

利用AI大模型研究直角三角形中量的关系的案例

浮雪怡

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2026年7月6日; 录用日期: 2026年8月5日; 发布日期: 2026年8月17日

摘要

在人工智能重塑知识生产范式的背景下, 本研究聚焦于数学教育中关系推理能力的培养, 以直角三角形为载体, 探究AI大模型对几何量关系网络的认知边界。针对现有研究多局限于公式验证而忽视系统性关系推理的现状, 本文基于构建的四层认知水平模型, 设计多阶段实验任务, 以DeepSeek-R1模型为测试对象, 系统评估其对边、角、高、面积等量关系的识别、推导与迁移能力。明确了当前AI在数学关系推理中的能力边界, 更凸显了人类教师在几何本质引导与高阶思维培养中的不可替代性。这一发现为评估AI在数学关系推理中的认知边界提供了实证依据, 也为后续相关研究提供了方法参照。

关键词

直角三角形, 人工智能, 关系推理, 人机协同

A Case Study on the Relationship among Quantities in Right Triangles Using an AI Large Language Model

Xueyi Fu

College of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: July 6, 2026; accepted: August 5, 2026; published: August 17, 2026

Abstract

Against the backdrop of artificial intelligence reshaping the paradigm of knowledge production, this study focuses on the cultivation of relational reasoning ability in mathematics education. Taking the right triangle as the research vehicle, it explores the cognitive boundaries of AI large language

models in understanding networks of geometric quantitative relationships. In response to the current state of research, which largely confines itself to formula verification while neglecting systematic relational reasoning, this paper constructs a four-level cognitive model and designs multi-stage experimental tasks. Using the DeepSeek-R1 model as the test subject, it systematically evaluates its abilities in identifying, deriving, and transferring relationships among sides, angles, altitude, and area. The study delineates the current capacity boundaries of AI in mathematical relational reasoning. This finding provides empirical evidence for assessing the structural competence of AI in geometric quantitative cognition and offers a methodological reference for subsequent related research.

Keywords

Right Triangle, Artificial Intelligence, Relational Reasoning, Human-AI Collaboration

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在信息时代,人工智能大模型正在深刻重塑知识的生产与传播方式,尤其在数学教育领域,其对“量的关系”的识别与推理能力,为理解几何规律提供了新视角。直角三角形作为平面几何的核心载体,其内部量的关系是中学生形成“关系推理”高阶思维的关键内容。当前 AI 大模型在数学推理中的应用研究多聚焦于公式计算或单一定理验证,而对“直角三角形量的关系网络”的系统识别能力,以及其与人类认知层次的适配性仍需探讨。基于此,本文以直角三角形的量的关系为研究对象,选取 DeepSeek-R1 模型,通过设计实验,测试其对量关系的识别、推导与迁移能力,分析 AI 表现与学生认知规律的契合点与差异,最终构建融合 AI 工具的勾股定理大单元教学范式,为培养学生的关系推理能力提供实践参考。

2. 关系推理:信息时代不可或缺的高阶思维

2.1. 信息时代对关系推理能力的挑战

我们身处人工智能与大数据驱动的信息爆炸时代,海量碎片化信息有待被有效关联与整合。在信息交流中识别有意义模式的能力是进行“更高”或“更深”思考的核心。这种能力被称为关系推理,即辨别无关联信息中有意义模式的能力,被认为是人类学习和认知的核心,在当今信息时代尤为重要,已经成为 21 世纪人才的核心素养。这种在海量信息中感知模式并将高阶关系概念性的映射到这些感知上的能力是高阶思维的先决条件。同时,这种能力不仅关乎跨学科知识迁移与创新性解决问题,更是抵御信息茧房、构建系统性认知框架的关键,其本身就是一种高阶思维。高阶思维的内涵基于布鲁姆教育目标分类学中的高级认知层次,涵盖了理解、应用、分析、评估及创造等不同维度。具体而言,高阶思维不仅限于对数学概念的记忆与再现,它还要求学生具备跨领域的推理能力和解决问题的综合能力[1]。

数学作为研究“数量关系与空间形式”的学科,其本质正是对模式识别与关系建构的深度探索。在数字信息时代,记忆性和检索性的工作能够被信息技术所承担,这减轻了人类知识记忆的负重[2],如今我们更需要辨别、分析、论证、推断、处理、加工信息,开展创造性研究并解决问题。而这些都属于高阶思维能力的重要组成部分,培养学生的高阶思维是时代发展的必然要求,学校的目标不再只是简单的传递信息,而是根据时代发展需求培养能够解决复杂问题的新时代人才。如何培养学生从表层事实中看到

隐藏逻辑链，实现从“知识存储”向“关系洞察”的思维跃迁，成为数学教育改革的焦点。

2.2. 数学学科中的关系推理

数学的本质并非静态的知识堆积，而是对模式与关系的动态探索。数量关系是数学教与学的核心内容之一，在对关系的关注、概括和表达的过程中必然涉及关系思维[3]。“理解数学”也并非指记住公式或计算结果，而是能够洞察数量与形式之间如何相互联结、转化与制约。这种洞见能力——关系推理，构成了数学思维真正的引擎。

数学关系推理常以四种形态呈现：在类比中迁移结构，在对比中厘清边界，在归类中提炼共性，最终在系统整合中构建知识宇宙。当前教学往往止步于浅层关系认知，却未能引导学生自主发现数学量之间的关系，教师教会了学生知识点，却未教会学生如何与知识“对话”。教师需要引导学生像数学家一样思考，见证数学知识的交汇贯通。

3. 数学中量关系的认知层次

理解量的关系是数学思维的核心，对数学对象(如直角三角形中的边、角、高、面积、投影)之间量关系的识别、理解、表达、推理和应用能力是衡量数学素养的关键指标。学生对数学量的关系的理解并非一蹴而就，而是从“是什么”到明白“为什么”进而灵活运用的渐进过程。

构建一个描述这种理解深度的理论模型，不仅有助于剖析学习者内在的思维过程，也为客观评估 AI 模型的认知水平提供标尺。SOLO 理论是教育心理学教授比格斯总结的一种以等级描述为特征“可观察的学习成果结构”的质性评价方法。这种理论把学生思维由低到高分前结构、单点结构、多点结构、关联结构和抽象拓展结构五个层次[4]。因此在 SOLO 分类理论以及建构主义理论的基础上，我们可以在此将数学中量关系的认知划分为以下四个水平。

第一水平：识别与记忆。在此层面，认知活动主要集中于对基本数学对象及其关系表述的初步确认与存储。如识别直角三角形构成要素，并记忆核心定理或公式的标准表述。这一层次核心在于掌握“是什么”的陈述性知识，但尚未触及关系的内在逻辑或生成原理，理解停留于符号与语言的表层。

第二水平：操作与计算。在此层面，焦点转向了在既定规则 and 标准情境下的程序性应用。学习者能够熟练运用记忆中的公式进行数值计算，并在相对直接或略有变化的情境问题中应用规则获得答案。体现了“怎么做”的能力，但对操作依赖性较强，对支撑这些计算的关系本质及其成立条件的深层理解不足，迁移能力有限。

第三水平：关系理解与解释。达到此水平，标志着认知的深化。此阶段的核心追求是洞悉“为什么”。学习者致力于探索量关系的内在逻辑、几何意义及其相互关联。这包括理解定理推导过程与证明依据，阐释公式中各个量的具体几何指代及其在图示中的位置关联。更重要的是，学习者开始主动构建不同量关系之间的联系网络。这意味着学习者穿透了公式符号的表象，把握了关系成立的必然性以及几何或代数本质。

第四水平：应用、推理与再创造。这是认知阶梯的最高层，对量的关系理解已经内化为一个融会贯通的、动态的知识体系。学习者能够在陌生复杂的情境中，敏锐识别适用的量关系模型，并灵活综合运用多个关系进行有效的问题解决。同时能够基于已知关系进行严谨的逻辑推理以发现新的模式与结论。

综上，这四层认知水平模型系统描绘了数学量关系理解能力从表层识别到本质洞察再到创新运用的渐进发展路径。它为实证研究——评估 AI 大模型在识别、分析与推理直角三角形中的勾股定理、射影定理等核心量关系时所达到的实际认知层次——提供评估依据。

同时在本研究中，“几何直观”也是评估 AI 推理表现的关键观测维度。几何直观是一种能力，是学

习者借助于图形的形象关系对空间形式和数量关系进行感知、理解、把握和推理的能力[5]。

“几何直观”主要是指运用图表描述和分析问题的意识与习惯[6]。在本文中几何直观被操作化定义为认知主体主动将符号化的数学关系与图形结构进行双向映射的能力，具体包含两个层面：其一，能从图形中识别关键元素(高、中线、相似三角形、射影线段等)及其位置关系；其二，能利用图形结构对代数结论或公式给出直观意义上的解释。在本实验中，对 AI 是否调用几何直观的判定依据以下三项指标：(1) 是否主动提及图形中的辅助元素及其位置关系；(2) 是否在导出代数式后尝试用图形关系加以解释；(3) 是否从多个图形位置关联地审视同一几何量。满足任意两项即为“展现了可识别的几何直观”。

4. AI 大模型对直角三角形中量关系的识别实验与分析

4.1. 实验设计与方法

依据前面构建的四层认知水平模型，设计多维度测试任务。在模型选择与实验执行方面，本文选定 DeepSeek-R1 版本作为测试对象，采用统一的标准化提示语，并重复进行三次实验，结果显示输出内容具有高度一致性，确保了实验结果的稳定性。该实验各问题所对应的认知水平评估目标如表 1 所示：

Table 1. Cognitive level assessment objectives

表 1. 认知水平评估目标

编号	核心内容	主要评估认知水平
问题一	用直角边表示高，导出高与角度的关系，建立投影与角度的三角函数关系	水平 1 (识别与记忆)、水平 2 (操作与计算)、水平 3 (关系理解与解释)
问题二	分析高与两投影线段的关系，推导直角边的不等式约束并解释几何意义	水平 3 (关系理解与解释)、水平 4 (应用、推理与再创造)
问题三	探索面积与周长之间的深层关系	水平 4 (应用、推理与再创造)
问题四	固定斜边，分析 h 、 S 、 C 随 θ 变化的函数图像特征与极值	水平 3 (关系理解与解释)、水平 4 (应用、推理与再创造)

具体测试题目如下：

例：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = c$ ， $AC = b$ ， $BC = a$ 。斜边上的高 $CD = h$ ，垂足 D 分斜边为 $AD = p$ ， $DB = q$ (即 $p + q = c$)。设 $\angle BAC = \theta$ ，周长为 C ，面积为 S 。

(1) 用 a 、 b 表示 h ，并导出 h 与 θ 的关系式。同时建立 p 、 q 、 θ 的三角函数关系。

问题一设计意图是考察 AI 大模型对边、角、高之间的动态关联的认识，对应识别记忆、操作计算与关系理解三个水平。

(2) 分析 h 、 p 、 q 之间的数量关系，同时结合这个几何模型，尝试推导出 h 关于 a 、 b 的某种不等关系，并解释这种关系背后的几何意义。

问题二设计意图是边与高的不等式约束，通过一个具体的几何场景，引导 AI 完成从基础几何关系推导到深层数学规律发现的完整思维过程，以此检验其对几何与代数内在逻辑关联能力和自主推理能力。对应关系理解与推理两个认知水平。

(3) 试通过关系推理进一步探索其面积与周长之间的关系。

问题三设计意图是引导 AI 以基础几何量为纽带，将分散的数学概念串联成逻辑闭环，检验其能否从定义出发一步步发现不同几何量之间的深层约束关系，而非简单复述或套用现成结论。对应应用、推理

与再创造认知水平。

为进一步考察 AI 在更丰富情境中的关系推理能力，在上述三个任务的基础上，增设补充任务。

(4) 若保持斜边 c 不变，让 θ 从 0° 到 90° 连续变化，试描述 h 、 S 、 C 随 θ 变化的函数图像特征，并指出各量的极值点及其几何含义。

问题四设计意图是考察 AI 能否将直角三角形中静态的量关系转化为动态的函数关系，并用图像语言加以表达，对应第三水平(关系理解与解释)与第四水平(应用、推理与再创造)的交叉区域。

4.2. 实验结果与分析

DeepSeek 对三个问题的反馈如下：

(1) 首先给出了详细思考过程，以下是解题过程：

三角形面积可以表示为 $S = \frac{1}{2}ab$ 或 $S = \frac{1}{2}ch$ 。因此有：

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch \Rightarrow h = \frac{ab}{c}$$

其中 c 为斜边，由勾股定理可得，

$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

导出 h 与 θ 的关系式。在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = \theta$ ，故：

$\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$ ， $\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$ ，因此 $a = c \sin \theta$ ， $b = c \cos \theta$ ，代入 h 表达式：

$$h = \frac{ab}{c} = c \sin \theta \cos \theta = \frac{c}{2} \sin 2\theta$$

建立 p 、 q 、 θ 的三角函数关系：

考虑 $\triangle ACD$ ($\angle ADC = 90^\circ$)， $\angle CAD = \theta$ (与 $\angle BAC$ 相同)，斜边 $AC = b$ ， $AD = p$ ($\angle CAD$ 的邻边)，因此：

$$\cos \theta = \frac{AD}{AC} = \frac{p}{b} \Rightarrow p = b \cos \theta$$

考虑 $\triangle BCD$ ($\angle BCD = 90^\circ$)， $\angle CBD = 90^\circ - \theta$ ，斜边 $BC = a$ ， $DB = q$ ($\angle CBD$ 的邻边)，因此：

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta = \frac{DB}{BC} = \frac{q}{a} \Rightarrow q = a \sin \theta$$

最终结果： $h = \frac{c}{2} \sin 2\theta$ ， $p = b \cos \theta$ ， $q = a \sin \theta$ 。

在这个过程中 AI 模型能够回忆并识别关键几何和三角形知识，所表现出的识别记忆能力较强，同时操作计算过程清晰流畅无误，但侧重于机械执行而非探索，在关系理解上能够联结不同概念，但未能深入探讨深层几何内涵(如未提及相似三角形，导出额外关系 $h^2 = p \cdot q$)，理解停留在“如何计算”层面，而非“为什么成立”。在几何直观的三项观测指标上，模型主动提及了高 CD 、斜边 AB 及角度 θ 的位置关系，但未对 $h = \frac{c}{2} \sin 2\theta$ 的表达式给出图形意义上的解释，也未从多个图形位置关联地审视 h ，缺乏对几何本质的直观阐释。

(2) 首先给出了详细思考过程，以下是解题过程：

分析 h 、 p 、 q 之间的数量关系：

在 $\triangle ABC$ 中 $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = c$ 为斜边， $AC = b$ ， $BC = a$ 。斜边上的高 $CD = h$ ，垂足 D 分斜边 AB 为 $AD = p$ 和 $DB = q$ ，且 $p + q = c$ 。 $\angle BAC = \theta$ 。

由几何性质和三角函数关系，可以推导出 h 、 p 、 q 之间的关键数量关系：

$$h^2 = p \cdot q$$

这一关系表明，斜边上的高 h 是 p 和 q 的几何平均数。

结合几何模型考虑 a 和 b 的关系。由上述关系可推导出以下不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ，等号成立当且仅当 $a = b$ 。

证明：

由 $h^2 = p \cdot q$ 和 $p + q = c$ ，应用算术 - 几何平均不等式：

$$\frac{p+q}{2} \geq \sqrt{pq}$$

代入 $h^2 = p \cdot q$ 和 $p + q = c$ 得：

$$\frac{c}{2} \geq h$$

将 $h = \frac{ab}{c}$ 和 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 代入上式，再两边乘以 $\sqrt{a^2 + b^2}$ ，可得：

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$$

即：

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

等号成立的条件：当 $a = b$ 时，三角形为等腰直角三角形 ($\theta = 45^\circ$)。

此时 $p = q$ ， $h = \frac{c}{2}$ 。

几何意义：在直角三角形中，两条直角边的平方和始终大于或等于它们乘积的两倍。等号成立时为等腰直角三角形。对于固定斜边 c ，当直角边 a 和 b 相等时，三角形面积最大，高也最大。不等式量化了直角边不等时面积的减少： a 、 b 差异越大， ab 越小(相对 c^2)，面积越小。

在这个过程中 AI 模型能够从基本几何事实出发，推导出 a 、 b 的不等关系，但整体过程偏向代数化，在几何直观的三项观测指标上，模型能够推导出 $h^2 = p \cdot q$ ，但未将 $\frac{p+q}{2}$ 识别为斜边上的中线并用图形关系解释 $\frac{c}{2} \geq h$ 这一不等关系的几何必然性，也未联系射影定理对 $h^2 = p \cdot q$ 给出几何本源的解释，缺乏几何直观。

(3) 首先给出了详细思考过程，以下是解题过程：

面积与边长的关系：

$$S = \frac{1}{2}ab$$

同时面积也可以用斜边和高表示，进而 $h = \frac{2S}{c}$ 。

高与线段的关系：

根据射影定理 $h^2 = p \cdot q$ ，结合 $h = \frac{2S}{c}$ ，可得 $pq = \frac{4S^2}{c^2}$ 。

周长与边长的关系:

周长 $C = a + b + c$ ，由勾股定理与面积公式可得 $C = a + b + c = \sqrt{c^2 + 4S} + c$ 。

面积与周长的显式关系:

由 $C = c + \sqrt{c^2 + 4S}$ ，可解出 S :

$$4S = C^2 - 2Cc$$

分析与讨论:

上述关系表明，面积 S 和周长 C 通过斜边 c 相联系。当斜边 c 固定时， C 随 S 增大而增大；当周长 C 固定时，面积 S 在等腰直角三角形时达到最大值。

在整个解答过程中，AI 模型能够将面积、周长、斜边、高等概念串联起来，但整个推导过程是机械的，在几何直观的各项观测指标上，模型仅在问题(3)中提及了射影定理，但未能基于图形直观解释面积与周长关系的几何意义，也未将面积 S 与周长 C 的约束关系与图形变化(如 θ 变化时面积与周长的联动)进行关联性审视，判定为几何直观表现不充分。在推理的深度、创造性方面存在局限。AI 能够推导关系，但是只能停留在公式层面，难以生成“元认知”。AI 无法进行真正的再创造，只能组合已有概念，但人类教师会在教学过程中发明新问题，比如“如果 θ 变化， S 和 C 如何变化？”“能否将直角三角形中量关系的变化推广到一般的三角形中？”

(4) 首先给出了详细思考过程，以下是解题过程:

由问题 1 中的结果 $h = \frac{c}{2} \sin 2\theta$ ，结合 $a = c \sin \theta$ 、 $b = c \cos \theta$ ，可得:

面积:

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{c^2}{4} \sin 2\theta$$

周长:

$$C = a + b + c = c(\sin \theta + \cos \theta + 1)$$

令 $\frac{dh}{d\theta} = c \cos 2\theta = 0$ ，得 $\theta = 45^\circ$ 时 h 取最大值 $h_{\max} = \frac{c}{2}$ ；同理 S 也在 $\theta = 45^\circ$ 时取最大值 $S_{\max} = \frac{c^2}{4}$ 。对

于周长 C ，求导 $\frac{dC}{d\theta} = c(\cos \theta - \sin \theta)$ ，令其为零，同样得到 $\theta = 45^\circ$ 时 C 取最大值 $C_{\max} = c(\sqrt{2} + 1)$ 。模型指出当 $\theta \rightarrow 0^\circ$ 或 $\theta \rightarrow 90^\circ$ 时，三角形退化， h 、 S 、 C 均趋近于 0 或最小值。

在整个解答过程中，模型能够正确推导出 h 、 S 、 C 关于 θ 的函数表达式，并通过求导准确找到极值点。但在“描述函数图像特征”这一核心要求上，模型仅给出了各量的最大值点和端点值，未主动描述函数图像的整体变化趋势——例如，未指出 h 和 S 在 $(0^\circ, 45^\circ)$ 上单调递增、在 $(45^\circ, 90^\circ)$ 上单调递减，也未描述 C 在 $(0^\circ, 45^\circ)$ 递增、 $(45^\circ, 90^\circ)$ 递减的对称特征。在几何直观的各项观测指标上，模型未能将“ $\theta = 45^\circ$ 时取最大值”这一代数结论与图形的动态变化进行关联性解释，也未主动提及函数图像的形态特征。该任务中模型展示了较强的代数求导与极值计算能力(对应第二水平)，但图像表征与几何解释能力明显不足。

基于以上的实验，AI 模型对直角三角形中量关系的认识大部分停留在第二水平，AI 模型具有强大的操作与计算水平，这是其优势所在。对于第三水平关系理解与解释，在解决代数推理问题时表现较为良好，但是对于几何问题缺少直观性，AI 更加擅长进行代数推理。最后对于第四水平应用、推理与再创造，显然在这个案例中 AI 只能依赖符号进行推理，并不具备发现再创造的能力，只能处理“如何”，很难解释清楚“为何”和假设“如果”。同时补充任务也进一步验证了上述结论：AI 在函数极值计算上表现准确，但在图像整体特征的描述与几何意义的解释上存在明显欠缺。

5. 研究发现

上述实验揭示了 AI 大模型在直角三角形量关系认知中的能力分布特征：在操作与计算层面表现稳定且高效，但在关系理解与解释层面缺乏几何直观的自主建构，在应用、推理与再创造层面则未能展现主动发现与创造性迁移的迹象。这一能力分布特征并非仅具有技术评估价值，它同时为数学教育研究中关于“认知层次的生成条件”与“人机认知差异”提供了参照性的经验证据。

实验中最具辨识度的现象是：AI 在三个问题中均采用代数化路径完成推导，即使在问题(2)和问题(3)中，也始终未主动调用几何直观(如将 $\frac{p+q}{2}$ 识别为中线长度并据此给出几何解释)。这一现象反向衬托出几何直观在数学认知中的不可替代功能——它不仅是一种解题技巧，更是一种认知透镜，能够将符号关系转化为可感知的空间结构，从而揭示代数操作难以自然呈现的约束关系。这一发现提示研究者重新审视几何直观的理论定位：它是否只是“辅助理解的工具”，还是构成数学关系理解本身的必要维度？实验表明，缺乏几何直观的认知主体在达到关系理解与解释的第三水平时存在系统性障碍。这为几何教学目标的定位提供了实证层面的参照。

同时，从 AI 的失败案例中可以反向提炼出一个关键问题：为什么某些关系(如射影定理)在逻辑上可由已知前提推出，但 AI 未能主动生成？这一现象表明，关系的可推导性并不等同于关系的可激活性——前者是逻辑空间的属性，后者是认知主体的属性。这一区分对数学教育研究具有理论含义：学生在解题中“明明学过却想不到”的困境，或许不能简单归因为知识储备不足，而应被视为关系激活机制的失效。

6. 结论

本文通过系统评估 AI 大模型(以 DeepSeek-R1 为例)在识别、推导直角三角形中量关系网络时所表现出的认知层次，揭示了其强大的符号操作与公式计算的能力及在推理能力上的潜力，但同时也凸显了其在几何直观、本质洞察以及探索再创造方面的局限，揭示了两个具有理论意义的现象。其一，关系在逻辑上的可推导性并不等同于认知主体在实际思考中的可激活性——AI 能分别推出相关关系却未主动联立导出射影定理，说明“能推出”与“能想到”是两种不同性质的认知属性。其二，AI 始终依赖代数化路径而规避几何直观，反向确证了几何直观在数学关系理解中不仅是辅助工具，更是实现深层理解的必要维度。通过案例分析界定了当前 AI 大模型在几何量关系认知中的能力边界，也为后续研究提出了具体方向：何种认知条件或交互机制能够促发关系的主动激活？如何在人机协同中弥补几何直观的缺失？这些问题有待进一步探索。

参考文献

- [1] 李祥辉. 初中数学教学中学生高阶思维的培养策略探究[J]. 数理天地(初中版), 2025(11): 164-166.
- [2] 王祖浩, 田艳. 数字信息时代高阶思维能力: 要素、关系、测评及培养[J]. 教育科学研究, 2024(2): 5-12.
- [3] 薛春波. 小学数学学习中儿童的关系思维及其表现[J]. 教学与管理, 2024(26): 42-45.
- [4] 比格斯, 科利斯. 学习质量评价: SOLO 分类理论(可观察的学习成果结构) [M]. 高凌飏, 张洪岩, 译. 北京: 人民教育出版社, 2010: 29.
- [5] 唐平, 付天贵. 义务教育阶段几何直观分析框架[J]. 教学与管理, 2016(30): 83-85.
- [6] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版) [S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.