

三维广义Boussinesq方程组的强时间周期解

范风华^{1,2}, 李延硕^{2*}

¹华北水利水电大学数学与统计学院, 河南 郑州

²河南省科学院数学研究所, 河南 郑州

收稿日期: 2026年6月28日; 录用日期: 2026年7月23日; 发布日期: 2026年8月7日

摘要

本文研究了三维光滑有界域上广义Boussinesq方程组的时间周期问题。首先, 对原方程组重整化, 并引入相应的函数空间。然后, 借助算子半群理论、实插值理论和压缩映射原理, 证明了定义在单个周期区间上强解的存在唯一性。最后, 基于线性重整化系统周期解的存在唯一性和周期延拓, 证明了原非线性Boussinesq方程组强时间周期解的存在唯一性。

关键词

广义Boussinesq方程组, 时间周期解, 存在性

Strong Time-Periodic Solutions to the Three-Dimensional Generalized Boussinesq Equations

Fenghua Fan^{1,2}, Yanshuo Li^{2*}

¹College of Mathematics and Statistics, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou Henan

²Institute of Mathematics HNAS, Henan Academy of Sciences, Zhengzhou Henan

Received: June 28, 2026; accepted: July 23, 2026; published: August 7, 2026

Abstract

This paper investigates the time-periodic problem for the generalized Boussinesq equations in three-dimensional smooth bounded domains. First, the original system is reformulated and the

*通讯作者。

文章引用: 范风华, 李延硕. 三维广义 Boussinesq 方程组的强时间周期解[J]. 理论数学, 2026, 16(8): 12-23.
DOI: 10.12677/pm.2026.168176

corresponding function spaces are introduced. Then, by employing operator semigroup theory, real interpolation theory, and the contraction mapping principle, the existence and uniqueness of strong solutions on a single period interval are established. Finally, based on the existence and uniqueness of periodic solutions to the linearized reformulated system and a periodic extension argument, the existence and uniqueness of strong time-periodic solutions to the original nonlinear Boussinesq equations are proved.

Keywords

Generalized Boussinesq System, Time-Periodic Solutions, Existence

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

流体力学模型时间周期问题的研究, 不仅为理解流体运动中的周期回复现象给予了理论依据, 也为理解湍流转捩等复杂的物理现象提供了新的视角, 目前已成为数学流体力学研究的热点之一。由于非牛顿流体在生物、工业及工程等领域具有很多应用[1][2], 其周期流的研究受到了越来越多学者的关注。然而, 刻画非牛顿流体运动的模型为拟线性方程组, 这为其数学研究带来很大挑战。

本文考虑了如下三维广义 Boussinesq 方程组

$$\begin{cases} v_t + v \cdot \nabla v + \nabla p = \operatorname{div} \mathbb{S} + \eta \theta e_3 + f_v, & x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \\ \theta_t + v \cdot \nabla \theta = \kappa \Delta \theta + f_\theta, & x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \\ \nabla \cdot v = 0, & x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega, t \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega, t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

这里的 Ω 是三维光滑有界区域, 未知函数 $v = v(x, t)$, $\theta = \theta(x, t)$, $p = p(x, t)$ 分别表示流体的速度, 温度和压力。 κ 表示热传导系数。 $\eta \theta e_3$ 表示浮力项, 其中 η 为正常数, $e_3 = (0, 0, 1)^\top$, 上标 $\cdot^\top$ 表示转置。 $\mathbb{S}$ 表示粘性应力张量, 其依赖于应变率 $\mathbb{D}(v) = \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^\top)$, 具体的表达式为

$$\mathbb{S} = 2\mu \left(1 + |\mathbb{D}(v)|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \mathbb{D}(v), \quad (2)$$

其中 $\mu > 0$ 为粘性系数, $p > 2$ 。 f_v 和 f_θ 表示给定的具有相同时间周期 T 的外力。

当 $p = 2$ 时, 称(1)为经典的 Boussinesq 方程组, 其为 Navier-Stokes-Fourier 方程组的 Oberbeck-Boussinesq 近似[3]。当区域为有界区域时, Climent-Ezquerro, Guillén-González 和 Rojas-Medar [4]考虑了粘性系数和热传导系数依赖温度的情形, 并证明了 2 维和 3 维光滑有界域中正则时间周期解的存在性。当区域为无界区域时, Van, Xuan 和 Thuy [5]在临界弱 Morrey 空间中证明了 $\mathbb{R}^3$ 中温和周期解的存在性和渐近稳定性。Huy, Xuan, Sac 和 Sa [6]应用算子半群估计和实插值理论证明了周期解的存在性。Nakatsuka [7]应用 Kyed 发展的重构法(见[8])证明了 $\mathbb{R}^3$ 中周期解的存在性。Hieber, Mahalov 和 Takada [9]研究了具有旋转和稳定层结效应的情形, 并证明了 $\mathbb{R}^3$ 中时间周期解和概周期解的存在唯一性。基于 Yamazaki 方法[10],

Villamizar-Roa, Rodríguez-Bellido 和 Rojas-Medar [11] 证明了 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$), $\mathbb{R}_+^n$ ($n \geq 3$) 及维数大于等于 4 的外区域上弱温和时间周期解的存在性及正则性。后来, Nakao [12] 通过建立浮力项的 L^1 估计, 证明了 3 维外区域上周期解的存在性。

当 $p \neq 2$ 时, 应力和应变率之间的关系是非线性的, 此时方程组(1)刻画了非牛顿流体的运动, 如血液、熔融塑料和润滑脂等[1]。 $p < 2$ 时对应的流体为剪切稀化流体, 而 $p > 2$ 时对应的流体为剪切增稠流体。Wu 和 Wang [13] 研究了 3 维环面上双扩散非牛顿流体方程组, 并应用 Galerkin 逼近证明了 $p \in [5/3, 2)$ 时正则时间周期解的存在性。当 $\theta = f_\theta = 0$ 时, 方程组(1)退化为广义 Navier-Stokes 方程组。Galdi 和 Crisanti [14] 证明了无穷长圆柱管道中 Womersley 流(时间周期的充分发展流)的存在唯一性。Abbatiello 和 Maremonti [15] 证明了 $p \in [5/3, 2)$ 时 3 维周期环面上时间周期解的存在性。Abbatiello [16] 证明了 $p > 6/5$ 时 3 维光滑有界域上弱时间周期解的存在性。

受上述文献和 Brandt 和 Hieber [17] 工作的启发, 本文主要研究了 $p > 2$ 的情形。基于算子半群理论、实插值理论和压缩映射原理, 我们证明了方程组(1)强周期解的存在唯一性。

符号说明。 我们用 C 表示一个通常的正常数。对于任意 $k \in \mathbb{N}$, D_x^k 表示关于 x 的全体 k 阶导数。对于 $m \geq 0$, $1 \leq q \leq \infty$, $L^q := L^q(\Omega)$ 为通常的 Lebesgue 空间, 其范数为 $\|\cdot\|_{L^q}$; $W^{m,q} := W^{m,q}(\Omega)$ 为通常的 Sobolev 空间, 范数定义为

$$\|f\|_{W^{m,q}} := \sum_{0 \leq k \leq m} \|D_x^k f\|_{L^q}.$$

对于 $0 < s < \infty$, $1 \leq r \leq \infty$, Besov 空间通过实插值空间定义, 即 $B_{qr}^s := B_{qr}^s(\Omega) = (L^q, W^{m,q})_{s/m, r}$, 其范数定义为

$$\|f\|_{B_{qr}^s} := \begin{cases} \inf_{u \in S(f)} \left(\int_0^\infty \left[t^{-\frac{s}{m}} \max \{ \|u\|_{L^q}, t \|u\|_{W^{m,q}} \} \right]^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}}, & 1 \leq r < \infty, \\ \inf_{u \in S(f)} \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < \infty} t^{-\frac{s}{m}} \max \{ \|u\|_{L^q}, t \|u\|_{W^{m,q}} \}, & r = \infty, \end{cases}$$

其中,

$$S(f) = \left\{ u \in L^1 \left(0, \infty; \frac{dt}{t}, L^q + W^{m,q} \right) : f = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t} \right\}.$$

Besov 空间与 Sobolev 空间之间关系为 $B_{q1}^m \subset W^{m,q} \subset B_{q\infty}^m$ [18]。

对于任意 Banach 空间 Y , $L^q(0, T; Y)$ 表示取值于 Y 的 $[0, T]$ 上 L^q 可积的函数集, 其范数定义为

$$\|f\|_{L^q(0, T; Y)} := \begin{cases} \left(\int_0^T \|f\|_Y^q dt \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|f\|_Y, & q = \infty. \end{cases}$$

类似地, 可定义 $W^{m,q}(0, T; Y)$ 。另外, 记 $Y_c := \{u \in Y \mid u|_{\partial\Omega} = 0\}$, $Y_0 := \{u \in Y \mid \int_\Omega u dx = 0\}$, $Y_\sigma := \{u \in Y \mid \operatorname{div} u = 0\}$ 。

本文的组织结构如下。第 2 节对 Boussinesq 方程组进行重整化并引入相应的函数空间。最后, 第 3 节陈述了主要结果并给出其证明。

2. 方程组的重整化

在本节中, 我们对 Boussinesq 方程组进行重整化并引入相应的函数空间。

首先对 Boussinesq 方程组进行重整化。为此, 令 $A := \mathcal{P}\Delta$, 其中 $\mathcal{P}$ 表示 Helmholtz 投影算子。定义算子 $\mathcal{L}$ 和非线性项 $F(w)$ 如下:

$$\mathcal{L} := -\begin{pmatrix} \mu A & 0 \\ 0 & \kappa \Delta \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$F(w) := \begin{pmatrix} \mathcal{P} \operatorname{div} \mathbb{S} - \mu A v - \mathcal{P}(v \cdot \nabla v + \eta \theta e_3) \\ -v \cdot \nabla \theta \end{pmatrix}. \quad (4)$$

那么, 方程组(1)可以被重写为

$$\begin{cases} w'(t) + \mathcal{L}w(t) = F(w) + f(t), t \in \mathbb{R}, \\ w(t) = w(t+T), t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5)$$

基于该表示, 接下来引入相应的函数空间。注意到对于任意 $f_\theta \in L_0^q$, $(1)_2$ 为守恒方程, 故 θ 具有空间零平均。对于 $r \in (2, \infty)$, $q \in (1, \infty)$, 定义基底空间 X_0 为

$$X_0 := X_0^v \times X_0^\theta := L_{c,\sigma}^q(\Omega) \times L_0^q(\Omega). \quad (6)$$

此外, 我们用 A_D 表示 $L_{c,\sigma}^q(\Omega)$ 上的 Dirichlet Stokes 算子, 其定义域为 $D(A_D) = W_D^{2,q}(\Omega) \cap L_{c,\sigma}^q(\Omega)$; Δ_N 表示 $L_0^q(\Omega)$ 上的 Neumann Laplace 算子, 其定义域为 $D(\Delta_N) = W_N^{2,q}(\Omega) \cap L_0^q(\Omega)$ 。定义

$$D(\mathcal{L}) = D(\mu A_D) \times D(\kappa \Delta_N) = W_D^{2,q} \cap L_{c,\sigma}^q \times W_N^{2,q} \cap L_0^q.$$

定义空间

$$\mathbb{X}_{\mathcal{L}}(s, r) := \left\{ w \in L_{c,\sigma}^q \times L_0^q \mid [w]_{s,r} := \left(\int_0^\infty \|t^{1-s} \mathcal{L}e^{-t\mathcal{L}} w\|_{L_{c,\sigma}^q \times L_0^q}^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r} < \infty \right\}. \quad (7)$$

空间 $\mathbb{X}_{\mathcal{L}}(s, r)$ 是一个 Banach 空间, 并且与实插值空间 $(X_0, D(\mathcal{L}))_{s,r}$ 等同, 其范数定义为

$$\|w\|_{s,r} := \|w\|_{X_0} + [w]_{s,r}.$$

在此基础上, 定义解空间为

$$\mathbb{E}_{\mathcal{L}}^{\text{per}} := \{ w \in W^{1,r}(0, T; \mathbb{X}_{\mathcal{L}}(s, r)) : \mathcal{L}w \in L^r(0, T; \mathbb{X}_{\mathcal{L}}(s, r)) \text{ 且 } w(0) = w(T) \},$$

其范数为

$$\|w\|_{\mathbb{E}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}} := \|w\|_{W^{1,r}(0, T; \mathbb{X}_{\mathcal{L}}(s, r))} + \|\mathcal{L}w\|_{L^r(0, T; \mathbb{X}_{\mathcal{L}}(s, r))}.$$

外力值空间为 $\mathbb{F}_{\mathcal{L}} := L^r(0, T; \mathbb{X}_{\mathcal{L}}(s, r))$ 。

3. 主要定理及其证明

在本节中, 我们陈述本文的主要结果并给出其证明。

定理 1. 令 $T > 0$ 。假设 $2 < p < \infty$, $2 < q < \infty$, $2 < r < \infty$, $0 < s < 1$ 满足

$$\frac{3}{2q} < s < \frac{1}{2} + \frac{1}{2q}.$$

假设 $f = (f_v, f_\theta)^\top : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}_{\mathcal{L}}(s, r)$ 是以 T 为周期的函数则存在 $\delta > 0$ 和 $\eta^* > 0$, 使得如果 $\|f\|_{L^r(0, T; \mathbb{X}_{\mathcal{L}}(s, r))} \leq \delta$ 且 $\eta \leq \eta^*$, 那么 Boussinesq 方程组(1)存在唯一的周期为 T 的时间周期解 $w = (v, \theta)^\top : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}_{\mathcal{L}}(s, r)$, 并且

$$\|w\|_{W^{1,r}(0, T; \mathbb{X}_{\mathcal{L}}(s, r))} + \|\mathcal{L}w\|_{L^r(0, T; \mathbb{X}_{\mathcal{L}}(s, r))} \leq C\delta,$$

其中算子 $\mathcal{L}$ 和空间 $\mathbb{X}_{\mathcal{L}}(s, r)$ 的定义分别为(3)和(7)。

注 1. s 的上界保证了 $\mathbb{X}_{\mathcal{L}}(s, r)$ 与 Besov 型空间的等价性, 而下界使得相应的 Besov 空间嵌入 L^∞ 且为 Banach 代数, 进而控制非齐次项和非线性项。另外, $q > 2$ 源于 s 假设的自然限制, 而 $r > 2$ 是使得插值不等式(11)成立的必要条件。

证明之前首先给出一些结论, 关于其证明, 可参考[18] [19]。

引理 1. 假设 Ω 是一个具有光滑边界的有界区域。设 $q \in (1, \infty)$ 且 $r \in (1, \infty)$ 。假设 g 为光滑函数, 且满足 $g(0) = 0$ 。那么有以下三条结论成立:

(1) 若 $0 < s < 1/2 + 1/(2q)$, 则

$$\mathbb{X}_{\mathcal{L}}(s, r) = B_{qr}^{2s} \cap L_{c,\sigma}^q \times B_{qr}^{2s} \cap L_0^q,$$

且范数等价。

(2) 若 $s > 3/(2q)$, 则 B_{qr}^{2s} 是一个 Banach 代数。

(3) 设 $s > 0$, 则 $B_{qr}^{2s} \cap L^\infty$ 是一个代数, 并且有

$$\|g(u)\|_{B_{qr}^s} \leq C(s, g, \|u\|_{L^\infty}) \|u\|_{B_{qr}^s}.$$

接下来给出定理 1 的证明。

证明. 令 $\mathbb{B}_R$ 表示 $\mathbb{E}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}$ 中以 0 为心, 以 R 为半径的闭球, 其中 $0 < R < 1$ 为待定的正常数。定义映射 $\Phi: \mathbb{B}_R \rightarrow \mathbb{E}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}$ 为 $\Phi(w) := u$, 其中 u 是以下问题的解

$$\begin{cases} u'(t) + \mathcal{L}u(t) = F(w) + f, t \in (0, T), \\ u(0) = u(T). \end{cases} \quad (8)$$

基于 Brandt 和 Hiebe[17]证明的思想方法, 后续的证明分为以下 5 步:

1. 证明算子 $-\mathcal{L}$ 生成一个 X_0 上的有界解析半群, 并且 $0 \in \rho(\mathcal{L})$;
2. 验证对于任意 $w \in \mathbb{B}_R$, 有 $F(w) \in \mathbb{F}_{\mathcal{L}}$;
3. 证明对于任意 $w, \tilde{w} \in \mathbb{B}_R$, $\|F(w) - F(\tilde{w})\|_{\mathbb{F}_{\mathcal{L}}} \leq C\|w - \tilde{w}\|_{\mathbb{E}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}}$;
4. 验证对于适当小的 η 和充分小的外力, Φ 为严格压缩映射, 然后应用压缩映射原理证明问题(8)解的存在性;
5. 结合(5)对应线性问题周期解的唯一性将解进行周期延拓, 进而得到定义在 $\mathbb{R} \times \Omega$ 上的强周期解的存在性。

第 1 步: $-\mathcal{L}$ 生成一个 X_0 上的有界解析半群, 并且 $0 \in \rho(\mathcal{L})$ 。

一方面, 根据[20]中的结果, 可知算子 A_D 在 $L_{c,\sigma}^q$ 上生成一个 C_0 类有界解析半群且 $0 \in \rho(A_D)$ 。另一方面, 根据[17]中的结果, 可知 $\kappa\Delta_N$ 在 $L_0^q(\Omega)$ 上生成一个有界解析半群且 $0 \in \rho(\kappa\Delta_N)$ 。所以, 利用算子的对角结构和所涉及算子的可逆性, 可得算子 $-\mathcal{L}$ 在 X_0 (定义为(6))上生成一个有界解析半群, 并且 $0 \in \rho(\mathcal{L})$ 。

第 2 步: 对于任意 $w \in \mathbb{B}_R$, $F(w) \in \mathbb{F}_{\mathcal{L}}$ 。

由 $\mathbb{S}$ 的定义(2)及 $\text{div } v = 0$, 直接计算可得

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \text{div } \mathbb{S} - \mu A v &= \mathcal{P} \left(2\mu \text{div} \left(\left(1 + |\mathbb{D}(v)|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \mathbb{D}(v) \right) - \mu \Delta v \right) \\ &= 2\mu \mathcal{P} \nabla \left(\left(1 + |\mathbb{D}(v)|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \right) \cdot \mathbb{D}(v) + \mu \mathcal{P} \left(\left(1 + |\mathbb{D}(v)|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} - 1 \right) \Delta v. \end{aligned}$$

对于 $s > 3/(2q)$, B_{qr}^{2s} 嵌入 L^∞ , 且对于有界区域, L^∞ 嵌入 L^q , 故由引理 1 可知

$$\|F(w)\|_{\mathbb{F}_L} \leq C \|F(w)\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s} \cap L^q)} \leq C \|F(w)\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})}. \quad (9)$$

根据投影算子 $\mathcal{P}$ 在 L^q 中的有界性和 Minkowski 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} \|F(w)\|_{\mathbb{F}_L} &\leq C \left\| 2\mu \nabla \left(\left(1 + |\mathbb{D}(v)|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \right) \cdot \mathbb{D}(v) \right\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\ &\quad + C \left\| \mu \left(\left(1 + |\mathbb{D}(v)|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} - 1 \right) \Delta v \right\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\ &\quad + C \|v \cdot \nabla v\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} + C \|\eta \theta e_3\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} + C \|v \cdot \nabla \theta\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\ &:= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \end{aligned} \quad (10)$$

容易得到 I_4 项的估计为

$$I_4 \leq C \eta \|\theta\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})}.$$

对于 I_1 项, 注意到对于任意 $p > 2$, $h(y) := \left(1 + |y|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} - 1$ 为光滑函数且 $h(0) = 0$, 所以由引理 1 可得

$$\begin{aligned} I_1 &= C \left\| 2\mu \nabla \left(\left(1 + |\mathbb{D}(v)|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} - 1 \right) \cdot \mathbb{D}(v) \right\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\ &\leq C \left\| \left(1 + |\mathbb{D}(v)|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} - 1 \right\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+1})} \|\mathbb{D}(v)\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \\ &\leq C \left(s, \|\mathbb{D}(v)\|_{L^\infty(0,T;L^\infty)} \right) \|\mathbb{D}(v)\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+1})} \|\mathbb{D}(v)\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})}. \end{aligned}$$

对于 $r > 2$, 应用 Gagliardo-Nirenberg 插值不等式和 Besov 空间的插值不等式, 不难得到

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s+1})} \leq C \left(\|v\|_{W^{1,r}(0,T;B_{qr}^{2s})} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|v\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

因为 $v \in L_{c,\sigma}^q, \theta \in L_0^q$, 所以

$$\|w\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} \leq C \|\mathcal{L}w\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \leq C \|w\|_{\mathbb{B}_L^{\text{per}}}. \quad (12)$$

对于 $s > 3/(2q)$, B_{qr}^{2s} 嵌入 L^∞ , 那么, 结合(11)和(12)可以推出

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}(v)\|_{L^\infty(0,T;L^\infty)} &\leq C \|v\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s+1})} \\ &\leq C \left(\|v\|_{W^{1,r}(0,T;B_{qr}^{2s})} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|v\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|v\|_{\mathbb{B}_L^{\text{per}}} \leq C. \end{aligned} \quad (13)$$

注意到 $W^{1,r}(0,T)$ 嵌入 $L^\infty(0,T)$, 故有

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C \|v\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} \|v\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s+1})} \\
&\leq C \left(\|v\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\|v\|_{W^{1,r}(0,T;B_{qr}^{2s})} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

对于 I_2 项, 根据引理 1, (11)和(13)可得

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq C \left\| h(|\mathbb{D}(v)|) - 1 \right\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \|\Delta v\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\
&\leq C \|\mathbb{D}(v)\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \|\Delta v\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\
&\leq C \|v\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s+1})} \|v\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} \\
&\leq C \left(\|v\|_{W^{1,r}(0,T;B_{qr}^{2s})} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|v\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} \right)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

由于 $W^{1,r}(0,T)$ 嵌入 $L^\infty(0,T)$, B_{qr}^{2s+2} 嵌入 B_{qr}^{2s+1} , 故应用引理 1 可得 I_3 项和 I_5 项的估计为

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq C \|v\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \|\nabla v\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\
&\leq C \|v\|_{W^{1,r}(0,T;B_{qr}^{2s})} \|v\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})}, \\
I_5 &\leq C \|v\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \|\nabla \theta\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\
&\leq C \|v\|_{W^{1,r}(0,T;B_{qr}^{2s})} \|\theta\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})}.
\end{aligned}$$

结合(10), (12), 空间 $\mathbb{B}_C^{\text{per}}$ 范数的定义和 $I_1 \sim I_5$ 项的估计, 可以发现

$$\|F(w)\|_{\mathbb{B}_C} \leq C \left(\|w\|_{\mathbb{B}_C^{\text{per}}} \right)^2 + C\eta \|w\|_{\mathbb{B}_C^{\text{per}}}. \quad (14)$$

第 3 步: 对于任意 $w, \tilde{w} \in \mathbb{B}_R$, $\|F(w) - F(\tilde{w})\|_{\mathbb{B}_C} \leq CR \|w - \tilde{w}\|_{\mathbb{B}_C^{\text{per}}}.$

对于任意 $w, \tilde{w} \in \mathbb{B}_R$, 直接计算可得

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{P} \operatorname{div} \mathbb{S}(\mathbb{D}v) - Av) - (\mathcal{P} \operatorname{div} \mathbb{S}(\mathbb{D}\tilde{v}) - A\tilde{v}) \\
&= 2\mu \mathcal{P} \nabla \left[\left(1 + |\mathbb{D}(v)|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} - \left(1 + |\mathbb{D}(\tilde{v})|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \right] \cdot \mathbb{D}(v) \\
&\quad + 2\mu \mathcal{P} \nabla \left[\left(1 + |\mathbb{D}(\tilde{v})|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \right] \cdot (\mathbb{D}(v) - \mathbb{D}(\tilde{v})) \\
&\quad + \mu \mathcal{P} \left[\left(\left(1 + |\mathbb{D}(v)|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} - \left(1 + |\mathbb{D}(\tilde{v})|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \right) \Delta v \right] \\
&\quad + \mu \mathcal{P} \left[\left(\left(1 + |\mathbb{D}(\tilde{v})|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} - 1 \right) \Delta(v - \tilde{v}) \right].
\end{aligned}$$

然后, 由 F 的定义(4), (9)和 Minkowski 不等式得到

$$\begin{aligned}
& \|F(w) - F(\tilde{w})\|_{\mathbb{E}_{\mathcal{L}}} \\
& \leq C \left\| \nabla \left(\left(1 + |\mathbb{D}(v)|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} - \left(1 + |\mathbb{D}(\tilde{v})|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \right) \cdot \mathbb{D}(v) \right\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\
& \quad + C \left\| \nabla \left(\left(1 + |\mathbb{D}(\tilde{v})|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \right) \cdot (\mathbb{D}(v) - \mathbb{D}(\tilde{v})) \right\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\
& \quad + C \left\| \left(\left(1 + |\mathbb{D}(v)|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} - \left(1 + |\mathbb{D}(\tilde{v})|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \right) \Delta v \right\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\
& \quad + C \left\| \left(\left(1 + |\mathbb{D}(\tilde{v})|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} - 1 \right) \Delta(v - \tilde{v}) \right\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\
& \quad + C \left\| v \cdot \nabla v - \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{v} \right\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} + C \eta \left\| \theta - \tilde{\theta} \right\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\
& \quad + C \left\| v \cdot \nabla \theta - \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{\theta} \right\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\
& := J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + J_7.
\end{aligned} \tag{15}$$

由空间 $\mathbb{E}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}$ 范数的定义可得 J_6 项的估计为

$$J_6 \leq C \eta \left\| \theta - \tilde{\theta} \right\|_{\mathbb{E}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}}.$$

借助函数 $\tilde{h}(y) = (1+y)^{\frac{p-2}{2}} (y > 0)$ 的光滑性和 Lagrange 中值定理, 可知存在函数 $u \in \mathbb{E}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}$ 使得

$$\begin{aligned}
& \tilde{h}(|\mathbb{D}(v)|^2) - \tilde{h}(|\mathbb{D}(\tilde{v})|^2) \\
& = \tilde{h}'(|\mathbb{D}(u)|^2) (|\mathbb{D}(v)|^2 - |\mathbb{D}(\tilde{v})|^2) \\
& = \left(\tilde{h}'(|\mathbb{D}(u)|^2) - \frac{p-2}{2} \right) ((\mathbb{D}(v) - \mathbb{D}(\tilde{v})) : \mathbb{D}(v) + \mathbb{D}(\tilde{v}) : (\mathbb{D}(v) - \mathbb{D}(\tilde{v}))) \\
& \quad + \frac{p-2}{2} ((\mathbb{D}(v) - \mathbb{D}(\tilde{v})) : \mathbb{D}(v) + \mathbb{D}(\tilde{v}) : (\mathbb{D}(v) - \mathbb{D}(\tilde{v}))).
\end{aligned}$$

然后, 由引理 1 可知

$$\begin{aligned}
J_1 & \leq C \left(\left\| \tilde{h}'(|\mathbb{D}(u)|^2) - \frac{p-2}{2} \right\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+1})} + 1 \right) \left(\left\| \mathbb{D}(v) \right\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} + \left\| \mathbb{D}(\tilde{v}) \right\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \right) \\
& \quad \times \left\| \mathbb{D}(v) - \mathbb{D}(\tilde{v}) \right\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \left\| \mathbb{D}(v) \right\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \\
& \leq C \left(s, \left\| \mathbb{D}(u) \right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty)} \right) \left(\left(\left\| \mathbb{D}(u) \right\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+1})} \right)^2 + 1 \right) \left(\left(\left\| \mathbb{D}(v) \right\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \right)^2 + \left(\left\| \mathbb{D}(\tilde{v}) \right\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \right)^2 \right) \\
& \quad \times \left\| \mathbb{D}(v - \tilde{v}) \right\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})}.
\end{aligned}$$

类似可得

$$\begin{aligned}
J_3 &\leq C \left(\left\| \tilde{h}'(|\mathbb{D}(u)|^2) - \frac{p-2}{2} \right\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} + 1 \right) \left(\|\mathbb{D}(v)\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} + \|\mathbb{D}(\tilde{v})\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \right) \\
&\quad \times \|\mathbb{D}(v) - \mathbb{D}(\tilde{v})\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \|\Delta v\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\
&\leq C \left(s, \|\mathbb{D}(u)\|_{L^\infty(0,T;L^\infty)} \right) \left(\left(\|\mathbb{D}(u)\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \right)^2 + 1 \right) \left(\|\mathbb{D}(v)\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} + \|\mathbb{D}(\tilde{v})\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \right) \\
&\quad \times \|\mathbb{D}(v - \tilde{v})\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \|\Delta v\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})}.
\end{aligned}$$

进而, 利用(11), (13), $0 < R < 1$ 以及空间 $\mathbb{B}_\mathcal{L}^{\text{per}}$ 范数的定义, 我们得到

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq C(R^2 + 1) \left(\|v\|_{W^{1,r}(0,T;B_{qr}^{2s})} \|v\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} + \|\tilde{v}\|_{W^{1,r}(0,T;B_{qr}^{2s})} \|\tilde{v}\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} \right) \\
&\quad \times \|v - \tilde{v}\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} \\
&\leq C(R^2 + 1) R \left(\|v\|_{\mathbb{B}_\mathcal{L}^{\text{per}}} + \|\tilde{v}\|_{\mathbb{B}_\mathcal{L}^{\text{per}}} \right) \|v - \tilde{v}\|_{\mathbb{B}_\mathcal{L}^{\text{per}}} \\
&\leq C \left(\|v\|_{\mathbb{B}_\mathcal{L}^{\text{per}}} + \|\tilde{v}\|_{\mathbb{B}_\mathcal{L}^{\text{per}}} \right) \|v - \tilde{v}\|_{\mathbb{B}_\mathcal{L}^{\text{per}}}
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
J_3 &\leq C(R^2 + 1) \left(\left(\|v\|_{W^{1,r}(0,T;B_{qr}^{2s})} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|v\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\|\tilde{v}\|_{W^{1,r}(0,T;B_{qr}^{2s})} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\tilde{v}\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad \times \left(\|v - \tilde{v}\|_{W^{1,r}(0,T;B_{qr}^{2s})} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|v - \tilde{v}\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} \\
&\leq C(R^2 + 1) \left(\|v\|_{\mathbb{B}_\mathcal{L}^{\text{per}}} + \|\tilde{v}\|_{\mathbb{B}_\mathcal{L}^{\text{per}}} \right) \|v - \tilde{v}\|_{\mathbb{B}_\mathcal{L}^{\text{per}}} R \\
&\leq C \left(\|v\|_{\mathbb{B}_\mathcal{L}^{\text{per}}} + \|\tilde{v}\|_{\mathbb{B}_\mathcal{L}^{\text{per}}} \right) \|v - \tilde{v}\|_{\mathbb{B}_\mathcal{L}^{\text{per}}}.
\end{aligned}$$

对于 J_2 项和 J_4 项, 类似于 I_1 项和 I_2 项估计的推导, 结合(12)不难得出

$$\begin{aligned}
J_2 + J_4 &\leq C \left\| \left(1 + |\mathbb{D}(\tilde{v})| \right)^{\frac{p-2}{2}} - 1 \right\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+1})} \|\mathbb{D}(v - \tilde{v})\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \\
&\quad + C \left\| \left(1 + |\mathbb{D}(\tilde{v})| \right)^{\frac{p-2}{2}} - 1 \right\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \|\Delta(v - \tilde{v})\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\
&\leq C \left(s, \|\mathbb{D}(\tilde{v})\|_{L^\infty(0,T;L^\infty)} \right) \|\tilde{v}\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} \left(\|v - \tilde{v}\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|v - \tilde{v}\|_{W^{1,r}(0,T;B_{qr}^{2s})} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C \left(s, \|\mathbb{D}(\tilde{v})\|_{L^\infty(0,T;L^\infty)} \right) \left(\|\tilde{v}\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\tilde{v}\|_{W^{1,r}(0,T;B_{qr}^{2s})} \right)^{\frac{1}{2}} \|v - \tilde{v}\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} \\
&\leq C \|\tilde{v}\|_{\mathbb{B}_\mathcal{L}^{\text{per}}} \|v - \tilde{v}\|_{\mathbb{B}_\mathcal{L}^{\text{per}}}.
\end{aligned}$$

对于 J_5 项, 应用(12), 引理 1, $W^{1,r}(0,T)$ 嵌入 $L^\infty(0,T)$ 以及 B_{qr}^{2s+2} 嵌入 B_{qr}^{2s+1} 可知

$$\begin{aligned}
J_5 &\leq \|v \cdot (\nabla v - \nabla \tilde{v})\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} + \|(v - \tilde{v}) \cdot \nabla \tilde{v}\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\
&\leq C \|v\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \|\nabla(v - \tilde{v})\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} + C \|v - \tilde{v}\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \|\nabla \tilde{v}\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\
&\leq C \|v\|_{W^{1,r}(0,T;B_{qr}^{2s})} \|v - \tilde{v}\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} + C \|v - \tilde{v}\|_{W^{1,r}(0,T;B_{qr}^{2s})} \|\tilde{v}\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} \\
&\leq C \left(\|v\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}} + \|\tilde{v}\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}} \right) \|v - \tilde{v}\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}}.
\end{aligned}$$

类似地, 可得 J_7 项的估计为

$$\begin{aligned}
J_7 &\leq \|v \cdot (\nabla \theta - \nabla \tilde{\theta})\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} + \|(v - \tilde{v}) \cdot \nabla \tilde{\theta}\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\
&\leq C \|v\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \|\nabla(\theta - \tilde{\theta})\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} + C \|v - \tilde{v}\|_{L^\infty(0,T;B_{qr}^{2s})} \|\nabla \tilde{\theta}\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s})} \\
&\leq C \|v\|_{W^{1,r}(0,T;B_{qr}^{2s})} \|\theta - \tilde{\theta}\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} + C \|v - \tilde{v}\|_{W^{1,r}(0,T;B_{qr}^{2s})} \|\tilde{\theta}\|_{L^r(0,T;B_{qr}^{2s+2})} \\
&\leq C \|\theta - \tilde{\theta}\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}} \|v\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}} + C \|v - \tilde{v}\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}} \|\tilde{\theta}\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}}.
\end{aligned}$$

综合(15)和 $J_1 \sim J_7$ 项的估计可得

$$\begin{aligned}
\|F(w) - F(\tilde{w})\|_{\mathbb{F}_{\mathcal{L}}} &\leq CR \|w - \tilde{w}\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}} + \eta C \|w - \tilde{w}\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}} \\
&\leq C(\eta + R) \|w - \tilde{w}\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}}.
\end{aligned} \tag{16}$$

第4步: Φ 为严格压缩映射

对于任意 $w \in \mathbb{B}_R$, 由于 $\mathcal{L}u \in L^r(0, T; X_0)$, 故有

$$\|\Phi(w)\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}} \leq C \left(\|F(w)\|_{\mathbb{F}_{\mathcal{L}}} + \|f\|_{\mathbb{F}_{\mathcal{L}}} \right).$$

由(14)可知存在正常数 C_1 和 C_2 使得

$$\begin{aligned}
\|\Phi(w)\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}} &\leq C_1 \left(\|w\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}} \right)^2 + C_1 \eta \|w\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}} + C_2 \|f\|_{\mathbb{F}_{\mathcal{L}}} \\
&\leq C_1 R^2 + C_1 \eta R + C_2 \|f\|_{\mathbb{F}_{\mathcal{L}}}.
\end{aligned}$$

取 $R = \min \left\{ 1, 2C_2 \|f\|_{\mathbb{F}_{\mathcal{L}}} \right\}$, 若 $\|f\|_{\mathbb{F}_{\mathcal{L}}} \leq 1/(8C_1 C_2)$, $\eta \leq 1/(4C_1)$, 则有

$$\|\Phi(w)\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}} \leq \frac{1}{4}R + \frac{1}{4}R + \frac{1}{2}R \leq R.$$

即, $\Phi(\mathbb{B}_R) \subset \mathbb{B}_R$.

另一方面, 根据映射 Φ 的定义和(16), 可得对于所有 $w, \tilde{w} \in \mathbb{B}_R$, 存在正常数 C_3 使得

$$\begin{aligned}
\|\Phi(w) - \Phi(\tilde{w})\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}} &\leq C \|F(w) - F(\tilde{w})\|_{\mathbb{F}_{\mathcal{L}}} \\
&\leq C_3 (\eta + R) \|w - \tilde{w}\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}}.
\end{aligned}$$

若 $\|f\|_{\mathbb{F}_{\mathcal{L}}} \leq 1/(8 \max \{C_1, C_3\} C_2)$, $\eta \leq 1/(4 \max \{C_1, C_3\})$, 则有

$$\begin{aligned}
\|\Phi(w) - \Phi(\tilde{w})\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}} &\leq C_3 \left(\frac{1}{4C_3} + 2C_2 \frac{1}{8C_3 C_2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \|w - \tilde{w}\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{L}}^{\text{per}}}.
\end{aligned}$$

因此, $\Phi: \mathbb{B}_R \rightarrow \mathbb{B}_R$ 是一个严格压缩映射。应用压缩映射原理可得周期问题(8)存在唯一解 $w \in \mathbb{B}_C^{\text{per}}$, 其定义在 $[0, T] \times \Omega$ 上且满足 $w(0) = w(T)$ 。

第 5 步: 强周期解的存在性。

根据第 1 步的结论, 可知对于任意给定的 $f \in \mathbb{F}_C$, (5) 对应线性问题存在唯一的时间周期解

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^t e^{-t\mathcal{L}} f(t-\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

故可将上一步得到的解 $w(\cdot, x)$ 周期性地延拓到整个实轴上, 进而得到 Boussinesq 方程组周期问题(1)强周期解的存在唯一性。至此完成了定理 1 的证明。

基金项目

河南省科学院高层次人才科研启动项目(251819081); 河南省自然科学基金(262300422629)。

参考文献

- [1] Liu, M., Wang, J., Jiang, H. and Zhang, Y. (2025) The Dynamical Stability and Instability of Rayleigh-Bénard Problem for Non-Newtonian Fluids with Power Law Type. *Applicable Analysis*, **104**, 1901-1924. <https://doi.org/10.1080/00036811.2024.2438386>
- [2] Wei, M., Lin, K. and Sun, L. (2022) Shear Thickening Fluids and Their Applications. *Materials & Design*, **216**, Article 110570. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2022.110570>
- [3] Chandrasekhar, S. (1961) Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford University Press.
- [4] Climent-Ezquerro, B., Guillén-González, F. and Rojas-Medar, M.A. (2007) Time-Periodic Solutions for a Generalized Boussinesq Model with Neumann Boundary Conditions for Temperature. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **463**, 2153-2164. <https://doi.org/10.1098/rspa.2007.1867>
- [5] Van, N.T., Xuan, P.T. and Thuy, T.V. (2024) Periodic Solutions for Boussinesq Systems in Weak-Morrey Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **537**, Article 128255. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128255>
- [6] Nguyen, T.H., Pham, T.X., Vu, T.N.H. and Le, T.S. (2022) Existence and Stability of Periodic and Almost Periodic Solutions to the Boussinesq System in Unbounded Domains. *Acta Mathematica Scientia*, **42**, 1875-1901. <https://doi.org/10.1007/s10473-022-0510-4>
- [7] Nakatsuka, T. (2026) Existence and Uniqueness of Time-Periodic Solutions to the Oberbeck-Boussinesq System. *Non-linear Analysis: Real World Applications*, **88**, Article 104461. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2025.104461>
- [8] Kyed, M. (2012) Time-Periodic Solutions to the Navier-Stokes Equations. Habilitation Thesis, Technische Universität Darmstadt.
- [9] Hieber, M., Mahalov, A. and Takada, R. (2019) Time Periodic and Almost Time Periodic Solutions to Rotating Stratified Fluids Subject to Large Forces. *Journal of Differential Equations*, **266**, 977-1002. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.07.067>
- [10] Yamazaki, M. (2000) The Navier-Stokes Equations in the Weak- L^n Space with Time-Dependent External Force. *Mathematische Annalen*, **317**, 635-675. <https://doi.org/10.1007/pl00004418>
- [11] Villamizar-Roa, E.J., Rodríguez-Bellido, M.Á. and Rojas-Medar, M.A. (2010) Periodic Solutions in Unbounded Domains for the Boussinesq System. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **26**, 837-862. <https://doi.org/10.1007/s10114-010-7360-z>
- [12] Nakao, K. (2020) On Time-Periodic Solutions to the Boussinesq Equations in Exterior Domains. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **482**, Article 123537. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123537>
- [13] Wu, Q. and Wang, C. (2025) Existence of Regular Time-Periodic Solutions for a Class of Non-Newtonian Double-Diffusive Convection System. *Applications of Mathematics*, **70**, 387-411. <https://doi.org/10.21136/am.2025.0268-24>
- [14] Galdi, G.P. and Grisanti, C.R. (2016) Womersley Flow of Generalized Newtonian Liquid. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, **146**, 671-692. <https://doi.org/10.1017/s0308210515000736>
- [15] Abbatiello, A. and Maremonti, P. (2019) Existence of Regular Time-Periodic Solutions to Shear-Thinning Fluids. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **21**, Article No. 29. <https://doi.org/10.1007/s00021-019-0435-4>
- [16] Abbatiello, A. (2021) Time-Periodic Weak Solutions to Incompressible Generalized Newtonian Fluids. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **23**, Article No. 63. <https://doi.org/10.1007/s00021-021-00576-0>

-
- [17] Brandt, F. and Hieber, M. (2023) Strong Periodic Solutions to Quasilinear Parabolic Equations: An Approach by the Da Prato-Grisvard Theorem. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **55**, 1971-1993. <https://doi.org/10.1112/blms.12831>
 - [18] Adams, R. and Fournier, J. (2003) Sobolev Spaces. Second edition. Pure and Applied Mathematics, Vol. 140, Elsevier.
 - [19] Prüss, J., Simonett, G. and Wilke, M. (2018) Critical Spaces for Quasilinear Parabolic Evolution Equations and Applications. *Journal of Differential Equations*, **264**, 2028-2074. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.10.010>
 - [20] Giga, Y. (1981) Analyticity of the Semigroup Generated by the Stokes Operator In L^n Spaces. *Mathematische Zeitschrift*, **178**, 297-329. <https://doi.org/10.1007/bf01214869>