

Δ -(∇ -)强Hopfian (Co-Hopfian)模与环

王永铎^{1,2}, 姜心妍²

¹甘肃民族师范学院数学科学学院, 甘肃 合作

²兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2026年7月4日; 录用日期: 2026年8月5日; 发布日期: 2026年8月21日

摘 要

作为强Hopfian模、强co-Hopfian模的推广, 本文引入了 Δ -强Hopfian模与 ∇ -强co-Hopfian模, 并研究了其相关性质。实例表明, Δ -强Hopfian模未必是强Hopfian模, ∇ -强co-Hopfian模也未必是强co-Hopfian模。此外, 本文还针对局部投射、局部内射条件下的 Δ -强Hopfian模与 ∇ -强co-Hopfian模作了细致研究。

关键词

强Hopfian (Co-Hopfian)模, Δ -(∇ -)强Hopfian (Co-Hopfian)模

Δ -(∇ -) Strongly Hopfian (Co-Hopfian) Modules and Rings

Yongduo Wang^{1,2}, Xinyan Jiang²

¹College of Mathematical and Sciences, Gansu Minzu Normal University, Hezuo City Gansu

²College of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou City Gansu

Received: July 4, 2026; accepted: August 5, 2026; published: August 21, 2026

Abstract

As generalizations of strongly Hopfian (co-Hopfian) modules, Δ -(∇ -) strongly Hopfian (co Hopfian) modules are introduced and their properties are studied. Examples show that a Δ -strongly Hopfian module need not be a strongly Hopfian module and an ∇ -strongly co-Hopfian module need not be a strongly co-Hopfian module. Moreover, Δ -strongly Hopfian and ∇ -strongly co-Hopfian locally projective or locally injective modules are studied in detail.

Keywords

Strongly Hopfian (Co-Hopfian) Modules, Δ -(∇ -) Strongly Hopfian (Co-Hopfian) Modules

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

借助模的自同态性质开展研究是代数学中的经典课题。例如, 有这样一个著名结论: 诺特模上的满自同态、阿廷模上的单自同态均为自同构。受此启发, 众多学者相继研究了 Hopfian、co-Hopfian 模及其各类推广形式(参见文献[1]-[5])。Hopfian 模与 co-Hopfian 模是一对对偶概念, 分别由 V.A. Hiremath 与 K.Varadarajan 提出, 相关理论可参考文献[6]。若模 M 的任意满同态(单同态)都是自同构, 则称 M 为 Hopfian (co-Hopfian) 模。Hmaimou、Kaidi 与 Campos 在[7]中给出了强 Hopfian 模与强 co-Hopfian 模的定义。设 M 为模, 若对 M 的任意自同态 f , 升链 $\text{Ker} f \subseteq \text{Ker} f^2 \subseteq \cdots \subseteq \text{Ker} f^n \subseteq \cdots$ 最终稳定, 则称 M 为强 Hopfian 模; 若对 M 的任意自同态 f , 降链 $\text{Im} f \supseteq \text{Im} f^2 \supseteq \cdots \supseteq \text{Im} f^n \supseteq \cdots$ 最终稳定, 则称 M 为强 co-Hopfian 模。现有针对强 Hopfian、强 co-Hopfian 模的研究, 均统一考察模上全部自同态的迭代链行为, 围绕该类模的直和分解遗传性、子模与商模封闭性、多项式模扩张、对应环结构等方向形成大量成果。现有研究虽讨论了模与环上 Total 算子的基础封闭规律, 但相关分析均建立在全体自同态的框架之下, 并未针对奇异、余奇异两类特殊自同态子集展开细化讨论。早在上世纪 80 年代, 已有学者建立模的 Total 算子理论, 完整区分出两类核心自同态子集: 奇异自同态集合 $\Delta(M) = \{f \in \text{End}(M) \mid \text{Ker} f \leq_e M\}$ 与余奇异自同态集合 $\nabla(M) = \{f \in \text{End}(M) \mid \text{Im} f \ll M\}$, 并将 Total 算子的研究拓展至整个模范畴, 分析函子作用下 $\Delta(M)$ 与 $\nabla(M)$ 的变换特征。同时有相关研究专门讨论零 Total 模的结构特征, 证明无穷维向量空间、半单模均属于零 Total 模, 而这类模难以用传统强 Hopfian 理论进行有效判定。后续相关研究进一步完善 Total 算子理论, 提出 Toto 模概念搭建模层面 Total 算子基础框架, 针对局部投射、局部内射模开展专项讨论, 得到两类模下 $\Delta(M)$ 与 $\nabla(M)$ 的包含关系: 局部内射模满足 $\nabla(M) \subseteq \Delta(M)$, 局部投射模满足 $\Delta(M) \subseteq \nabla(M)$ 。也有研究工作将 Total 理论延伸至环论层面, 刻画零 Total 环、Total 诱导根的结构, 并分析其在多项式环上的传递规律。同时结合模的置换性质, 讨论奇异自同态对模直和分解结构带来的影响。上述系列工作充分证明: $\text{Tot}(M)$ 与 $\nabla(M)$ 是刻画局部内射、局部投射模的核心双边理想算子, 能够建立自同态子集与模根、总自同态环 $\text{Tot}(M)$ 之间的等价关联。但目前已有成果均未将 Δ , ∇ 子集约束引入强 Hopfian 模的迭代稳定判定框架, 缺少仅限定奇异、余奇异自同态的广义 Hopfian 类模概念, 存在明显研究空白, 也无法覆盖无穷维向量空间、半单模等传统理论难以刻画的模类。针对上述研究缺口, 本文以奇异自同态子集 $\Delta(M)$ 、余奇异自同态子集 $\nabla(M)$ 作为约束范围, 将经典强 Hopfian、强 co-Hopfian 模做自然推广, 引入 Δ -(∇ -)强 Hopfian (co Hopfian) 模的概念, 并系统研究两类广义模的基础性质。实例验证: Δ -强 Hopfian 模不一定是强 Hopfian 模, ∇ -强 co-Hopfian 模也不一定是强 co-Hopfian 模。这说明本文定义的模类覆盖范围更广, 可容纳更多传统理论无法处理的模对象。若无特殊说明, 本文中所有环均为含有单位元的结合环, 所有模均为左么模。设 R 为环, M 为模, $N \leq M$ 表示 N 是 M 的子模, $N \mid M$ 表示 N 是 M 的直和项, $\text{End}(M)$ 表示 M 的自同态环。设 E 是 M 的子模, 若对 M 的任意非零子模 A , 有 $E \cap A \neq 0$, 则称 E 为本质子模, 记为 $E \leq_e M$ 。对偶地, 设 S 是 M 的子模, 若对 M 的任意真子模 T 都有

$M \neq S+T$, 则称 S 为小子模, 记为 $S \ll M$ 。下面给出后续证明所需的引理。

引理 1.1. ([8], 命题 5.20) 设 $K_1 \leq M_1 \leq M$, $K_2 \leq M_2 \leq M$, 且满足 $M = M_1 \oplus M_2$, 则:

- (1) $K_1 \oplus K_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$ 当且仅当 $K_1 \leq_e M_1$ 且 $K_2 \leq_e M_2$;
- (2) $K_1 \oplus K_2 \ll M_1 \oplus M_2$ 当且仅当 $K_1 \ll M_1$ 且 $K_2 \ll M_2$ 。

2. Δ -强 Hopfian 模

本节给出 Δ -强 Hopfian 模的定义, 并研究其基本性质。

定义 2.1. 设 M 为模。若对任意 $f \in \Delta(M)$, 升链 $\text{Ker}f \subseteq \text{Ker}f^2 \subseteq \cdots \subseteq \text{Ker}f^n \subseteq \cdots$ 最终稳定, 则称 M 为 Δ -强 Hopfian 模。

例 2.2. (1) 所有半单模都是 Δ -强 Hopfian 模;

(2) 关于本质子模满足升链条件的模均为 Δ -强 Hopfian 模。

定理 2.3. 设 M 为模, 则下述命题等价:

- (1) M 是 Δ -强 Hopfian 模;
- (2) 对任意 $f \in \Delta(M)$, 存在整数 $n \geq 1$ 使得 $\text{Ker}f^n = \text{Ker}f^{n+1}$;
- (3) 对任意 $f \in \Delta(M)$, 存在整数 $n \geq 1$ 使得 $\text{Im}f^n = 0$ 。

证明: (1) $\Leftrightarrow$ (2) 显然成立。

(2) $\Rightarrow$ (3) 只需证明 $\text{Im}f^n \cap \text{Ker}f^n = 0$ 。已知 $\text{Ker}f^n \leq_e M$, 任取 $x \in \text{Im}f^n \cap \text{Ker}f^n$, 则存在 $y \in M$ 使得 $f^n(y) = x$ 且 $f^n(x) = 0$, 于是 $f^{2n}(y) = f^n(x) = 0$, 即 $y \in \text{Ker}f^n$, 因此 $x = 0$ 。

(3) $\Rightarrow$ (2) 显然成立。

推论 2.4. 设 M 为乘法模。若对任意 $f \in \Delta(M)$, 均存在正整数 n , 使得 $\text{Im}f^n = \text{Im}f^{n+1}$, 则 M 是 Δ -强 Hopfian 模。

证明: 记 $N = \text{Ker}f^n \cap \text{Im}f^n$ 。由于 $\text{Im}f^n$ 是乘法模, 故存在环 R 的理想 I 使得 $N = If^n(M)$, 于是 $0 = f^n(N) = If^{2n}(M) = If^n(M) = N$ 。结合 $\text{Ker}f^n \leq_e M$ 可得 $\text{Im}f^n = 0$ 。由定理 2.3 可知 M 为 Δ -强 Hopfian 模。

命题 2.5. 设 M 为模, $N \leq M$ 。若 M 是 Δ -强 Hopfian 模, 且 N 是 M 的直和项, 则 N 与商模 M/N 均为 Δ -强 Hopfian 模。

证明: 只需证明子模 N 是 Δ -强 Hopfian 模。不妨设 $M = N \oplus L$, 取 $h \in \Delta(N)$, 将其延拓为 M 上的自同态 $f = h \oplus 0$, 其中 0 表示模 L 上的零自同态。由引理 1.1 易知 $f \in \Delta(M)$ 。因 M 是 Δ -强 Hopfian 模, 故存在自然数 n 使得 $\text{Ker}f^n = \text{Ker}f^{n+1}$, 不难验证 $\text{Ker}h^n = \text{Ker}h^{n+1}$, 因此 N 是 Δ -强 Hopfian 模。

定理 2.6. 设 $M = M_1 \oplus M_2$, 且 M_1, M_2 均为 M 的全不变子模。若 M_1, M_2 都是 Δ -强 Hopfian 模, 则 M 也是 Δ -强 Hopfian 模。

证明: 任取 $f \in \Delta(M)$, 由于 M_1, M_2 是全不变子模, 故 f 在 M_1, M_2 上的限制 $f_1 = f|_{M_1}, f_2 = f|_{M_2}$ 分别为 M_1, M_2 的自同态。由 $\text{Ker}f_1 \leq \text{Ker}f \leq_e M, \text{Ker}f_2 \leq \text{Ker}f \leq_e M$, 可得 $\text{Ker}f_1 = \text{Ker}f \cap M_1 \leq_e M_1, \text{Ker}f_2 = \text{Ker}f \cap M_2 \leq_e M_2$, 即 $f_1 \in \Delta(M_1), f_2 \in \Delta(M_2)$ 。因 M_1, M_2 为 Δ -强 Hopfian 模, 故存在整数 $n \geq 1$, 使得 $\text{Ker}f_1^n = \text{Ker}f_1^{n+1}, \text{Ker}f_2^n = \text{Ker}f_2^{n+1}$ 。又因 $f = f_1 \oplus f_2$, 故存在整数 $n \geq 1$, 使得 $\text{Ker}f^n = \text{Ker}f^{n+1}$, 结论得证。

若一个模的自同态环是阿贝尔环, 则称该模为阿贝尔模。

推论 2.7. 设 $M = M_1 \oplus M_2$, 且 M 为阿贝尔模。若 M_1, M_2 均为 Δ -强 Hopfian 模, 则 M 也是 Δ -强 Hopfian 模。

证明: 由于 M 是阿贝尔模, 其所有直和项均为全不变子模。结合定理 2.6, 结论成立。

推论 2.8. 设 $M = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} M_i$, 且每个 M_i 都是 M 的全不变子模。若每一个 M_i 均为 Δ -强 Hopfian 模, 则 M 也是 Δ -强 Hopfian 模。

下面举例说明, Δ -强 Hopfian 模未必是强 Hopfian 模。

例 2.9. 若环 R 是半单阿廷环, 则模 M 为 Hopfian 模当且仅当 M 有有限长度。因此域 F 上的向量空间 V 为 Hopfian 模当且仅当 V 是有限维空间。这样, 无穷维向量空间是 Δ -强 Hopfian 模, 但它不是 Hopfian 模, 从而也不是强 Hopfian 模。

设 M 为模, 多项式模 $M[X]$ 中的元素形如形式和 $a_0 + a_1X + \cdots + a_kX^k$ ($k \geq 0, a_i \in M$), 简记为 $\sum_{i=0}^k a_iX^i$, 约定 $a_0X^0 = a_0$ 。 $M[X]$ 中加法按对应系数相加定义, $R[X]$ -模结构由下式给出:

$$\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i X^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^z a_j X^j \right) = \sum_{u=0}^{k+z} c_u X^u,$$

其中 $c_u = \sum_{i+j=u} \lambda_i a_j$, $\lambda_i \in R$, $a_j \in M$, 详细定义参见。

引理 2.10. ([9], 引理 1.7) 设 $N \leq M$ 。则 N 是 R -模 M 的本质子模当且仅当 $N[X]$ 是 $R[X]$ -模 $M[X]$ 的本质子模。

定理 2.11. 设 M 为 R -模。若 $M[X]$ 作为 $R[X]$ -模是 Δ -强 Hopfian 模, 则 M 作为 R -模也是 Δ -强 Hopfian 模。

证明: 任取 $f \in \Delta(M)$, 定义映射 $f[X]: M[X] \rightarrow M[X]$, 满足 $f[X](\sum m_i X^i) = \sum f(m_i) X^i$, 易知 $f[X]$ 是 $M[X]$ 的自同态。可以验证 $\text{Kerf}[X] = (\text{Kerf})[X]$ 。由 $\text{Kerf} \leq_e M$, 结合引理可知 $\text{Kerf}[X] \leq_e M[X]$, 即 $f[X] \in \Delta(M[X])$ 。因 $M[X]$ 是 Δ -强 Hopfian $R[X]$ -模, 故存在整数 n , 使得 $f[X]^n = f[X]^{n+1}$, 进而推出 $f^n = f^{n+1}$, 证明完毕。

3. ∇ -强 Co-Hopfian 模

定义 3.1. 设 M 为模。若对任意 $f \in \nabla(M)$, 降链 $\text{Im } f \supseteq \text{Im } f^2 \supseteq \cdots \supseteq \text{Im } f^n \supseteq \cdots$ 最终稳定, 则称 M 为 ∇ -强 co-Hopfian 模。

例 3.2. (1) 所有半单模都是 ∇ -强 co-Hopfian 模。

(2) 关于小子模满足降链条件的模均为 ∇ -强 co-Hopfian 模。

注记 3.3. 整数环 Z 上的模 ${}_Z Q$ 的自同态要么是零自同态, 要么是自同构, 因此 ${}_Z Q$ 是 ∇ -强 co-Hopfian 模。但 $\text{Rad}({}_Z Q) = {}_Z Q$, 且该模不满足阿廷模的条件, 即 ${}_Z Q$ 的小子模不满足降链条件。

定理 3.4. 设 M 为模, 则下述命题等价:

- (1) M 是 ∇ -强 co-Hopfian 模;
- (2) 对任意 $f \in \nabla(M)$, 存在整数 $n \geq 1$ 使得 $\text{Im } f^n = \text{Im } f^{n+1}$;
- (3) 对任意 $f \in \nabla(M)$, 存在整数 $n \geq 1$ 使得 $\text{Kerf}^n = M$ 。

证明: (1) $\Leftrightarrow$ (2) 显然成立。

(2) $\Rightarrow$ (3) 只需证明 $\text{Im } f^n + \text{Kerf}^n \supseteq M$ 。已知 $\text{Im } f^n \ll M$, 任取 $x \in M$, 则 $f^n(x) \in \text{Im } f^n = \text{Im } f^{2n}$, 于是存在 $y \in M$ 使得 $f^{2n}(y) = f^n(x)$, 从而得 $f^n(f^n(y) - x) = 0$, 即 $f^n(y) - x \in \text{Kerf}^n$ 。因此 $x = f^n(y) - f^n(f^n(y) - x) \in \text{Im } f^n + \text{Kerf}^n$ 。

(3) $\Rightarrow$ (2) 显然成立。

命题 3.5. 设 M 为模, $N \leq M$ 。若 M 是 ∇ -强 co-Hopfian 模, 且 N 是 M 的直和项, 则 N 与商模 M/N 均为 ∇ -强 co-Hopfian 模。

证明: 只需证明子模 N 是 ∇ -强 co-Hopfian 模。不妨设 $M = N \oplus L$, 取 $h \in \nabla(N)$, 将其延拓为 M 上的自同态 $f = h \oplus 0$, 其中 0 表示模 L 上的零自同态。由引理 1.1 易知 $f \in \nabla(M)$ 。因 M 是 ∇ -强 co-Hopfian 模, 所以存在自然数 n 使得 $\text{Im } f^n = \text{Im } f^{n+1}$ 。不难验证 $\text{Im } h^n = \text{Im } h^{n+1}$, 因此 N 是 ∇ -强 co-Hopfian 模。

定理 3.6. 设 $M = M_1 \oplus M_2$, 且 M_1, M_2 均为 M 的全不变子模。若 M_1, M_2 都是 ∇ -强 co-Hopfian 模, 则 M 也是 ∇ -强 co-Hopfian 模。

证明: 任取 $f \in \nabla(M)$, 由于 M_1, M_2 是全不变子模, 故 f 在 M_1, M_2 上的限制 $f_1 = f|_{M_1}, f_2 = f|_{M_2}$ 分别为 M_1, M_2 的自同态。由 $\text{Im } f_1 \leq \text{Im } f \ll M, \text{Im } f_2 \leq \text{Im } f \ll M$, 结合([10], 19.3)可得 $\text{Im } f_1 \ll M_1, \text{Im } f_2 \ll M_2$, 即 $f_1 \in \nabla(M_1), f_2 \in \nabla(M_2)$ 。因 M_1, M_2 为 ∇ -强 co-Hopfian 模, 故存在整数 $n \geq 1$, 使得 $\text{Im } f_1^n = \text{Im } f_1^{n+1}, \text{Im } f_2^n = \text{Im } f_2^{n+1}$ 。又因 $f = f_1 \oplus f_2$, 故存在整数 $n \geq 1$, 使得 $\text{Im } f^n = \text{Im } f^{n+1}$, 结论得证。

推论 3.7. 设 $M = M_1 \oplus M_2$, 且 M 为阿贝尔模。若 M_1, M_2 均为 ∇ -强 co-Hopfian 模, 则 M 也是 ∇ -强 co-Hopfian 模。

推论 3.8. 设 $M = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} M_i$, 且每个 M_i 都是 M 的全不变子模。若每一个 M_i 均为 ∇ -强 co-Hopfian 模, 则 M 也是 ∇ -强 co-Hopfian 模。

下面举例说明, ∇ -强 co-Hopfian 模未必是强 co-Hopfian 模。

例 3.9. 半单模 M 为弱 co-Hopfian 模当且仅当其每个齐次分量都是有限生成模(参见[11]推论 1, [10])。因此半单模不一定是弱 co-Hopfian 模, 进而也不一定是强 co-Hopfian 模, 但所有半单模都是 ∇ -强 co-Hopfian 模。

例 3.10. 整数环 Z 上的模 ${}_Z Z$ 是 ∇ -强 co-Hopfian 模, 但它不是强 co-Hopfian 模。

4. 局部投射、局部内射的 Δ -强 Hopfian 模与 ∇ -强 Co-Hopfian 模

定义 4.1. ([12]) 设 V 为模。若对 V 的任意非本质子模 A , 都存在 V 的非零内射子模 Q 满足 $A \cap Q = 0$, 则称 V 为局部内射模。设 W 为模。若对 W 的任意非小子模 B , 都存在 W 的非零投射直和项 P 满足 $P \leq B$, 则称 W 为局部投射模。

引理 4.2. ([12], p. 43, 推论 2.4)

- (1) 若 V 是局部内射模, 则 $\nabla(V) \subseteq \Delta(V)$;
- (2) 若 W 是局部投射模, 则 $\Delta(W) \subseteq \nabla(W)$ 。

参照文献([7], 定理 3.2), 可得如下推论:

推论 4.3. 设 M 为模, 则有:

- (1) 若 M 是局部投射的 ∇ -强 co-Hopfian 模, 则 M 是 Δ -强 Hopfian 模;
- (2) 若 M 是局部内射的 Δ -强 Hopfian 模, 则 M 是 ∇ -强 co-Hopfian 模。

定义 4.4. 设 R 为环。若左正则模 ${}_R R$ 是 Δ -强 Hopfian 模(∇ -强 co-Hopfian 模), 则称 R 为左 Δ -强 Hopfian 环(左 ∇ -强 co-Hopfian 环)。

命题 4.5. 每一个半完全的 ∇ -强 co-Hopfian 环都是 Δ -强 Hopfian 环。

证明: 半完全投射模均为局部投射模, 结合推论 4.3 即可证得。

命题 4.6. 环 R 为左 Δ -强 Hopfian 环当且仅当对任意 $r \in R$, 若 r 的左零化子满足 $l(r) \leq_e R$, 则存在自然数 n 使得 $r^n = 0$ 。

证明: 由定理 2.2 可直接推出。

下述结果是 Mewborn-Winton 定理在交换情形下的结论。

推论 4.7. 若交换环 R 关于左零化子满足升链条件, 则 $Z(R)$ 是幂零的。

推论 4.8. 设 R 为左 Δ -强 Hopfian 环, 则 $Z(R) \subseteq J(R)$ 。

证明: 结合([1], 推论 15.10)与命题 4.6, 结论显然成立。

推论 4.9. 设 R 为连续诺特环, 则 R 的 Jacobson 根中任意元素均为幂零元。

证明: 因为 R 为连续环, 所以 $J(R) = \{r \in R \mid l(r) \leq_e R\}$ 。又因诺特环必为左 Δ -强 Hopfian 环, 结合命题 4.6 即得结论。

命题 4.10. 环 R 为左 ∇ -强 co-Hopfian 环当且仅当对任意 $r \in R$, 若主左理想 $Rr \ll R$, 则存在自然数 n 使得 $r^n = 0$ 。

证明: 由定理 3.2 可直接推出。

由于 $J({}_R R) = \{r \in R \mid RrR \subseteq J({}_R R)\}$, ∇ -强 co-Hopfian 环的 Jacobson 根中任意元素都是幂零元。又因任意阿廷环均为 ∇ -强 co-Hopfian 环, 于是可得下述推论。

推论 4.11. 设 R 为左阿廷环, 则其 Jacobson 根满足 $J(R) = \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists r^n = 0\}$ 。

推论 4.12. 设 R 为交换 ∇ -强 co-Hopfian 环, 则多项式环 $R[x]$ 也是 ∇ -强 co-Hopfian 环。

证明: 只需证明 $R[x]$ 的 Jacobson 根中所有元素均为幂零元。已知 $J(R[x]) = J(R)[x]$, 且多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 为幂零元当且仅当系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 均为幂零元, 结合命题 4.10 即可证得结论。

参考文献

- [1] Ghorbani, A. and Haghany, A. (2002) Generalized Hopfian Modules. *Journal of Algebra*, **255**, 324-341. [https://doi.org/10.1016/s0021-8693\(02\)00124-2](https://doi.org/10.1016/s0021-8693(02)00124-2)
- [2] Mohamed, S.H. and Müller, B.J. (1990) Continuous and Discrete Modules. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511600692>
- [3] Varadarajan, K. (1997) Properties of Endomorphism Rings. *Acta Mathematica Hungarica*, **74**, 83-92. <https://doi.org/10.1007/bf02697878>
- [4] Xue, W. (1995) Hopfian Modules and Co-Hopfian Modules. *Communications in Algebra*, **23**, 1219-1229. <https://doi.org/10.1080/00927879508825275>
- [5] Idelhadj, A. and Kaidi, A. (2023) A Characterization of Semi-Artinian Rings. In: Cahen, P.J., Costa, D.L., Fontana, M. and Kabbaj, S.E., Eds., *Commutative Ring Theory*, CRC Press, 171-179. <https://doi.org/10.1201/9781003421917-17>
- [6] Varadarajan, K. (1992) Hopfian and Co-Hopfian Objects. *Publicacions Matemàtiques*, **36**, 293-317. https://doi.org/10.5565/publmat_36192_21
- [7] Hmaimou, A., Kaidi, A. and Sánchez Campos, E. (2007) Generalized Fitting Modules and Rings. *Journal of Algebra*, **308**, 199-214. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.07.010>
- [8] Anderson, F.W. and Fuller, K.R. (1974) Rings and Categories of Modules. Springer.
- [9] Varadarajan, K. (1982) On a Theorem of Shock. *Communications in Algebra*, **10**, 2205-2222. <https://doi.org/10.1080/00927878208822830>
- [10] Wisbauer, R. (1991) Foundations of Module and Ring Theory. Gordon and Breach.
- [11] Haghany, A. and Vedadi, M.R. (2001) Modules Whose Injective Endomorphisms Are Essential. *Journal of Algebra*, **243**, 765-779. <https://doi.org/10.1006/jabr.2001.8851>
- [12] Kasch, F. and Mader, A. (2004) Rings, Modules and the Total. Birkhauser Verlag.