$

则

$$K_{\varphi^* F_k}(0) \leq -\frac{\kappa_B}{2k(1+r)^2} < 0.$$

由于 φ 任意, 对所有此类全纯映射取上确界即得 $K_{F_k}(x, [\xi]) < 0$ 。

5.2. 垂直邻域上的曲率负性

在垂直方向上 A 消失, 水平区域中的压制估计不再适用。关键是证明 F_k 的曲率在垂直射影丛上一致趋近于纤维度量 G_t 的曲率。

命题 5.2. 在紧丛 $\mathbb{P}(T_{X/B})$ 上, 有一致收敛

$$K_{F_k} \rightarrow K_{G_t}, \quad k \rightarrow +\infty. \quad (5.11)$$

因此存在 $k_v > 0$, 使得在 $\mathbb{P}(T_{X/B})$ 上

$$K_{F_{k_v}} \leq -\frac{\kappa_F}{2}. \quad (5.12)$$

证明: 只需证明局部一致收敛, 再用紧丛 $\mathbb{P}(T_{X/B})$ 的有限覆盖。取适配全纯坐标

$$(z, w) = (z^1, \dots, z^m, w^1, \dots, w^n), \quad p(z, w) = z,$$

切坐标为 (u, η) , 其中 u 为水平切变量, η 为垂直切变量。于是

$$A(z, w; u, \eta) = h_{\alpha\bar{\beta}}(z) u^\alpha \bar{u}^\beta,$$

且

$$F_k(z, w; u, \eta) = G(z, w; u, \eta) + kh_{\alpha\bar{\beta}}(z) u^\alpha \bar{u}^\beta.$$

以下所有量均在垂直轨迹 $u=0$, $\eta \neq 0$ 上计算。大写指标 A, B, C 取遍所有切坐标 (u, η) , 希腊指标 α, β 取遍水平切变量 u , 拉丁指标 i, j, ℓ 取遍垂直切变量 η 。

F_k 的纤维 Levi 矩阵在 $u=0$ 处分块形式为

$$(F_{k, A\bar{B}})_{u=0} = \begin{pmatrix} kh_{\alpha\bar{\beta}} + G_{\alpha\bar{\beta}} & G_{\alpha\bar{j}} \\ G_{i\bar{\beta}} & G_{i\bar{j}} \end{pmatrix}_{u=0}, \quad (5.13)$$

其中垂直块 $(G_{i\bar{j}})_{u=0}$ 正是纤维度量 G_t 的纤维 Levi 矩阵, 因而正定. 由分块矩阵逆公式, 在垂直射影丛的紧子集上一致有

$$\begin{aligned}(F_k)^{\bar{\beta}\alpha} &= O(k^{-1}), \quad (F_k)^{\bar{j}\alpha} = O(k^{-1}), \\ (F_k)^{\bar{\beta}i} &= O(k^{-1}), \quad (F_k)^{\bar{j}i} = G_V^{\bar{j}i} + O(k^{-1}),\end{aligned}\quad (5.14)$$

其中 $(G_V^{\bar{j}i})$ 是垂直矩阵 $(G_{i\bar{j}})_{u=0}$ 的逆. 上述 $O(k^{-1})$ 均为局部一致估计.

比较 Finsler 水平提升, 设

$$N_{k,i}^C := (F_k)_{\bar{B};i} (F_k)^{\bar{B}C}$$

$$\frac{\delta_{F_k}}{\delta w^i} = \frac{\partial}{\partial w^i} - N_{k,i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} - N_{k,i}^\ell \frac{\partial}{\partial \eta^\ell}$$

由于 A 与 w, η 无关, 在 $u=0$ 处有 $(F_k)_{\bar{B};i} = G_{\bar{B};i}$, 由(5.14)得

$$\begin{aligned}N_{k,i}^\alpha &= G_{\bar{\beta};i} (F_k)^{\bar{\beta}\alpha} + G_{\bar{j};i} (F_k)^{\bar{j}\alpha} = O(k^{-1}), \\ N_{k,i}^\ell &= G_{\bar{\beta};i} (F_k)^{\bar{\beta}\ell} + G_{\bar{j};i} (F_k)^{\bar{j}\ell} = G_{\bar{j};i} G_V^{\bar{j}\ell} + O(k^{-1}).\end{aligned}$$

则

$$\frac{\delta_{F_k}}{\delta w^i} = \frac{\partial}{\partial w^i} - G_{\bar{j};i} G_V^{\bar{j}\ell} \frac{\partial}{\partial \eta^\ell} + O(k^{-1}) \quad (5.15)$$

主项恰为纤维度量 G_t 的 Finsler 水平提升. 因此, 对垂直切向量 $(0, \eta)$,

$$\hat{P}_{F_k} = \eta^i \frac{\delta_{F_k}}{\delta w^i} = \hat{P}_{G_t} + O(k^{-1}) \quad (5.16)$$

在 $u=0$ 处有

$$F_k(z, w; 0, \eta) = G_t(w; \eta),$$

F_k 关于 u 和 η 的导数与 G_t 对应导数一致. $\log F_k$ 中可能随 k 增长的二阶导数仅含 u 变量, 且为 $O(k)$; 但由(5.16), $\hat{P}_{F_k} - \hat{P}_{G_t}$ 的 u 分量为 $O(k^{-1})$, 故此类项贡献仍为 $O(k^{-1})$.

即

$$\partial\bar{\partial} \log F_k = \partial\bar{\partial} \log(G + kh) = \frac{\partial\bar{\partial} G + k\partial\bar{\partial} h}{G + kh} + \frac{(\bar{\partial} G + k\bar{\partial} h)(\partial G + k\partial h)}{(G + kh)^2} = O(1)$$

在 $u=0$ 处

$$\partial\bar{\partial} \log F_k = \frac{\partial\bar{\partial} G + k\partial\bar{\partial} h}{G} + \frac{\bar{\partial} G \wedge \partial G}{G^2} = O(k)$$

于是在垂直射影丛上一致有

$$\begin{aligned}(\partial\bar{\partial} \log F_k) \left(\hat{P}_{F_k}, \overline{\hat{P}_{F_k}} \right) &= (\partial\bar{\partial} \log F_k) \left(\hat{P}_{G_t}, \overline{\hat{P}_{G_t}} \right) + (\partial\bar{\partial} \log F_k) \left(\hat{P}_{G_t}, \overline{O(k^{-1})} \right) \\ &\quad + (\partial\bar{\partial} \log F_k) \left(O(k^{-1}), \overline{\hat{P}_{G_t}} \right) + (\partial\bar{\partial} \log F_k) \left(O(k^{-1}), \overline{O(k^{-1})} \right) \\ &= (\partial\bar{\partial} \log G_t) \left(\hat{P}_{G_t}, \overline{\hat{P}_{G_t}} \right) + O(k^{-1}).\end{aligned}\quad (5.17)$$

由等价的 Finsler 全纯截面曲率公式(2.4), 得

$$K_{F_k}(x, [0, \eta]) = K_{G_t}(x, [\eta]) + O(k^{-1})$$

在 $\mathbb{P}(T_{X/B})$ 上局部一致成立, 由紧性可得全局一致收敛(5.11)。再由(1.1)取 k_v 充分大, 即得(5.12)。

由 $K_{F_{k_v}}$ 在紧空间 $\mathbb{P}(TX)$ 上连续, 适当减小正常数 $\eta_0 > 0$, 可得在垂直锥邻域 $U_{\text{vert}}(\eta_0)$ 上

$$K_{F_{k_v}} \leq -\frac{\kappa_F}{4}. \quad (5.18)$$

引理 5.3. 对任意 $s \geq 0$, 在 $U_{\text{vert}}(\eta_0)$ 上有

$$K_{F_{k_v} + sA} < 0. \quad (5.19)$$

特别地, 对所有 $k \geq k_v$, 在 $U_{\text{vert}}(\eta_0)$ 上有

$$K_{F_k} < 0. \quad (5.20)$$

证明: 令 $F := F_{k_v}$ 。由(5.18), 在 $U_{\text{vert}}(\eta_0)$ 上 $K_F < 0$ 。固定 $(x, [\xi]) \in U_{\text{vert}}(\eta_0)$ 及任意满足 $\varphi(0) = x$ 、 $\varphi'(0) = \lambda\xi$ ($\lambda \in \mathbb{C}^*$) 的全纯映射 $\varphi: \Delta \rightarrow X$ 。只需证明

$$K_{\varphi^*(F+sA)}(0) < 0.$$

若 $A(x; \xi) > 0$, 当 $s = 0$ 时结论显然; 当 $s > 0$ 时令

$$a = \varphi^* F, \quad b = s\varphi^* A = s(p \circ \varphi)^* h_B,$$

则 $a(0) > 0$, $b(0) > 0$ 。由推论 4.2,

$$K_{a+b}(0) \leq \frac{a(0)^2}{(a(0)+b(0))^2} K_a(0) + \frac{b(0)^2}{(a(0)+b(0))^2} K_b(0). \quad (5.21)$$

其中 $K_a(0) \leq K_F(x, [\xi]) < 0$ 。又因为 $b = s(p \circ \varphi)^* h_B$, $s > 0$ 时 $K_b(0) \leq -\kappa_B/s \leq 0$, 故(5.21)右端严格为负。

其次, 若 $A(x; \xi) = 0$ (即 ξ 垂直): 仍令

$$a = \varphi^* F, \quad b = s\varphi^* A,$$

此时

$$a(0) > 0, \quad b(0) = 0.$$

因 $(p \circ \varphi)'(0) = 0$, 令 $\psi(t) = p \circ \varphi(t)$, 在 $t = 0$ 处的 Taylor 展开为

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \psi(0) + \psi'(0)t + \frac{1}{2}\psi''(0)t^2 + O(t^3), \\ \psi'(t) &= \psi''(0)t + O(t^2). \end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned} b(t) &= sh_B\left((p \circ \varphi)'(t), (p \circ \varphi)'(t)\right) \\ &= sh_B\left(\psi''(0)t + O(t^2), \psi''(0)t + O(t^2)\right) \\ &= sh_B(\psi''(0), \psi''(0))t^2 + O(t^3). \end{aligned}$$

因此

$$\partial b(0) = 0, \quad \partial \bar{\partial} b(0) \geq 0, \quad (5.22)$$

故在 0 处有

$$\partial\bar{\partial}b\log(a+b)(0)=\partial\bar{\partial}\log a(0)+\frac{\partial\bar{\partial}b(0)}{a(0)}. \quad (5.23)$$

由(2.1)与(5.22),

$$K_{a+b}(0)=K_a(0)-\frac{2\partial\bar{\partial}b(0)}{a(0)^2}\leq K_a(0)<0.$$

故所有切映射拉回的曲率均为负, 对所有映射取上确界即得(5.19)。

最后, 若 $k \geq k_v$, 则 $F_k = F_{k_v} + (k - k_v)A$, 取 $s = k - k_v \geq 0$ 即得(5.20)。

5.3. 全空间上的曲率负性

定理 1.1 的证明: 由定理 3.1, 对任意 $k \geq 0$, F_k 是 X 上光滑强拟凸复 Finsler 度量。

由命题 5.2 与引理 5.3, 存在 $k_v > 0$ 与 $\eta_0 > 0$, 使得对所有 $k \geq k_v$, 在 $U_{\text{vert}}(\eta_0)$ 上有

$$K_{F_k} < 0.$$

在补区域 $U_{\text{hor}}(\eta_0) = \mathbb{P}(TX) \setminus U_{\text{vert}}(\eta_0)$ 上, 由引理 5.1, 存在 $k_{\text{hor}}(\eta_0) > 0$, 使得对所有 $k \geq k_{\text{hor}}(\eta_0)$, 在 $U_{\text{hor}}(\eta_0)$ 上有

$$K_{F_k} < 0.$$

令

$$k_0 := \max\{k_v, k_{\text{hor}}(\eta_0)\}.$$

由于两个区域覆盖整个 $\mathbb{P}(TX)$, 故对所有 $k \geq k_0$, 在 $\mathbb{P}(TX)$ 上均有

$$K_{F_k} < 0.$$

定理得证。

6. 与 Kobayashi 双曲性的关系

本节讨论定理 1.1 在 Kobayashi 双曲几何框架下的意义。负全纯截面曲率与 Kobayashi 双曲性之间存在深刻联系: 在紧复流形上, 若存在全纯截面曲率被负常数一致控制的 Hermitian 或强拟凸 Finsler 度量, 则由 Ahlfors-Schwarz 型引理可推出流形的 Kobayashi 伪距离非退化, 从而流形为 Kobayashi 双曲。本文定理给出的 F_k 在 $\mathbb{P}(TX)$ 上处处负, 而 $\mathbb{P}(TX)$ 紧且 K_{F_k} 连续, 因此实际上存在常数 $c_k > 0$, 使得

$$K_{F_k} \leq -c_k < 0.$$

因此, 定理 1.1 不仅给出了全空间上的负曲率度量, 也蕴含了全空间 X 的 Kobayashi 双曲性。

从纤维化角度看, 本文的假设可理解为“双曲性数据”的曲率加强版: 底空间 B 的负全纯截面曲率保证底方向具有双曲压制; 每个纤维 X_t 上 G_t 的负全纯截面曲率保证垂直方向具有双曲压制。混合度量 $F_k = G + kp^*h_B$ 将两类方向的压制统一到全空间中: 水平占优方向由 kp^*h_B 控制, 垂直邻域由 G_t 的负曲率通过一致渐近传递控制。因此, 本文结果可视为“底空间与纤维的负曲率在全纯纤维化下传递到全空间”的 Finsler 型曲率实现。

另一方面, 本文结论强于单纯的 Kobayashi 双曲性。Kobayashi 双曲性是距离层面的性质, 而负全纯截面曲率度量的存在是微分几何层面的强结构。即使已知底空间和纤维为 Kobayashi 双曲, 也不自动得到全空间上具有负全纯截面曲率的光滑强拟凸 Finsler 度量。本文假设中对底空间 Hermitian 负曲率和纤维 Finsler 负曲率的要求, 正是为了在曲率层面完成可控叠加。因此, 定理 1.1 为 Kobayashi 双曲性在纤维

维化中的稳定现象提供了一个更精细的曲率模型。

该讨论也说明了本文混合构造的必要性。若仅追求双曲性, 或可从距离递减性质出发; 但若构造光滑强拟凸 Finsler 度量并控制其全纯截面曲率, 则必须处理 $TX \setminus \{0\}$ 上的光滑性、强拟凸性和 Finsler 水平提升的方向依赖性。本文的证明正是围绕这些曲率层面的困难展开。

7. 结论与展望

本文研究了紧全纯纤维化全空间上负曲率复 Finsler 度量的构造问题。在底空间 B 配备负全纯截面曲率的 Hermitian 度量、全空间 X 配备光滑强拟凸复 Finsler 度量 G 且 G_t 在每个纤维上具有负全纯截面曲率的假设下, 本文通过混合叠加 $F_k = G + kp^*h_B$, 证明了当 k 充分大时, F_k 是全空间 X 上具有负全纯截面曲率的光滑强拟凸复 Finsler 度量。这结果将 Cheung 和 Wan 在 Hermitian/Kähler 框架下的叠加思想推广到复 Finsler 几何情形, 并揭示了 Hermitian 拉回项在处理垂直切丛光滑性问题中的关键作用。

本文的主要贡献包括: 第一, 构造并解释了适合全纯纤维化的混合型 Finsler 度量 F_k , 说明其较纯 Finsler 拉回构造具有更好的光滑性; 第二, 建立了正函数 $\partial\bar{\partial}$ 不等式在 Finsler 拉回曲率估计中的应用, 并据此处理水平占优方向; 第三, 在垂直射影丛上给出了 F_k 的水平提升分块渐近分析, 通过渐近一致收敛在垂直邻域传递纤维负曲率。

未来仍有若干值得研究的问题。首先, 双重 Finsler 构造 $G_X + kp^*G_B$ 的光滑性障碍尚未解决; 是否存在自然正则化、改造拉回或引入适当连接的方法, 使其在垂直切丛附近仍保持 Finsler 光滑性, 是进一步推广本文结果的关键。其次, 可以研究本文方法是否适用于非紧情形、相对 Kähler 或弱负曲率情形, 以及是否能够得到负双全纯截面曲率或其他更强曲率性质。最后, 本文结果与 Kobayashi 度量、Carathéodory 度量以及复 Finsler 几何中的自然内禀度量之间的关系, 仍有进一步深入分析的空间。

参考文献

- [1] Kobayashi, S. (1970) *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*. World Scientific.
- [2] Grauert, H. and Reckziegel, H. (1965) Hermitesche Metriken und normale Familien holomorpher Abbildungen. *Mathematische Zeitschrift*, **89**, 108-125. <https://doi.org/10.1007/bf01111588>
- [3] Cowen, M.J. (1973) Families of Negatively Curved Hermitian Manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **39**, 362-366. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1973-0315163-x>
- [4] Cheung, C.K. (1989) Hermitian Metrics of Negative Holomorphic Sectional Curvature on Some Hyperbolic Manifolds. *Mathematische Zeitschrift*, **201**, 105-119. <https://doi.org/10.1007/bf01161998>
- [5] Tsai, I.H. (1989) Negatively Curved Metrics on Kodaira Surfaces. *Mathematische Annalen*, **285**, 369-379. <https://doi.org/10.1007/bf01455062>
- [6] To, W.K. and Yeung, S.K. (2011) Kähler Metrics of Negative Holomorphic Bisectional Curvature on Kodaira Surfaces. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **43**, 507-512. <https://doi.org/10.1112/blms/bdq117>
- [7] Tsui, H.Y. (2006) Families of Polarized Abelian Varieties and a Construction of Kähler Metrics of Negative Holomorphic Bisectional Curvature on Kodaira Surfaces. <http://sunzi.lib.hku.hk/hkuto/record/B37053760>
- [8] Wan, X. (2026) Kähler Metrics of the Negative Holomorphic (Bi)sectional Curvature on a Compact Relative Kähler Fibration. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **58**, e70291. <https://doi.org/10.1112/blms.70291>
- [9] Abate, M. AND Patrizio, G. (1994) *Finsler Metrics: A Global Approach*. Springer. <https://doi.org/10.1007/BFb0073980>
- [10] Wan, X. (2019) Holomorphic Sectional Curvature of Complex Finsler Manifolds. *The Journal of Geometric Analysis*, **29**, 194-216. <https://doi.org/10.1007/s12220-018-9985-6>
- [11] Schumacher, G. (1998) Asymptotics of Kähler-Einstein Metrics on Quasi-Projective Manifolds and an Extension Theorem on Holomorphic Maps. *Mathematische Annalen*, **311**, 631-645. <https://doi.org/10.1007/s002080050203>