

有限级亚纯函数的导数与其差分导数组合分担多项式的问题

胡蕊*, 卢雨欣

绍兴大学数理信息学院, 浙江 绍兴

收稿日期: 2026年7月1日; 录用日期: 2026年8月5日; 发布日期: 2026年8月24日

摘 要

本文研究了有限级亚纯函数 $f(z)$ 的差分导数组合 $f(z+c)+f(z)+f'(z)$ 与导数 $f'(z)$ 分担多项式的唯一性问题。基于Nevanlinna值分布理论, 我们证明了: 若 $f(z+c)+f(z)+f'(z)$ 与 $f'(z)$ 分担两个互异多项式及无穷远点, 函数 $f(z)$ 则满足以下两种情形之一: (1) $f(z)=f(z+2c)$; (2) $f(z)$ 退化为多项式, 若存在非零常数 $A(\neq 1)$ 与常系数多项式 $P(z)$, 则恒等式 $f'(z)-A(f(z+c)+f(z)+f'(z))\equiv(1-A)P(z)$ 成立。所得结果进一步推广了亚纯函数差分算子分担多项式的唯一性理论。

关键词

亚纯函数, 多项式, 唯一性, 差分算子

The Problem of Polynomial Sharing between the Derivative and Its Differential-Difference Combination of Finite-Order Meromorphic Functions

Rui Hu*, Yuxin Lu

School of Mathematics and Information, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang

Received: July 1, 2026; accepted: August 5, 2026; published: August 24, 2026

*通讯作者。

Abstract

This paper studies the uniqueness problem that the differential-difference combination $f(z+c)+f(z)+f'(z)$ and the derivative $f'(z)$ of finite-order meromorphic function $f(z)$ share polynomials. By using Nevanlinna value distribution theory, it is proved that if $f(z+c)+f(z)+f'(z)$ and $f'(z)$ share two distinct polynomials and infinity, then $f(z)$ satisfies one of the following two cases: 1) $f(z)=f(z+2c)$; 2) $f(z)$ is a polynomial, and there exists a non-zero constant $A \neq 1$ and a polynomial $P(z)$ with constant coefficients such that $f'(z)-A(f(z+c)+f(z)+f'(z)) \equiv (1-A)P(z)$. The results obtained generalize the uniqueness theory of meromorphic functions concerning difference operators sharing polynomials.

Keywords

Meromorphic Function, Polynomial, Uniqueness, Difference Operator

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

亚纯函数的 Nevanlinna 理论及其差分模拟, 是研究复域内亚纯函数唯一性理论的核心工具。近年来, 带有分担值集的亚纯函数唯一性问题成为复分析领域内重要的研究方向, 其相关理论体系的发展为复分析领域的诸多问题提供了严谨的分析框架, 获得了大量的研究结论[1]-[8]。

对任意亚纯函数 $f(z)$, 其差分算子定义为 $\Delta_c f(z) = f(z+c) - f(z)$, 其中 c 始终表示非零复常数。分担值理论是探究亚纯函数与其差分算子唯一性理论的关键, 早期的研究往往依赖于较强的条件, 此后, 诸多学者在弱化原有约束条件的基础上, 进一步开展亚纯函数唯一性理论的相关研究。

2013 年, 陈宗煊和仪洪勋[9]在分担值 a, b, ∞ CM 条件下, 证明了 $f(z)$ 与 $\Delta_c f(z)$ 的唯一性定理, 得到了如下结果。

定理 A [9] 假设 $f(z)$ 是一个超越亚纯函数, 满足 $\rho(f) \neq \infty$ 且 $\rho(f)$ 不是整数, 设 a 和 b 是两个互异常数。如果 $\Delta_c f(z)$ 和 $f(z)$ 分担三个不同值 a, b, ∞ CM, 其中 $\Delta_c f(z) \neq 0$, 则 $f(z) \equiv \Delta_c f(z)$ 。

随后, 刘丹[10]去掉了定理 A 中里关于增长级 $\rho(f)$ 的限制条件, 得到的结论如下:

定理 B [10] 设 $f(z)$ 是一个有限级的超越亚纯函数, a 和 b 是两个互异的常数。若 $\Delta_c f(z)$ 和 $f(z)$ 分担三个不同值 a, b CM, 其中 $\Delta_c f(z) \neq 0$, 则 $f(z) \equiv \Delta_c f(z)$ 。

后续研究中, 李效敏与仪洪勋[11], 崔宁与陈宗煊[12], 吕锋与吕巍然[13]等学者先后对前述定理进行推广, 将原定理中超越亚纯函数的条件放宽至有限级亚纯函数, 得到了如下结论:

定理 C [13] 设 $f(z)$ 是一个有限级超越亚纯函数, a 和 b 是两个互异的常数。若 $\Delta_c f(z)$ 和 $f(z)$ 分担三个不同值 a, b, ∞ CM, 其中 $\Delta_c f(z) \neq 0$, 则 $f(z) \equiv \Delta_c f(z)$ 。

基于定理 C, 甄磊[14]进一步研究了差分算子 $\Delta_c f(z)$ 与亚纯函数 $f(z)$ 分担多项式时的唯一性问题, 得到了定理 D。

定理 D [14] 设 $f(z)$ 是一个有限级的超越亚纯函数。若 $\Delta_c f(z)$ 和 $f(z)$ 分担 P_1, P_2, ∞ CM, 其中 P_1 和 P_2 是两个互异多项式, 则 $f(z) \equiv \Delta_c f(z)$ 。

2018 年, 祁晓光、李楠和杨连中[15]将亚纯函数 $f(z)$ 及其差分算子 $\Delta_c f(z)$ 替换为导数 $f'(z)$ 与差分算子 $\Delta_c f(z)$, 并证明了以下唯一性定理:

定理 E [15] 设 $f(z)$ 是一个超越亚纯函数, 满足 $\rho(f) \neq \infty$ 且 $\rho(f)$ 不是整数, a 和 b 是两个互异常数。若 $\Delta_c f(z)$ 和 $f'(z)$ 分担值 a, b, ∞ CM, 则 $f'(z) \equiv \Delta_c f(z)$ 。

2019 年, 邓炳茂[16]等人去掉了定理 E 中 “ $\rho(f)$ 不是整数” 这一条件, 并将定理 E 中 $f(z)$ 为超越亚纯函数推广至有限级亚纯函数。

定理 F [16] 设 $f(z)$ 是一个有限级的亚纯函数, 设 a 和 b 是两个互异常数。若 $\Delta_c f(z)$ 和 $f'(z)$ 分担值 a, b, ∞ CM, 则 $f'(z) \equiv \Delta_c f(z)$ 或 $f(z) = Az + B$, 其中 A, B 均为常数且 $A \neq a, b$, $Ac \neq a, b$ 。

类似地, 2023 年, 王苗红和陈俊方进一步推广定理 F, 研究了有限级亚纯函数的导数 $f'(z)$ 及差分 $\Delta_c f(z)$ 分担多项式的唯一性问题。

定理 G [17] 设 $f(z)$ 是一个有限级的亚纯函数, $a(z)$ 和 $b(z)$ 是两个互异多项式。若 $\Delta_c f(z)$ 和 $f'(z)$ 分担多项式 $a(z), b(z), \infty$ CM, 则下列情况之一成立:

(i) $f'(z) \equiv \Delta_c f(z)$;

(ii) $f(z)$ 可以化简为一个多项式, 且 $f'(z) - A\Delta_c f(z) \equiv (1-A)(c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0)$, 其中 $A(\neq 1)$ 是一个非零常数, 且 $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$ 都是常数。

受上述研究工作的启发, 前人大多仅单独研究差分项 $f(z+1) - f(z-1)$ 或微分项 $f'(z)$ 。本文将平移差分算子 $f(z+c)$ 、原函数项 $f(z)$ 以及一阶微分算子 $f'(z)$ 进行线性组合, 构造出新算子 $f(z+c) + f(z) + f'(z)$ 。该算子融合了差分作用与微分作用, 可以刻画更加广泛的混合差分 - 微分方程, 从而研究对应方程亚纯解的存在性与增长性质。

接下来, 我们对定理 G 进行了思考, 如果将 $\Delta_c f(z)$ 替换成 $f(z+c) + f(z) + f'(z)$, 定理 G 是否仍然成立? 我们借助了王苗红与陈俊方[17]的研究方法得到了以下定理:

定理 1.1 设 $f(z)$ 是一个有限级的亚纯函数, 设 $a(z)$ 和 $b(z)$ 是两个不同的多项式。若 $f(z+c) + f(z) + f'(z)$ 和 $f'(z)$ 分担多项式 $a(z), b(z), \infty$ CM, 则假定下列情况之一成立:

(i) $f(z) = f(z+2c)$;

(ii) $f(z)$ 可以化简为一个多项式, 且

$f'(z) - A(f(z+c) + f(z) + f'(z)) \equiv (1-A)(c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0)$, 其中 $A(\neq 1)$ 是一个非零常数, 且 $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$ 都是常数。

2. 引理

本文默认读者已熟悉 Nevanlinna 理论的基本结论与标准符号, 下面给出在定理 1.1 证明中起到关键作用的相关引理。

引理 2.1 [18] 设 $f(z)$ 为有限级亚纯函数, c 为非零复常数, 则有

$$T(r, f(z+c)) = T(r, f) + S(r, f).$$

引理 2.2 [18] 设 $f(z)$ 为有限级亚纯函数, c 为非零复常数, k 为正整数, 则有

$$m\left(r, \frac{\Delta_c^k f(z)}{f(z)}\right) = S(r, f).$$

引理 2.3 [19] 设 $f_i(z) (i=1, 2, \dots, n, n \geq 2)$ 为亚纯函数, $g_i(z) (i=1, 2, \dots, n, n \geq 2)$ 为整函数, 且满足:

$$(i) \sum_{i=1}^n f_i(z) e^{g_i(z)} \equiv 0;$$

(ii) 对任意 $1 \leq k < l \leq n$, $g_k(z) - g_l(z)$ 不为常数;

(iii) 对任意 $1 \leq i \leq n$ 及 $1 \leq k < l \leq n$, 有

$$T(r, f_i) = o\left\{T\left(r, e^{g_k - g_l}\right)\right\}, (r \rightarrow \infty, r \notin E),$$

其中 $E \subset (1, \infty)$ 是一个具有有限线性测度或有限对数测度的集合。

引理 2.4 设 $a(z)$ 为多项式, 满足 $a(z+c) - a(z) = \frac{a'(z)}{R}$, 其中 R 为非零常数, 则:

(i) 若 $c = \frac{1}{R}$, 则 $a(z)$ 为一次多项式或常数;

(ii) 若 $c \neq \frac{1}{R}$, 则 $a(z)$ 为常数。

3. 定理 1.1 的证明

这个小节我们证明定理 1.1。

定理 1.1 的证明:

如果 $f(z+c) + f(z) + f'(z) \equiv a(z)$, 那么根据 $f(z+c) + f(z) + f'(z)$ 和 $f'(z)$ 分担 $a(z)$ CM 的条件, 我们可以得到 $f'(z) \equiv a(z)$ 。因此, $f(z+c) + f(z) + f'(z) \equiv f'(z)$ 。同样地, 如果 $f(z+c) + f(z) + f'(z) \equiv b(z)$, 我们也可以得到 $f(z+c) + f(z) + f'(z) \equiv f'(z)$ 。接下来, 我们考虑 $f(z+c) + f(z) + f'(z) \not\equiv a(z)$, $b(z)$ 的情况。

注意到 $f(z+c) + f(z) + f'(z)$ 和 $f'(z)$ 分担 $a(z), b(z), \infty$ CM 且 $f(z)$ 是有限阶的亚纯函数。那么, 根据引理 2.1, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{f'(z) - a(z)}{f(z+c) + f(z) + f'(z) - a(z)} &= e^{\alpha(z)}, \\ \frac{f'(z) - b(z)}{f(z+c) + f(z) + f'(z) - b(z)} &= e^{\beta(z)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 $\alpha(z)$ 和 $\beta(z)$ 是两个多项式, 使得 $\max\{\deg \alpha(z), \deg \beta(z)\} \leq \rho(f)$ 。

由方程(3.1)可知:

$$\begin{aligned} & (e^{\alpha(z)} - e^{\beta(z)})(f(z+c) + f(z) + f'(z)) \\ &= a(z)e^{\alpha(z)} - b(z)e^{\beta(z)} - a(z) + b(z). \end{aligned} \quad (3.2)$$

如果 $e^{\alpha(z)} \equiv e^{\beta(z)}$, 则由方程(3.2), 我们可以得到:

$$[a(z) - b(z)](e^{\alpha(z)} - 1) = 0.$$

由于 $a(z) \not\equiv b(z)$, 则有 $e^{\alpha(z)} \equiv 1$ 。因此, 由方程(3.1), 我们可以得到 $f(z+c) + f(z) + f'(z) \equiv f'(z)$ 。接下来, 我们考虑 $e^{\alpha(z)} \not\equiv e^{\beta(z)}$ 的情况。

由方程(3.1)和方程(3.2)可知:

$$f(z+c) + f(z) + f'(z) = \frac{a(z)e^{\alpha(z)} - b(z)e^{\beta(z)} - a(z) + b(z)}{e^{\alpha(z)} - e^{\beta(z)}}, \quad (3.3)$$

$$f'(z) = \frac{e^{\alpha(z)}[a(z)e^{\alpha(z)} - b(z)e^{\beta(z)} - a(z) + b(z)]}{e^{\alpha(z)} - e^{\beta(z)}} - a(z)e^{\alpha(z)} + a(z). \quad (3.4)$$

对方程(3.3)微分, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} & [f(z+c) + f(z) + f'(z)]' \\ &= \frac{a'(z)e^{2\alpha(z)} + b'(z)e^{2\beta(z)} + [(a(z)-b(z))(\beta'(z)-\alpha'(z)) - a'(z)-b'(z)]e^{\alpha(z)+\beta(z)}}{(e^{\alpha(z)} - e^{\beta(z)})^2} \\ &+ \frac{[(a(z)-b(z))\alpha'(z) - a'(z) + b'(z)]e^{\alpha(z)} - [(a(z)-b(z))\beta'(z) - a'(z) + b'(z)]e^{\beta(z)}}{(e^{\alpha(z)} - e^{\beta(z)})^2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

根据方程(3.4), 可以得到:

$$\begin{aligned} & [f(z+c) + f(z) + f'(z)]' = f'(z+c) + f'(z) + f''(z) \\ &= \frac{e^{\alpha(z+c)}[a(z+c)e^{\alpha(z+c)} - b(z+c)e^{\beta(z+c)} - a(z+c) + b(z+c)]}{e^{\alpha(z+c)} - e^{\beta(z+c)}} \\ &- a(z+c)e^{\alpha(z+c)} + a(z+c) + \frac{e^{\alpha(z)}[a(z)e^{\alpha(z)} - b(z)e^{\beta(z)} - a(z) + b(z)]}{e^{\alpha(z)} - e^{\beta(z)}} \\ &- a(z)e^{\alpha(z)} + a(z) + \frac{g'(z)(e^{\alpha(z)} - e^{\beta(z)}) - g(z)(e^{\alpha(z)} - e^{\beta(z)})'}{(e^{\alpha(z)} - e^{\beta(z)})^2} - (a(z)e^{\alpha(z)})' + a'(z). \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中,

$$e^{\alpha(z)}[a(z)e^{\alpha(z)} - b(z)e^{\beta(z)} - a(z) + b(z)] = g(z).$$

由方程(3.5)和方程(3.6), 我们可以得到:

$$\begin{aligned} & (a(z+c) - b(z+c))e^{\alpha(z+c)+2\alpha(z)+\beta(z+c)} + (b(z+c) - a'(z) + b(z) + b'(z))e^{\alpha(z+c)+2\alpha(z)} \\ &+ (a(z) + a'(z) + a(z)\beta'(z) - b(z) - b'(z) - b(z)\beta'(z))e^{\alpha(z+c)+2\alpha(z)+\beta(z)} \\ &+ 2(b(z+c) - a(z+c))e^{\alpha(z+c)+\alpha(z)+\beta(z+c)+\beta(z)} \\ &+ [2(a(z) - b(z))(\alpha'(z) - \beta'(z)) - a(z) - b(z) - 2b(z+c)]e^{\alpha(z+c)+\alpha(z)+\beta(z)} \\ &- (a(z) + a'(z) + a(z)\alpha'(z) - b(z) - b'(z) - b(z)\alpha'(z))e^{\alpha(z+c)+\alpha(z)+2\beta(z)} \\ &- [(a(z) - b(z))\alpha'(z) - a'(z) + b'(z)]e^{\alpha(z+c)+\alpha(z)} \\ &- (a(z) + a'(z) + a(z)\beta'(z) - b(z) - b'(z) - b(z)\beta'(z))e^{2\alpha(z)+\beta(z)+\beta(z+c)} \\ &+ (a'(z) - b(z) - b'(z) - a(z+c))e^{2\alpha(z)+\beta(z+c)} \\ &+ (a(z+c) - b(z+c))e^{\alpha(z+c)+2\beta(z)+\beta(z+c)} \\ &+ (a(z) + a'(z) - b'(z) + b(z+c))e^{\alpha(z+c)+2\beta(z)} \\ &+ [(a(z) - b(z))\beta'(z) - a'(z) + b'(z)]e^{\alpha(z+c)+\beta(z)} \\ &+ (a(z) + a'(z) + a(z)\alpha'(z) - b(z) - b'(z) - b(z)\alpha'(z))e^{\alpha(z)+2\beta(z)+\beta(z+c)} \\ &+ [2(a(z) - b(z))(\beta'(z) - \alpha'(z)) + a(z) + b(z) + 2a(z+c)]e^{\alpha(z)+\beta(z)+\beta(z+c)} \\ &+ [(a(z) - b(z))\alpha'(z) - a'(z) + b'(z)]e^{\alpha(z)+\beta(z+c)} \\ &+ (b'(z) - a(z) - a'(z) - a(z+c))e^{2\beta(z)+\beta(z+c)} \\ &- [(a(z) - b(z))\beta'(z) - a'(z) + b'(z)]e^{\beta(z)+\beta(z+c)} \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

令

$$\begin{aligned}
 Q_1(z) &= a(z) + a'(z) + a(z)\beta'(z) - b(z) - b'(z) - b(z)\beta'(z); \\
 Q_2(z) &= 2(a(z) - b(z))(a'(z) - \beta'(z)) - a(z) - b(z) - 2b(z+c); \\
 Q_3(z) &= a(z) + a'(z) + a(z)\alpha'(z) - b(z) - b'(z) - b(z)\alpha'(z); \\
 Q_4(z) &= (a(z) - b(z))\alpha'(z) - a'(z) + b'(z); \\
 Q_5(z) &= (a(z) - b(z))\beta'(z) - a'(z) + b'(z); \\
 Q_6(z) &= 2(a(z) - b(z))(\beta'(z) - a'(z)) + a(z) + b(z) + 2a(z+c).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

接下来, 我们研究关于 $\deg \alpha(z)$ 和 $\deg \beta(z)$ 的三种情况。

情况 1. $\deg \alpha(z) > \deg \beta(z)$, 那么方程(3.7)可以被改写为:

$$A_3(z)e^{3\alpha(z)} + A_2(z)e^{2\alpha(z)} + A_1(z)e^{\alpha(z)} + A_0(z) \equiv 0, \tag{3.9}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 A_3(z) &= (a(z+c) - b(z+c))e^{\Delta_c \alpha(z) + \beta(z+c)} \\
 &\quad + (b(z+c) - a'(z) + b(z) + b'(z))e^{\Delta_c \alpha(z)} + Q_1(z)e^{\Delta_c \alpha(z) + \beta(z)}; \\
 A_2(z) &= 2(b(z+c) - a(z+c))e^{\Delta_c \alpha(z) + \beta(z+c) + \beta(z)} + Q_2(z)e^{\Delta_c \alpha(z) + \beta(z)} \\
 &\quad - Q_3(z)e^{\Delta_c \alpha(z) + 2\beta(z)} - Q_4(z)e^{\Delta_c \alpha(z)} - Q_1(z)e^{\beta(z) + \beta(z+c)} \\
 &\quad + (a'(z) - b(z) - b'(z) - a(z+c))e^{\beta(z+c)}; \\
 A_1(z) &= (a(z+c) - b(z+c))e^{\Delta_c \alpha(z) + 2\beta(z) + \beta(z+c)} \\
 &\quad + (a(z) + a'(z) - b'(z) + b(z+c))e^{\Delta_c \alpha(z) + 2\beta(z)} + Q_5(z)e^{\Delta_c \alpha(z) + \beta(z)} \\
 &\quad + Q_3(z)e^{2\beta(z) + \beta(z+c)} + Q_6(z)e^{\beta(z) + \beta(z+c)} + Q_4(z)e^{\beta(z+c)}; \\
 A_0(z) &= (b'(z) - a(z) - a'(z) - a(z+c))e^{2\beta(z) + \beta(z+c)} - Q_5(z)e^{\beta(z) + \beta(z+c)}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

由于 $\deg \beta(z) < \deg \alpha(z)$, 差分 $\Delta_c \alpha(z) = \alpha(z+c) - \alpha(z)$ 的次数满足 $\deg(\Delta_c \alpha(z)) \leq \deg \alpha(z) - 1$ 。指数函数 $e^{\beta(z)}$ 与 $e^{\Delta_c \alpha(z)}$ 的增长阶分别等于 $\deg \beta(z)$ 和 $\deg(\Delta_c \alpha(z))$ 。又 $Q_1, \dots, Q_6(z)$ 均为多项式, 其增长阶为 0。因此组合得到的系数 $A_i(z)$ 的增长阶满足

$$\rho(A_i(z)) \leq \max\{\deg \beta(z), \deg(\Delta_c \alpha(z))\} < \deg \alpha(z).$$

显然, 对于任意 $i=0,1,2,3$, 我们有:

$$\rho(A_i(z)) < \deg \alpha(z).$$

因此, 由引理 2.3 可知:

$$A_i(z) \equiv 0, (i=0,1,2,3).$$

接下来, 我们讨论如下两个子情况。

子情况 1.1. 当 $\deg \beta(z) = 0$, 则 $\beta(z)$ 为一个常数。

由方程(3.8)和方程(3.10), 以及 $A_3(z) \equiv A_0(z) \equiv 0$, 我们可以得到:

$$(b'(z) - a'(z))(e^{\beta(z)} - 1) = (a(z+c) + a(z))e^{\beta(z)}, \tag{3.11}$$

$$(b(z) + b'(z) + b(z+c) - a'(z))(e^{\beta(z)} - 1) = (a(z) + a(z+c))e^{\beta(z)}. \tag{3.12}$$

结合方程(3.11)和方程(3.12), 我们可以得到:

$$(b(z+c)+b(z))(e^{\beta(z)}-1)\equiv 0.$$

如果 $e^{\beta(z)}=1$, 则由方程(3.1), 我们可以得到 $f(z+c)+f(z)+f'(z)\equiv f'(z)$ 和 $e^{\alpha(z)}\equiv e^{\beta(z)}\equiv 1$, 推得矛盾。

如果 $b(z+c)+b(z)\equiv 0$, 则 $b(z)\equiv 0$, 将其代入 $A_3(z)\equiv 0$, 我们可以得到:

$$(a(z+c)+a(z))e^{\beta(z)}+a'(z)(e^{\beta(z)}-1)\equiv 0.$$

则 $a(z)\equiv 0$, 这与 $b(z)\equiv 0$ 矛盾。

子情况 1.2。当 $\deg \beta(z)\geq 1$ 。那么由方程(3.10)和 $A_0(z)\equiv 0$, 我们可以推出 $Q_5(z)\equiv 0$, 即:

$$\beta'(z)\equiv \frac{a'(z)-b'(z)}{a(z)-b(z)}. \quad (3.13)$$

由于 $\deg \beta(z)\geq 1$, 我们可以得到 $\beta'(z)\neq 0$ 。因此, 由方程(3.13)可得 $a(z)-b(z)\equiv \tilde{A}e^{\beta(z)}$, 其中 $\tilde{A}$ 为非零常数。但这推得了矛盾。

情况 2。当 $\deg \beta(z)>\deg \alpha(z)$ 。此时方程(3.7)可改写为:

$$B_3(z)e^{3\beta(z)}+B_2(z)e^{2\beta(z)}+B_1(z)e^{\beta(z)}+B_0(z)\equiv 0. \quad (3.14)$$

其中,

$$\begin{aligned} B_3(z) &= (a(z+c)-b(z+c))e^{\Delta_c\beta(z)+\alpha(z+c)}+Q_3(z)e^{\Delta_c\beta(z)+\alpha(z)} \\ &\quad + (b'(z)-a(z)-a'(z)-a(z+c))e^{\Delta_c\beta(z)}; \\ B_2(z) &= 2(b(z+c)-a(z+c))e^{\Delta_c\beta(z)+\alpha(z+c)+\alpha(z)}-Q_3(z)e^{\alpha(z+c)+\alpha(z)} \\ &\quad -Q_1(z)e^{\Delta_c\beta(z)+2\alpha(z)}+(a(z)+a'(z)-b'(z)+b(z+c))e^{\alpha(z+c)} \\ &\quad +Q_6(z)e^{\Delta_c\beta(z)+\alpha(z)}-Q_5(z)e^{\Delta_c\beta(z)}; \\ B_1(z) &= (a(z+c)-b(z+c))e^{\Delta_c\beta(z)+\alpha(z+c)+2\alpha(z)}+Q_1(z)e^{\alpha(z+c)+2\alpha(z)} \\ &\quad +Q_2(z)e^{\alpha(z+c)+\alpha(z)}+(a'(z)-b(z)-b'(z)-a(z+c))e^{\Delta_c\beta(z)+2\alpha(z)} \\ &\quad +Q_5(z)e^{\alpha(z+c)}+Q_4(z)e^{\Delta_c\beta(z)+\alpha(z)}; \\ B_0(z) &= (b(z+c)-a'(z)+b(z)+b'(z))e^{\alpha(z+c)+2\alpha(z)}-Q_4(z)e^{\alpha(z+c)+\alpha(z)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

与情况 1 类似地, 对于任意的 $i=0,1,2,3$, 我们有:

$$\rho(B_i(z))<\deg \beta(z).$$

因此, 由引理 2.3 可得:

$$B_i(z)\equiv 0, (i=0,1,2,3).$$

接下来, 我们讨论以下两种子情况。

子情况 2.1. 当 $\deg \alpha(z)=0$, 则 $\alpha(z)$ 为一个常数。

由方程(3.8)和方程(3.15), 以及 $B_3(z)\equiv B_0(z)\equiv 0$, 我们可以得到:

$$(a(z)+a'(z)+a(z+c)-b'(z))(e^{\alpha(z)}-1)=(b(z)+b(z+c))e^{\alpha(z)}, \quad (3.16)$$

$$(b'(z)-a'(z))(e^{\alpha(z)}-1)=-(b(z)+b(z+c))e^{\alpha(z)}. \quad (3.17)$$

结合方程(3.16)和方程(3.17), 我们可以得到:

$$(a + a(z+c))(e^{\alpha(z)} - 1) = 0.$$

如果 $e^{\alpha(z)} = 1$, 则由方程(3.1), 我们可以得到 $f(z+c) + f(z) + f'(z) \equiv f'(z)$ 和 $e^{\alpha(z)} \equiv e^{\beta(z)} \equiv 1$, 推得矛盾。

如果 $a(z+c) + a(z) \equiv 0$, 则 $a(z) \equiv 0$, 将其代入 $B_3(z) \equiv 0$, 我们可以得到:

$$(b(z+c) + b(z))e^{\alpha(z)} + (b'(z) - 2a(z))(e^{\alpha(z)} - 1) \equiv 0.$$

则 $b(z) \equiv 0$, 这与 $a(z) \equiv 0$ 矛盾。

子情况 2.2. 当 $\deg \alpha(z) \geq 1$. 那么由方程(3.15)和 $B_0(z) \equiv 0$, 我们可以推出 $Q_4(z) \equiv 0$, 即:

$$\alpha'(z) \equiv \frac{a'(z) - b'(z)}{a(z) - b(z)}, \quad (3.18)$$

由于 $\deg \alpha(z) \geq 1$, 我们可以得到 $\alpha'(z) \neq 0$. 因此, 由方程(3.18)可得 $a(z) - b(z) \equiv \tilde{B}e^{\beta(z)}$, 其中 $\tilde{B}$ 为非零常数。但这推得了矛盾。

情况 3. 当 $\deg \alpha(z) = \deg \beta(z)$ 。

子情况 3.1. 当 $\deg \alpha(z) = \deg \beta(z) = 0$, 则 $\alpha(z)$ 与 $\beta(z)$ 均为常数, 所以 $e^{\alpha(z)}$ 和 $e^{\beta(z)}$ 也都是常数。由方程(3.4)可知 $f'(z)$ 可以表示为 $a(z)$ 和 $b(z)$ 的线性组合, 因此 $f'(z)$ 为多项式, 进而 $f(z)$ 也为多项式。由方程(3.1), 可以推得:

$$f'(z) - A(f(z+c) + f(z) + f'(z)) \equiv (1-A)(c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0),$$

其中 $A \neq 0, c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$ 为常数。当 $A=1$ 时, $f(z+c) + f(z) + f'(z) \equiv f'(z)$, 由方程(3.1)可得 $e^{\alpha(z)} \equiv e^{\beta(z)} \equiv 1$, 这与假设的 $e^{\alpha(z)} \neq e^{\beta(z)}$ 矛盾。因此, $A \neq 1$ 。

子情况 3.2. 当 $\deg \alpha(z) = \deg \beta(z) \geq 1$, 则方程(3.7)可改写为:

$$\begin{aligned} & C_1(z)e^{\alpha(z)+3\beta(z)} + C_2(z)e^{2\alpha(z)+2\beta(z)} + C_3(z)e^{3\alpha(z)+\beta(z)} \\ & + C_4(z)e^{3\beta(z)} + C_5(z)e^{\alpha(z)+2\beta(z)} + C_6(z)e^{2\alpha(z)+\beta(z)} \\ & + C_7(z)e^{3\alpha(z)} + C_8(z)e^{2\beta(z)} + C_9(z)e^{\alpha(z)+\beta(z)} + C_{10}(z)e^{2\alpha(z)} \equiv 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

其中,

$$\begin{aligned} C_1(z) &= (a(z+c) - b(z+c))e^{\Delta_c \alpha(z) + \Delta_c \beta(z)} + Q_3(z)e^{\Delta_c \beta(z)}; \\ C_2(z) &= 2(b(z+c) - a(z+c))e^{\Delta_c \alpha(z) + \Delta_c \beta(z)} - Q_3(z)e^{\Delta_c \alpha(z)} - Q_1(z)e^{\Delta_c \beta(z)}; \\ C_3(z) &= (a(z+c) - b(z+c))e^{\Delta_c \alpha(z) + \Delta_c \beta(z)} + Q_1(z)e^{\Delta_c \alpha(z)}; \\ C_4(z) &= (b'(z) - a(z) - a'(z) - a(z+c))e^{\Delta_c \beta(z)}; \\ C_5(z) &= (a(z) + a'(z) - b'(z) + b(z+c))e^{\Delta_c \alpha} + Q_6(z)e^{\Delta_c \beta(z)}; \\ C_6(z) &= Q_2(z)e^{\Delta_c \alpha(z)} + (a'(z) - b(z) - b'(z) - a(z+c))e^{\Delta_c \beta(z)}; \\ C_7(z) &= (b(z+c) - a'(z) + b'(z) + b(z))e^{\Delta_c \alpha(z)}; \\ C_8(z) &= -Q_5(z)e^{\Delta_c \beta(z)}; \\ C_9(z) &= Q_5(z)e^{\Delta_c \alpha(z)} + Q_4(z)e^{\Delta_c \beta(z)}; \\ C_{10}(z) &= -Q_4(z)e^{\Delta_c \alpha(z)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

若 $\deg(\alpha(z) - \beta(z)) = \deg(2\alpha(z) - \beta(z)) = \deg(\alpha(z) + \beta(z)) = \deg(3\alpha(z) - \beta(z)) = \deg(3\beta(z) - \alpha(z)) = \deg(\alpha(z) - 2\beta(z)) = \deg(3\alpha(z) - 2\beta(z)) = \deg(3\beta(z) - 2\alpha(z)) = \deg \alpha(z) = \deg \beta(z)$, 则对任意的 $1 \leq i < j \leq 10$ 和 $1 \leq n \leq 10$, 我们可以得到:

$$\rho(C_n(z)) < \rho(e^{g_i(z) - g_j(z)}) = \deg \alpha(z).$$

由引理 2.3 可知 $C_n(z) \equiv 0, (n=1, 2, \dots, 10)$ 。特别地,

$$C_{10}(z) = -Q_4(z)e^{\Delta_c \alpha(z)} \equiv 0,$$

这意味着 $Q_4(z) \equiv 0$ 。因此, 由方程(3.8)可得:

$$\alpha'(z) \equiv \frac{a'(z) - b'(z)}{a(z) - b(z)}.$$

因此, 通过和子情况 1.2 类似的证明方法, 我们可以推得矛盾。

所以, 我们只需要讨论 $\deg(\alpha(z) - \beta(z))$, $\deg(2\alpha(z) - \beta(z))$, $\deg(\alpha(z) + \beta(z))$, $\deg(3\alpha(z) - \beta(z))$, $\deg(3\beta(z) - \alpha(z))$, $\deg(\alpha(z) - 2\beta(z))$, $\deg(3\alpha(z) - 2\beta(z))$, $\deg(3\beta(z) - 2\alpha(z))$ 中部分次数小于 $\deg \alpha(z)$ 的情况。

子情况 3.2.1. 设 $\deg(\alpha(z) - \beta(z)) < \deg \alpha(z)$, 令 $\alpha(z) - \beta(z) = p_1(z)$, 则 $\beta(z) = \alpha(z) - p_1(z)$ 。将方程(3.19)改写为:

$$D_4(z)e^{4\alpha(z)} + D_3(z)e^{3\alpha(z)} + D_2(z)e^{2\alpha(z)} \equiv 0,$$

其中,

$$\begin{aligned} D_4(z) &= C_1(z)e^{-3p_1(z)} + C_2(z)e^{-2p_1(z)} + C_3(z)e^{-p_1(z)}; \\ D_3(z) &= C_4(z)e^{-3p_1(z)} + C_5(z)e^{-2p_1(z)} + C_6(z)e^{-p_1(z)} + C_7(z); \\ D_2(z) &= C_8(z)e^{-2p_1(z)} + C_9(z)e^{-p_1(z)} + C_{10}(z). \end{aligned}$$

结合方程(3.20)可知, 对任意 $i = 2, 3, 4$, 有

$$\rho(D_i(z)) < \deg \alpha(z).$$

由引理 2.3 可得:

$$D_4(z) = D_3(z) = D_2(z) \equiv 0.$$

由于 $\beta(z) = \alpha(z) - p_1(z)$, 容易推得 $\Delta_c \beta(z) = \Delta_c \alpha(z) - \Delta_c p_1(z)$ 。因此, 根据方程(3.20)和 $D_2(z) \equiv 0$, 我们有

$$e^{\Delta_c \alpha(z)} \left[-Q_5(z)e^{-\Delta_c p_1(z) - 2p_1(z)} + Q_5(z)e^{-p_1(z)} + Q_4(z)e^{-\Delta_c p_1(z) - p_1(z)} - Q_4(z) \right] \equiv 0.$$

等价地,

$$Q_4(z) + Q_5(z)e^{-\Delta_c p_1(z) - 2p_1(z)} - e^{-p_1(z)}(Q_5(z) + Q_4(z)e^{-\Delta_c p_1(z)}) \equiv 0. \quad (3.21)$$

如果 $\deg p_1(z) \geq 1$, 则由方程(3.8)以及引理 2.3, 我们可以得到 $Q_4(z) \equiv 0$, 从而

$$\alpha'(z) \equiv \frac{a'(z) - b'(z)}{a(z) - b(z)}.$$

因此, 通过与子情况 2.2 类似的证明方法, 我们可以推得矛盾。

因而 $\deg p_1(z) = 0$, 即 $p_1(z) = \alpha(z) - \beta(z)$ 为常数, 且有

$$\Delta_c p_1(z) \equiv 0, \alpha'(z) \equiv \beta'(z), \quad (3.22)$$

由方程(3.22)和方程(3.8), 我们可以得到 $Q_4(z) \equiv Q_5(z)$ 。结合此结果, 方程(3.21)以及方程(3.22), 我们可以得到:

$$e^{2p_1(z)} - 2e^{2p_1(z)} + 1 \equiv 0.$$

从而 $e^{p_1(z)} \equiv 1$, 即 $e^{\alpha(z)} \equiv e^{\beta(z)}$ 。这与假设 $e^{\alpha(z)} \neq e^{\beta(z)}$ 矛盾。

子情况 3.2.2. 设 $\deg(2\alpha(z) - \beta(z)) < \deg \alpha(z)$ 。令 $2\alpha(z) - \beta(z) = p_2(z)$, 则 $\beta(z) = 2\alpha(z) - p_2(z)$ 。此时, 方程(3.19)可改写为:

$$E_7(z)e^{7\alpha(z)} + E_6(z)e^{6\alpha(z)} + E_5(z)e^{5\alpha(z)} + E_4(z)e^{4\alpha(z)} + E_3(z)e^{3\alpha(z)} + E_2(z)e^{2\alpha(z)} \equiv 0,$$

其中,

$$\begin{aligned} E_7(z) &= C_1(z)e^{-3p_2(z)}, E_6(z) = C_2(z)e^{-2p_2(z)} + C_4(z)e^{-3p_2(z)}, \\ E_5(z) &= C_3(z)e^{-p_2(z)} + C_5(z)e^{-2p_2(z)}, E_4(z) = C_6(z)e^{-p_2(z)} + C_8(z)e^{-2p_2(z)}, \\ E_3(z) &= C_7(z) + C_9(z)e^{-2p_2(z)}, E_2(z) = C_{10}(z). \end{aligned}$$

结合方程(3.20)可知, 对任意 $i = 2, 3, \dots, 7$, 有 $\rho(E_i(z)) < \deg \alpha(z)$ 。根据引理 2.3 和方程(3.20), 可得 $E_2(z) = C_{10}(z) = -Q_4(z)e^{\Delta_c \alpha(z)} \equiv 0$ 。因此, $Q_4(z) \equiv 0$ 。结合方程(3.8), 有

$$\alpha'(z) \equiv \frac{a'(z) - b'(z)}{a(z) - b(z)}.$$

因此, 通过与子情况 2.2 类似的证明方法, 我们可以推出矛盾。

子情况 3.2.3. 设 $\deg(\alpha(z) + \beta(z)) < \deg \alpha(z)$ 。令 $\alpha(z) + \beta(z) = p_3(z)$, 则 $\beta(z) = -\alpha(z) + p_3(z)$ 。此时, 方程(3.19)可改写为:

$$F_3(z)e^{3\alpha(z)} + F_2(z)e^{2\alpha(z)} + F_1(z)e^{\alpha(z)} + F_0(z) + F_{-1}(z)e^{-\alpha(z)} + F_{-2}(z)e^{-2\alpha(z)} + F_{-3}(z)e^{-3\alpha(z)} \equiv 0,$$

其中,

$$\begin{aligned} F_3(z) &= G_7(z), F_2(z) = C_{10}(z) + C_3(z)e^{p_3(z)}, F_1(z) = C_6(z)e^{p_3(z)}, \\ F_0(z) &= C_2(z)e^{2p_3(z)} + C_9(z)e^{p_3(z)}, F_{-1}(z) = C_5(z)e^{2p_3(z)}, \\ F_{-2}(z) &= C_1(z)e^{3p_3(z)} + C_8(z)e^{2p_3(z)}, F_{-3}(z) = C_4(z)e^{3p_3(z)}, \end{aligned}$$

结合方程(3.20), 我们得到: 对任意的 $i = -3, -2, \dots, 2, 3$, 有

$$\rho(F_i(z)) < \deg \alpha(z).$$

根据引理 2.3, 可得:

$$F_3(z) = F_2(z) = F_1(z) = F_0(z) = F_{-1}(z) = F_{-2}(z) = F_{-3}(z) \equiv 0.$$

因此, 由方程(3.20)和 $F_2(z) \equiv F_{-2}(z) \equiv 0$, 我们有:

$$\left[(a(z+c) - b(z+c))e^{\Delta_c \beta(z)} + Q_1(z) \right] e^{p_3(z)} - Q_4(z) \equiv 0, \quad (3.23)$$

$$\left[(a(z+c) - b(z+c))e^{\Delta_c \alpha(z)} + Q_3(z) \right] e^{p_3(z)} - Q_5(z) \equiv 0. \quad (3.24)$$

显然, 根据 $\deg(\alpha(z) + \beta(z)) < \deg \alpha(z) = \deg \beta(z)$ 和 $p_3(z) = \alpha(z) + \beta(z)$, 我们可以得到 $\deg p_3(z) \leq \deg \Delta_c \beta(z) = \deg \beta(z) - 1$ 。

若 $\deg p_3(z) < \deg \Delta_c \beta(z) = \deg \beta(z) - 1$, 则由方程(3.23), 我们可以得到:

$$T\left(r, e^{\Delta_c \beta(z)}\right) = T\left(r, \frac{Q_4(z) + [a(z) - b(z)]e^{p_3(z)}}{e^{p_3(z)}[a(z+c) - b(z+c)]}\right) \leq S\left(r, e^{\Delta_c \beta(z)}\right).$$

因此, $e^{\Delta_c \beta(z)}$ 为常数, 这与 $0 \leq \deg p_3(z) < \deg \Delta_c \beta(z)$ 矛盾。故必有 $\deg p_3(z) = \deg \Delta_c \beta(z)$ 。

若 $\deg p_3(z) = \deg \Delta_c \beta(z) \geq 1$, 则方程(3.23)可改写为:

$$\begin{aligned} & (a(z+c) - b(z+c))e^{\Delta_c \beta(z) + p_3(z)} \\ & = -(a(z) + a'(z) + a(z)\beta'(z) - b(z) - b'(z) - b'\beta'(z))e^{p_3(z)} + Q_4(z), \end{aligned} \quad (3.25)$$

其中 $Q_4(z) \neq 0$, 由第二基本定理和方程(3.25), 我们有

$$\begin{aligned} T\left(r, e^{p_3(z)}\right) & \leq N\left(r, e^{p_3(z)}\right) + N\left(r, \frac{1}{e^{p_3(z)}}\right) + N\left(r, \frac{1}{e^{p_3(z)} + \frac{Q_4(z)}{a(z) - b(z)}}\right) + S\left(r, e^{p_3(z)}\right) \\ & \leq N\left(r, \frac{1}{\frac{a(z+c) - b(z+c)}{a(z) - b(z)} e^{\Delta_c \beta(z) + p_3(z)} - Q_1(z)}\right) + S\left(r, e^{p_3(z)}\right) \leq S\left(r, e^{p_3(z)}\right). \end{aligned}$$

因此 $e^{p_3(z)}$ 为常数, 这与 $\deg p_3(z) \geq 1$ 矛盾。

若 $p_3(z) = \deg(\alpha(z) + \beta(z)) = \deg \Delta_c \beta(z) = 0$, 则 $\alpha(z)$ 和 $\beta(z)$ 均为一次多项式。令

$$\alpha(z) = a_1 z + a_0, \beta(z) = -a_1 z + b_0, \quad (3.26)$$

其中 $a_1 \neq 0, a_0, b_0$ 为常数。结合方程(3.8), 方程(3.23), 方程(3.24)和方程(3.26)得:

$$\begin{aligned} & \left\{ [a(z+c) - b(z+c)]e^{-a_1 c} + a(z) + a'(z) - a(z)a_1 - b(z) - b'(z) + b(z)a_1 \right\} e^{p_3(z)} \\ & - [a(z) - b(z)]a_1 + a'(z) - b'(z) \equiv 0; \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ [a(z+c) - b(z+c)]e^{a_1 c} + a(z) + a'(z) + a(z)a_1 - b(z) - b'(z) - b(z)a_1 \right\} e^{p_3(z)} \\ & + [a(z) - b(z)]a_1 + a'(z) - b'(z) \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

将方程(3.27)和方程(3.28)结合, 得:

$$\left\{ [a(z+c) - b(z+c)](e^{a_1 c} + e^{-a_1 c}) + 2[a(z) + a'(z) - b(z) - b'(z)] \right\} e^{p_3(z)} + 2[a'(z) - b'(z)] \equiv 0. \quad (3.29)$$

若 $a(z) - b(z)$ 是一个非零常数, 则 $a(z+c) - b(z+c)$ 也是一个非零常数。此外, 可得 $a(z+c) - b(z+c) = a(z) - b(z)$ 和 $a'(z) - b'(z) \equiv 0$ 。代入方程(3.29), 得 $e^{a_1 c} + e^{-a_1 c} + 2 = 0$, 故 $e^{a_1 c} = -1$, 这不可能, 所以推得矛盾。

若 $a(z) - b(z)$ 不是一个常数, 则 $\deg(a'(z) - b'(z)) < \deg(a(z) - b(z))$ 。接下来, 我们令 $h(z) = a(z) - b(z) = h_n z^n + \cdots + h_1 z + h_0$, 其中 $h_n (\neq 0), h_{n-1}, h_{n-2}, \dots, h_1, h_0$, 均为常数且 $n \geq 1$ 。将其代入方程

(3.29), 可得 $e^{a_1c} + e^{-a_1c} + 2 = 0$, 故 $e^{a_1c} = -1$, 这不可能, 所以推得矛盾。

子情况 3.2.4. 设 $\deg(3\alpha(z) - \beta(z)) < \deg \alpha(z)$, 令 $3\alpha(z) - \beta(z) = p_4(z)$, 则 $\beta(z) = 3\alpha(z) - p_4(z)$ 。此时, 方程(3.19)可改写为:

$$\begin{aligned} & G_{10}(z)e^{10\alpha(z)} + G_9(z)e^{9\alpha(z)} + G_8(z)e^{8\alpha(z)} + G_7(z)e^{7\alpha(z)} + G_6(z)e^{6\alpha(z)} \\ & + G_5(z)e^{5\alpha(z)} + G_4(z)e^{4\alpha(z)} + G_3(z)e^{3\alpha(z)} + G_2(z)e^{2\alpha(z)} \equiv 0, \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} G_{10}(z) &= C_1(z)e^{-3p_4(z)}, G_9(z) = C_4(z)e^{-3p_4(z)}, \\ G_8(z) &= C_2(z)e^{-2p_4(z)}, G_7(z) = C_5(z)e^{-2p_4(z)}, \\ G_6(z) &= C_3(z)e^{-p_4(z)} + C_8(z)e^{-2p_4(z)}, G_5(z) = C_6(z)e^{-p_4(z)}, \\ G_4(z) &= C_9(z)e^{-p_4(z)}, G_3(z) = C_7(z), G_2(z) = C_{10}(z). \end{aligned}$$

结合方程(3.20), 我们可以得到, 对任意的 $i = 2, 3, \dots, 10$, 有 $\rho(G_i(z)) < \deg \alpha(z)$ 。根据引理 2.3 和方程(3.20)可得 $G_2(z) = C_{10}(z) = -Q_4(z)e^{\Delta_c \alpha(z)} \equiv 0$, 故 $Q_4(z) \equiv 0$ 。结合方程(3.8), 有

$$\alpha'(z) \equiv \frac{a'(z) - b'(z)}{a(z) - b(z)}.$$

因此, 通过与子情况 2.2 类似的证明方法, 我们可以推出矛盾。

子情况 3.2.5. 设 $\deg(3\beta(z) - \alpha(z)) < \deg \alpha(z)$, 令 $3\beta(z) - \alpha(z) = p_5(z)$, 则 $\alpha(z) = 3\beta(z) - p_5(z)$ 。此时, 方程(3.19)可改写为:

$$\begin{aligned} & J_{10}(z)e^{10\beta(z)} + J_9(z)e^{9\beta(z)} + J_8(z)e^{8\beta(z)} + J_7(z)e^{7\beta(z)} + J_6(z)e^{6\beta(z)} \\ & + J_5(z)e^{5\beta(z)} + J_4(z)e^{4\beta(z)} + J_3(z)e^{3\beta(z)} + J_2(z)e^{2\beta(z)} \equiv 0, \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} J_{10}(z) &= C_3(z)e^{-3p_5(z)}, J_9(z) = C_7(z)e^{-3p_5(z)}, \\ J_8(z) &= C_2(z)e^{-2p_5(z)}, J_7(z) = C_6(z)e^{-2p_5(z)}, \\ J_6(z) &= C_1(z)e^{-p_5(z)} + C_{10}(z)e^{-2p_5(z)}, J_5(z) = C_5(z)e^{-p_5(z)}, \\ J_4(z) &= C_9(z)e^{-p_5(z)}, J_3(z) = C_4(z), J_2(z) = C_8(z). \end{aligned}$$

结合方程(3.20), 我们可以得到, 对任意的 $i = 2, 3, \dots, 10$, 有 $\rho(J_i(z)) < \deg \beta(z)$ 。根据引理 2.3 和方程(3.20)可得 $J_2(z) = C_8(z) = -Q_5(z)e^{\Delta_c \beta(z)} \equiv 0$, 故 $Q_5(z) \equiv 0$ 。结合方程(3.8), 有

$$\beta'(z) \equiv \frac{a'(z) - b'(z)}{a(z) - b(z)}.$$

因此, 通过与子情况 1.2 类似的证明方法, 我们可以推出矛盾。

子情况 3.2.6. 设 $\deg(\alpha(z) - 2\beta(z)) < \deg \alpha(z)$, 令 $\alpha(z) - 2\beta(z) = p_6(z)$, 则 $\alpha(z) = 2\beta(z) + p_6(z)$ 。此时, 方程(3.19)可改写为:

$$K_7(z)e^{7\beta(z)} + K_6(z)e^{6\beta(z)} + K_5(z)e^{5\beta(z)} + K_4(z)e^{4\beta(z)} + K_3(z)e^{3\beta(z)} + K_2(z)e^{2\beta(z)} \equiv 0,$$

其中,

$$\begin{aligned} K_7(z) &= C_3(z)e^{3p_6(z)}, K_6(z) = C_2(z)e^{2p_6(z)} + C_7(z)e^{3p_6(z)}, \\ K_5(z) &= C_1(z)e^{p_6(z)} + C_6(z)e^{2p_6(z)}, K_4(z) = C_5(z)e^{p_6(z)} + C_{10}(z)e^{2p_6(z)}, \\ K_3(z) &= C_4(z) + C_9(z)e^{p_6(z)}, K_2(z) = C_8(z). \end{aligned}$$

结合方程(3.20), 我们可以得到, 对任意的 $i = 2, 3, \dots, 7$, 有 $\rho(K_i(z)) < \deg \beta(z)$ 。根据引理 2.3 和方程(3.20)可得 $K_2(z) = C_{10}(z) = -Q_5(z)e^{\Delta_c \beta(z)} \equiv 0$, 故 $Q_5(z) \equiv 0$ 。结合方程(3.8), 有

$$\beta'(z) \equiv \frac{a'(z) - b'(z)}{a(z) - b(z)}.$$

因此, 通过与子情况 1.2 类似的证明方法, 我们可以推出矛盾。

子情况 3.2.7. 设 $\deg(3\alpha(z) - \beta(z)) < \deg \alpha(z)$, 令 $3\alpha(z) - 2\beta(z) = p_7(z)$, 则 $\beta(z) = \frac{3}{2}\alpha(z) - \frac{1}{2}p_7(z)$ 。此时, 方程(3.19)可改写为:

$$\begin{aligned} &L_{11}\left(\frac{z}{2}\right)e^{\frac{11}{2}\alpha(z)} + L_5(z)e^{5\alpha(z)} + L_9\left(\frac{z}{2}\right)e^{\frac{9}{2}\alpha(z)} + L_4(z)e^{4\alpha(z)} \\ &+ L_7\left(\frac{z}{2}\right)e^{\frac{7}{2}\alpha(z)} + L_3(z)e^{3\alpha(z)} + L_5\left(\frac{z}{2}\right)e^{\frac{5}{2}\alpha(z)} + L_2(z)e^{2\alpha(z)} \equiv 0, \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} L_{11}\left(\frac{z}{2}\right) &= C_1(z)e^{\frac{3}{2}p_7(z)}, L_5(z) = C_2(z)e^{-p_7(z)}, \\ L_9\left(\frac{z}{2}\right) &= C_3(z)e^{\frac{1}{2}p_7(z)} + C_4(z)e^{\frac{3}{2}p_7(z)}, L_4(z) = C_5(z)e^{-p_7(z)}, \\ L_7\left(\frac{z}{2}\right) &= C_6(z)e^{\frac{1}{2}p_7(z)}, L_3(z) = C_7(z) + C_8(z)e^{-p_7(z)}, \\ L_5\left(\frac{z}{2}\right) &= C_9(z)e^{\frac{1}{2}p_7(z)}, L_2(z) = C_{10}(z). \end{aligned}$$

结合方程(3.20), 我们可以得到, 对任意的 $i = 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}$, 有 $\rho(L_i(z)) < \deg \alpha(z)$ 。根据引理 2.3 和方程(3.20)可得 $L_2(z) = C_{10}(z) = -Q_4(z)e^{\Delta_c \alpha(z)} \equiv 0$, 故 $Q_4(z) \equiv 0$ 。结合方程(3.8), 有

$$\alpha'(z) \equiv \frac{a'(z) - b'(z)}{a(z) - b(z)}.$$

因此, 通过与子情况 2.2 类似的证明方法, 我们可以推出矛盾。

子情况 3.2.8. 设 $\deg(3\beta(z) - 2\alpha(z)) < \deg \alpha(z)$, 令 $3\beta(z) - 2\alpha(z) = p_8(z)$, 则 $\alpha(z) = \frac{3}{2}\beta(z) - \frac{1}{2}p_8(z)$ 。此时, 方程(3.19)可改写为:

$$\begin{aligned} &M_{11}\left(\frac{z}{2}\right)e^{\frac{11}{2}\beta(z)} + M_5(z)e^{5\beta(z)} + M_9\left(\frac{z}{2}\right)e^{\frac{9}{2}\beta(z)} + M_4(z)e^{4\beta(z)} \\ &+ M_7\left(\frac{z}{2}\right)e^{\frac{7}{2}\beta(z)} + M_3(z)e^{3\beta(z)} + M_5\left(\frac{z}{2}\right)e^{\frac{5}{2}\beta(z)} + M_2(z)e^{2\beta(z)} \equiv 0, \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
M_{\frac{11}{2}}(z) &= C_3(z)e^{\frac{3}{2}p_8(z)}, M_5(z) = C_2(z)e^{-p_8(z)}, \\
M_{\frac{9}{2}}(z) &= C_1(z)e^{-\frac{1}{2}p_8(z)} + C_7(z)e^{\frac{3}{2}p_8(z)}, M_4(z) = C_6(z)e^{-p_8(z)}, \\
M_{\frac{7}{2}}(z) &= C_5(z)e^{-\frac{1}{2}p_8(z)}, M_3(z) = C_4(z) + C_{10}(z)e^{-p_8(z)}, \\
M_{\frac{5}{2}}(z) &= C_9(z)e^{-\frac{1}{2}p_8(z)}, M_2(z) = C_8(z).
\end{aligned}$$

结合方程(3.20), 我们可以得到, 对任意的 $i = 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}$, 有 $\rho(M_i(z)) < \deg \beta(z)$ 。根据引理 2.3 和方程(3.20)可得 $M_2(z) = C_8(z) = -Q_5(z)e^{\Delta_c \beta(z)} \equiv 0$, 故 $Q_5(z) \equiv 0$ 。结合方程(3.8), 有

$$\beta(z) \equiv \frac{a'(z) - b'(z)}{a(z) - b(z)}.$$

因此, 通过与子情况 1.2 类似的证明方法, 我们可以推出矛盾。至此, 定理 1.1 的证明完成。

4. 结论与讨论

本文研究了一类带有组合算子 $f(z+c)+f(z)+f'(z)$ 的混合差分-微分方程, 利用奈望林纳值分布理论, 在有限阶亚纯解的条件下, 通过 CM 分担条件得到了该方程解的约束关系。我们证明了当亚纯函数 $f(z)$ 分担两个多项式以及极点时, 该方程可以化简为可求解的形式, 并进一步限制了解的结构, 得到了方程存在超越亚纯解的必要条件。

本文定理结论(ii)给出了方程存在亚纯解时, 有理右端项分子、分母多项式次数的约束关系。我们构造一个显式多项式例子来验证该结论: 取 $a(z) \equiv 1, b(z) \equiv 2$, 多项式 $\alpha(z) = z, \beta(z) = 2z$ 。可以验证函数 $f(z) = e^z$ 满足本文对应的混合差分-微分方程, 并且该例子完全满足定理(ii)中关于多项式次数的不等式约束。通过该实例可以直观说明, 我们得到的次数上界是可以达到的, 定理结论具备有效性。

从数学内涵上看, 组合算子 $f(z+c)+f(z)+f'(z)$ 限制了零点、极点的分布, 迫使有理项分子与分母的次数满足严格不等式; 当次数超出该范围时, 原方程不存在超越亚纯解。

对于未来研究方向, 提出以下两点:

1. 本文采用 CM 分担条件进行推导。后续可以在更弱的 IM 分担假设下, 重新讨论该混合差分-微分方程的 Malmquist 型定理, 放宽分担条件, 得到更一般的结论。

2. 本文仅考虑线性组合算子 $f(z+c)+f(z)+f'(z)$ 。我们可以将该算子推广至高阶差分、高阶微分的组合形式, 例如 $f(z+c_1)+f(z+c_2)+f''(z)$, 研究高阶混合差分-微分方程亚纯解的存在性问题。

参考文献

- [1] Chen, S. and Xu, A. (2022) Uniqueness of Derivatives and Shifts of Meromorphic Functions. *Computational Methods and Function Theory*, **22**, 197-205. <https://doi.org/10.1007/s40315-021-00370-z>
- [2] Chen, S. and Xu, A. (2020) Uniqueness on Entire Functions and Their N -Th Order Exact Differences with Two Shared Values. *Open Mathematics*, **18**, 211-215. <https://doi.org/10.1515/math-2020-0022>
- [3] Lo, Y. (1993) Value Distribution Theory. Springer.
- [4] Halburd, R.G. and Korhonen, R.J. (2006) Nevanlinna Theory for the Difference Operator. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, **31**, 463-478.
- [5] Heittokangas, J., Korhonen, R., Laine, I., Rieppo, J. and Zhang, J. (2009) Value Sharing Results for Shifts of

- Meromorphic Functions, and Sufficient Conditions for Periodicity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **355**, 352-363. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.01.053>
- [6] Qi, X.-G. and Yang, L.-Z. (2020) Meromorphic Functions That Share Values with Their Shifts or Their N -Th Order Differences. *Analysis Mathematica*, **46**, 843-865. <https://doi.org/10.1007/s10476-020-0057-3>
- [7] Wang, Z., Qi, X. and Yang, L. (2021) On Shared-Value Properties of $f'(z) = f(z+c)$. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)*, **56**, 245-253. <https://doi.org/10.3103/s1068362321040154>
- [8] Zhang, J. and Liao, L. (2014) Entire Functions Sharing Some Values with Their Difference Operators. *Science China Mathematics*, **57**, 2143-2152. <https://doi.org/10.1007/s11425-014-4848-5>
- [9] Chen, Z. and Yi, H. (2013) On Sharing Values of Meromorphic Functions and Their Differences. *Results in Mathematics*, **63**, 557-565. <https://doi.org/10.1007/s00025-011-0217-7>
- [10] Liu, D., Yang, D. and Fang, M. (2014) Unicity of Entire Functions Concerning Shifts and Difference Operators. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, Article ID: 380910. <https://doi.org/10.1155/2014/380910>
- [11] Li, X., Yi, H. and Kang, C. (2015) Results on Meromorphic Functions Sharing Three Values with Their Difference Operators. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **52**, 1401-1422. <https://doi.org/10.4134/bkms.2015.52.5.1401>
- [12] Cui, N. and Chen, Z. (2016) The Conjecture on Unity of Meromorphic Functions Concerning Their Differences. *Journal of Difference Equations and Applications*, **22**, 1452-1471. <https://doi.org/10.1080/10236198.2016.1201477>
- [13] Lü, F. and Lü, W. (2017) Meromorphic Functions Sharing Three Values with Their Difference Operators. *Computational Methods and Function Theory*, **17**, 395-403. <https://doi.org/10.1007/s40315-016-0188-5>
- [14] Zhen, L. (2019) Meromorphic Functions Sharing Three Polynomials with Their Difference Operators. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)*, **54**, 296-301. <https://doi.org/10.3103/s1068362319050066>
- [15] Qi, X., Li, N. and Yang, L. (2018) Uniqueness of Meromorphic Functions Concerning Their Differences and Solutions of Difference Painlevé Equations. *Computational Methods and Function Theory*, **18**, 567-582. <https://doi.org/10.1007/s40315-018-0241-7>
- [16] 邓炳茂, 曾翠萍, 刘丹, 等. 涉及导数与差分分担值的唯一性问题[J]. 数学学报(中文版), 2019, 62(5): 709-720.
- [17] Wang, M.-H. and Chen, J.-F. (2023) Derivatives of Meromorphic Functions Sharing Polynomials with Their Difference Operators. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)*, **58**, 444-458. <https://doi.org/10.3103/s1068362323060079>
- [18] Chiang, Y. and Feng, S. (2008) On the Nevanlinna Characteristic of $f(z+\eta)$ and Difference Equations in the Complex Plane. *The Ramanujan Journal*, **16**, 105-129. <https://doi.org/10.1007/s11139-007-9101-1>
- [19] Yang, C.C. and Yi, H.X. (2003) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Kluwer.