

乘积复射影空间上Poincaré常数与对数Sobolev上界的显式计算与尺度优化

刘学利

重庆理工大学数学科学学院, 重庆

收稿日期: 2026年7月6日; 录用日期: 2026年8月7日; 发布日期: 2026年8月21日

摘要

本文研究缩放乘积复射影空间 (M, g_a) 上的Poincaré常数与对数Sobolev常数。以凯勒Bochner-Beckner不等式、复射影空间显式谱及熵张量化为工具, 计算Ricci下界和第一非零特征值, 证明凯勒Bochner-Poincaré估计给出的常数上界在整个尺度族上均达到等号; 构造保留各因子信息的对数Sobolev张量化上界, 并证明其严格优于整体Ricci上界。进一步, 在固定体积下求得该上界的唯一极小尺度及体积保持扰动的尖点行为, 并通过四类模型给出比例与渐近结果。

关键词

Bochner公式, 对数Sobolev不等式, 复射影空间, 张量化, 尺度优化

Explicit Computation and Scale Optimization of the Poincaré Constant and Logarithmic Sobolev Upper Bounds on Products of Complex Projective Spaces

Xueli Liu

School of Mathematical Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: July 6, 2026; accepted: August 7, 2026; published: August 21, 2026

Abstract

This paper investigates the Poincaré constant and the logarithmic Sobolev constant on the scaled

product of complex projective spaces (M, g_a) . Using the Kähler Bochner-Beckner inequality, the explicit spectrum of complex projective spaces, and entropy tensorization, we compute the Ricci curvature lower bound and the first nonzero eigenvalue, and prove that the upper bound for the Poincaré constant obtained by the Bochner method is attained sharply throughout the entire family of scaled metrics. We further construct a tensorized upper bound for the logarithmic Sobolev constant that preserves the geometric information of each factor and prove that it is strictly sharper than the upper bound derived from the global Ricci curvature lower bound. Moreover, under a fixed-volume constraint, we determine the unique scale minimizing this upper bound and analyze its cusp-type behavior under volume-preserving perturbations. Finally, ratio comparisons and asymptotic results are obtained for four classes of model spaces.

Keywords

Bochner Formula, Logarithmic Sobolev Inequality, Complex Projective Spaces, Tensorization, Scale Optimization

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Bochner 公式把函数的 Hessian、Laplacian 与 Ricci 曲率联系起来, 是由曲率条件推导谱估计和泛函不等式的基本工具。Gross 在适当的对称 Markov 半群框架下建立了对数 Sobolev 不等式与超收缩性之间的联系[1], Beckner 在球面上获得了尖锐的 Sobolev-Beckner 型不等式[2], 关于半群方法、曲率 - 维数方法及其与泛函不等式之间的联系可参见文献[3][4]。在凯勒情形, 分别利用复 Hessian 的纯型(2, 0)分量和混合型(1, 1)分量及其共轭, 从而获得比仅使用实 Hessian 迹估计更精细的 Bochner 型估计。Baudoin-Munteanu 利用凯勒结构、复 Hessian 估计与热流方法, 建立了正 Ricci 曲率紧致凯勒流形上的改进 Beckner-Sobolev 不等式[5]。

对于乘积流形及更一般的乘积概率空间, 就泛函不等式常数的估计而言, 可以区分整体几何估计与逐因子张量化估计两种思路。整体方法将乘积空间视为一个统一的黎曼流形, 利用乘积流形的总维数和统一 Ricci 曲率下界, 直接应用相应的 Bochner-Beckner 估计。这种方法形式简洁、适用范围较广, 但乘积空间的统一 Ricci 下界通常由曲率最弱的因子决定, 而总维数又同时包含所有因子的维数。因此, 当各因子的维数、曲率或尺度差异较大时, 所得常数可能无法充分反映各因子的精细几何结构。与此不同, 张量化方法利用乘积测度、可加 Dirichlet 能量以及方差或熵的条件分解, 先在每个因子上分别建立 Poincaré 或对数 Sobolev 估计, 再将这些估计提升到乘积空间。在本文所采用的乘积概率测度与可加能量框架下, 最优 Poincaré 常数和最优对数 Sobolev 常数均满足张量化原理, 因而逐因子方法能够保留各因子的维数、曲率与尺度信息。已有的一般理论给出了上述张量化机制, 但并不能直接确定逐因子缩放的复射影空间乘积上两类显式上界之间的定量关系, 也不能直接给出固定体积约束下的最优尺度及其扰动行为。基于此, 本文将在该模型上对整体几何估计与逐因子张量化估计进行显式比较和尺度优化。

设

$$M = \prod_{i=1}^r \mathbb{CP}^{m_i}, \quad g_a = \bigoplus_{i=1}^r a_i g_{\text{FS}, i}, \quad a_i > 0 \quad (1.1)$$

其中 $m_i \geq 1$, $r \geq 2$, $g_{\text{FS},i}$ 的全纯截面曲率恒为 4, 并记

$$m = \sum_{i=1}^r m_i, \quad \rho(a) := \sup \{ \rho \in \mathbb{R} : \text{Ric}_{g_a} \geq \rho g_a \}$$

所有泛函不等式均相对于归一化体积概率测度表述

$$d\mu_a = \frac{dv_{g_a}}{\text{Vol}(M, g_a)}$$

记 $C_P^{\text{opt}}(M, g)$ 和 $C_{\text{LS}}^{\text{opt}}(M, g)$ 分别为最优 Poincaré 常数和最优对数 Sobolev 常数。记 $C_{\text{LS}}^{\text{tensor}}$ 和 $C_{\text{LS}}^{\text{global}}$ 分别为张量化方法和整体 Ricci 下界方法所得的显式上界。本文的主要结果如下。

定理 1.1. 对模型(1.1), 有

$$\rho(a) = \min_i \frac{2(m_i + 1)}{a_i}, \quad \lambda_1(M, g_a) = \min_i \frac{4(m_i + 1)}{a_i} = 2\rho(a)$$

因而

$$C_P^{\text{opt}}(M, g_a) = \max_i \frac{a_i}{4(m_i + 1)} = \frac{1}{2\rho(a)}$$

故凯勒 Bochner 方法给出的 Poincaré 常数在整个缩放乘积族上均精确达到。

定理 1.2. 记 $C_{\text{LS}}^{\text{opt}}$ 为最优对数 Sobolev 常数, 则

$$\max_i \frac{a_i}{2(m_i + 1)} \leq C_{\text{LS}}^{\text{opt}}(M, g_a) \leq C_{\text{LS}}^{\text{tensor}}(a) < C_{\text{LS}}^{\text{global}}(a) \quad (1.2)$$

其中

$$C_{\text{LS}}^{\text{tensor}}(a) = \max_i \frac{m_i a_i}{(m_i + 1)^2}, \quad C_{\text{LS}}^{\text{global}}(a) = \frac{m}{m+1} \max_i \frac{a_i}{m_i + 1}$$

右端严格不等式说明, 逐因子应用凯勒估计再张量化, 严格优于只使用总维数和最弱 Ricci 下界的整体估计。

定理 1.3. 固定

$$\prod_{i=1}^r a_i^{m_i} = A > 0, \quad \beta_i = \frac{m_i}{(m_i + 1)^2}$$

令

$$T_* = \left(A \prod_{i=1}^r \beta_i^{m_i} \right)^{\frac{1}{m}}$$

则 $C_{\text{LS}}^{\text{tensor}}(a) = \max_i \beta_i a_i$ 的唯一极小点为

$$a_i^* = \frac{T_*}{\beta_i} = \frac{(m_i + 1)^2}{m_i} \left[A \prod_{j=1}^r \left(\frac{m_j}{(m_j + 1)^2} \right)^{m_j} \right]^{\frac{1}{m}}$$

且最小值为 T_* 。若

$$a_i(t) = a_i^* e^{tb_i}, \quad \sum_i m_i b_i = 0$$

则该上界在任意非平凡扰动方向上均以一阶速度离开极小值, 表现为非光滑尖点型极小点。

2. 预备知识

符号约定

$\text{Var}_\mu(u)$: 函数 u 关于概率测度 μ 的方差;

$\text{Ent}_\mu(u^2)$: 函数 u^2 关于概率测度 μ 的熵;

$C_p^{\text{opt}}(N, g)$: (N, g) 上的最优 Poincaré 常数, 即使相应 Poincaré 不等式成立的最小常数;

$C_{\text{LS}}^{\text{opt}}(N, g)$: (N, g) 上的最优对数 Sobolev 常数, 即使相应对数 Sobolev 不等式成立的最小常数;

$C_{\text{LS}}^{\text{global}}(a)$: 将总复维数和最佳统一 Ricci 下界代入凯勒估计所得的整体上界;

$C_{\text{LS}}^{\text{tensor}}(a)$: 先逐因子应用凯勒估计, 再利用熵张量化所得的显式上界;

$\lambda_1(N, g)$: 非负 Laplace-Beltrami 算子 $-\Delta$ 的第一非零特征值;

$\rho(a)$: g_a 的最佳统一 Ricci 下界, 即满足 $\text{Ric}_{g_a} \geq \rho(a)g_a$ 的最大常数。

基础知识

设 (N, g) 为紧致连通黎曼流形, $\mu = \frac{dy_g}{\text{Vol}(N, g)}$ 。定义: $\text{Var}_\mu(u) = \int_N u^2 d\mu - \left(\int_N u d\mu\right)^2$ 以及

$$\text{Ent}_\mu(u^2) = \int_N u^2 \log u^2 d\mu - \left(\int_N u^2 d\mu\right) \log \left(\int_N u^2 d\mu\right),$$

最优 Poincaré 常数和最优对数 Sobolev 常数分别由

$$C_p^{\text{opt}}(N, g) := \inf \left\{ C > 0 : \text{Var}_\mu(u) \leq C \int_N |\nabla u|^2 d\mu, \forall u \in C^\infty(N, R) \right\}$$

$$C_{\text{LS}}^{\text{opt}}(N, g) := \inf \left\{ C > 0 : \text{Ent}_\mu(u^2) \leq C \int_N |\nabla u|^2 d\mu, \forall u \in C^\infty(N, R) \right\}$$

定义。本文采用 Laplace-Beltrami 算子符号约定 $\Delta = \text{div} \nabla$, 则 $-\Delta$ 为非负自伴算子。记 $\lambda_1(N, g)$ 为 $-\Delta$ 的第一非零特征值, 即相应特征函数满足 $-\Delta u = \lambda u$ 。在该符号约定下 Rayleigh 商给出标准关系[6]

$$C_p^{\text{opt}}(N, g) = \frac{1}{\lambda_1(N, g)} \quad (2.1)$$

下面直接引用本文所需的凯勒 Beckner 估计。

定理 2.1 设 (N^n, g, J) 为复维数 $n \geq 2$ 的紧致凯勒流形, $\text{Ric} \geq \rho g$, $\rho > 0$ 。则对 $1 < p \leq 2$ 和正光滑函数 ϕ [5],

$$\int_N \phi^2 d\mu - \left(\int_N \phi^{\frac{2}{p}} d\mu \right)^p \leq \frac{p-1}{p} \frac{2n}{((n-1)p+2)\rho} \int_N |\nabla \phi|^2 d\mu \quad (2.2)$$

其端点推论为

$$C_p^{\text{opt}}(N, g) \leq \frac{1}{2\rho}, \quad C_{\text{LS}}^{\text{opt}}(N, g) \leq \frac{2n}{(n+1)\rho} \quad (2.3)$$

定理 2.1 的证明利用热方程、熵耗散及凯勒复 Hessian 的加权积分 Bochner 不等式, 详见文献[5]。本文将其作为已有工具, 不重复完整的指标计算。对于 $n=1$, $\mathbb{CP}^1$ 在本文归一化下等距于半径 1/2 的圆球面, Beckner 的球面尖锐不等式给出相同形式的对数 Sobolev 常数[2]。

对数 Sobolev 不等式在常数函数附近线性化可推出

$$C_{\text{LS}}^{\text{opt}}(N, g) \geq 2C_p^{\text{opt}}(N, g) \quad (2.4)$$

该关系将在定理 3.2 中直接证明。在全纯截面曲率为 4 的归一化下，复射影空间满足[7] [8]

$$\text{Ric}_{g_{\text{FS}}} = 2(n+1)g_{\text{FS}} \quad (2.5)$$

其函数 Laplacian 的第一非零特征值为[9]

$$\lambda_1(\mathbb{CP}^n, g_{\text{FS}}) = 4(n+1) \quad (2.6)$$

文献[9]采用的 Fubini-Study 度量尺度与本文约定不同，其函数特征值写为 $k(k+n)$ 。按本文全纯截面曲率恒为 4 的归一化作常数缩放后，特征值相应乘以 4，故 $\lambda_k = 4k(k+n)$ ， $\lambda_1 = 4(n+1)$ ，若 $g_a = ag$ ， $a > 0$ ，则

$$\Delta_{g_a} = a^{-1}\Delta_g, \lambda_1(N, g_a) = a^{-1}\lambda_1(N, g), \text{Ric}_{g_a} = \text{Ric}_g \quad (2.7)$$

若实维数为 $2n$ ，则 $dv_{g_a} = a^n dv_g$ ，故归一化概率测度不变，而 Poincaré 与对数 Sobolev 常数均按比例乘以 a 。对乘积流形 $N = N_1 \times \cdots \times N_r$ 及乘积度量，有[6] [7]

$$\text{Ric}_N = \oplus_i \text{Ric}_{N_i}, \Delta_N = \sum_i \Delta_{N_i}, \lambda_1(N) = \min_i \lambda_1(N_i) \quad (2.8)$$

最后，最优对数 Sobolev 常数具有张量化性质[3] [4]。

引理 2.2. 设概率度量空间 (N_i, g_i, μ_i) 的最优对数 Sobolev 常数为 L_i ，且乘积空间采用乘积测度及乘积能量

$$d\mu = \bigotimes_{i=1}^r d\mu_i, |\nabla F|^2 = \sum_{i=1}^r |\nabla_i F|^2$$

则

$$C_{\text{LS}}^{\text{opt}}\left(\prod_{i=1}^r N_i, \bigotimes_{i=1}^r \mu_i\right) = \max_{1 \leq i \leq r} L_i$$

证明. 只需证明两个因子的情形，多因子情形由归纳法得到。对 $F \in C^\infty(N_1 \times N_2)$ ，令

$$A(y) = \int_{N_1} F(x, y)^2 d\mu_1(x), G(y) = A(y)^{\frac{1}{2}}$$

熵的条件分解为

$$\text{Ent}_{\mu_1 \otimes \mu_2}(F^2) = \int_{N_2} \text{Ent}_{\mu_1}(F(\cdot, y)^2) d\mu_2(y) + \text{Ent}_{\mu_2}(G^2)$$

对第一项应用 N_1 上的对数 Sobolev 不等式，得到：

$$\int_{N_2} \text{Ent}_{\mu_1}(F(\cdot, y)^2) d\mu_2(y) \leq L_1 \int_{N_1 \times N_2} |\nabla_1 F|^2 d\mu_1 d\mu_2$$

为处理第二项，对 $\varepsilon > 0$ 令

$$G_\varepsilon(y) = (A(y) + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，

$$|\nabla_2 G_\varepsilon|^2 = \frac{\left| \int_{N_1} F \nabla_2 F d\mu_1 \right|^2}{A + \varepsilon} \leq \frac{A}{A + \varepsilon} \int_{N_1} |\nabla_2 F|^2 d\mu_1 \leq \int_{N_1} |\nabla_2 F|^2 d\mu_1$$

在 N_2 上对 G_ε 应用对数 Sobolev 不等式，得到

$$\text{Ent}_{\mu_2}(G_\varepsilon^2) \leq L_2 \int_{N_1 \times N_2} |\nabla_2 F|^2 d\mu_1 d\mu_2$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$, 由 $G_\varepsilon^2 \rightarrow G^2$ 及支配收敛定理,

$$\text{Ent}_{\mu_2}(G^2) \leq L_2 \int_{N_1 \times N_2} |\nabla_2 F|^2 d\mu_1 d\mu_2$$

因此

$$\text{Ent}_{\mu_1 \otimes \mu_2}(F^2) \leq L_1 \int |\nabla_1 F|^2 + L_2 \int |\nabla_2 F|^2 \leq \max\{L_1, L_2\} \int |\nabla F|^2$$

故

$$C_{\text{LS}}^{\text{opt}}(N_1 \times N_2) \leq \max\{L_1, L_2\}$$

反之, 设乘积空间的最优常数为 L 。取 $F(x, y) = f(x)$, 则

$$\text{Ent}_{\mu_1 \otimes \mu_2}(F^2) = \text{Ent}_{\mu_1}(f^2), \quad \int |\nabla F|^2 = \int_{N_1} |\nabla f|^2 d\mu_1$$

因此 L 也是 N_1 上对数 Sobolev 不等式的一个可用常数, 从而 $L \geq L_1$ 。同理, 取只依赖于 y 的函数可得 $L \geq L_2$ 。故: $L \geq \max\{L_1, L_2\}$

结合上述上界即得: $C_{\text{LS}}^{\text{opt}}(N_1 \times N_2) = \max\{L_1, L_2\}$ 。

证毕

3. 定理证明

定理 3.1. 在上述记号下,

$$\rho(a) = \min_{1 \leq i \leq r} \frac{2(m_i + 1)}{a_i}$$

且

$$\lambda_1(M, g_a) = \min_{1 \leq i \leq r} \frac{4(m_i + 1)}{a_i} = 2\rho(a)$$

因此

$$C_P^{\text{opt}}(M, g_a) = \max_{1 \leq i \leq r} \frac{a_i}{4(m_i + 1)} = \frac{1}{2\rho(a)}$$

特别地, 凯勒 Bochner 方法给出的 Poincaré 常数上界在该乘积度量族上精确达到。

证明. 记 $M_i = \mathbb{CP}^{m_i}$, $g_i = a_i g_{\text{FS}, i}$, 由(2.5)及常数缩放公式(2.7)

$$\text{Ric}_{g_i} = \text{Ric}_{g_{\text{FS}, i}} = \frac{2(m_i + 1)}{a_i} g_i$$

令

$$\rho_i = \frac{2(m_i + 1)}{a_i}$$

对任意 $V = (V_1, \dots, V_r) \in TM$, 乘积度量与乘积 Ricci 张量满足

$$|V|_{g_a}^2 = \sum_{i=1}^r |V_i|_{g_i}^2, \quad \text{Ric}_{g_a}(V, V) = \sum_{i=1}^r \rho_i |V_i|_{g_i}^2$$

因此:

$$\operatorname{Ric}_{g_a}(V, V) \geq \left(\min_i \rho_i \right) |V|_{g_a}^2$$

若 i_0 满足 $\rho_{i_0} = \min_i \rho_i$, 并取仅在第 i_0 个因子方向上非零的切向量, 则上式取等号, 故

$$\rho(a) = \min_i \rho_i = \min_i \frac{2(m_i + 1)}{a_i}$$

由(2.6)及(2.7),

$$\lambda_1(M_i, g_i) = \frac{4(m_i + 1)}{a_i}$$

设 $-\Delta_{g_i}$ 的特征值依次为 $0 = \lambda_{i,0} < \lambda_{i,1} \leq \lambda_{i,2} \leq \dots$, 相应标准正交特征函数为 $\{\phi_{i,k}\}_{k \geq 0}$ 。由紧致流形谱定理及 Hilbert 空间张量积结构, 这些乘积函数构成 $L^2(M, d\mu_a)$ 的完备标准正交基, 乘积函数 $\Phi_{k_1, \dots, k_r} = \prod_{i=1}^r \phi_{i, k_i}$

满足: $-\Delta_{g_a} \Phi_{k_1, \dots, k_r} = \left(\sum_{i=1}^r \lambda_{i, k_i} \right) \Phi_{k_1, \dots, k_r}$, 故乘积 Laplacian 的最小正特征值为:

$$\lambda_1(M, g_a) = \min_i \lambda_{i,1} = \min_i \frac{4(m_i + 1)}{a_i} = 2\rho(a)$$

由 Rayleigh 商刻画(2.1),

$$C_P^{\text{opt}}(M, g_a) = \frac{1}{\lambda_1(M, g_a)} = \max_i \frac{a_i}{4(m_i + 1)} = \frac{1}{2\rho(a)}$$

取 i_0 使 $\lambda_1(M_{i_0}, g_{i_0}) = \lambda_1(M, g_a)$, 并令 ϕ_{i_0} 为第 i_0 个因子的第一非零特征函数。在 M 上定义 $U(x_1, \dots, x_r) = \phi_{i_0}(x_{i_0})$, 由于 ϕ_{i_0} 对应正特征值, 故与常数函数正交则, 从而

$$\int_M U d\mu_a = 0, \quad -\Delta_{g_a} U = \lambda_1(M, g_a) U$$

从而

$$\int_M |\nabla U|^2 d\mu_a = \lambda_1(M, g_a) \int_M U^2 d\mu_a$$

因此 U 在 Poincaré 不等式中达到等号。结合定理 2.1 可知, 凯勒 Bochner-Poincaré 上界在任意尺度参数 a 下均精确达到。

证毕

定理 3.2. 设

$$M = \prod_{i=1}^r \mathbb{CP}^{m_i}, \quad g_a = \bigoplus_{i=1}^r a_i g_{\text{FS}, i}, \quad a_i > 0$$

其中 $r \geq 2$, $m_i \geq 1$, 并记

$$m = \sum_{i=1}^r m_i$$

设 $C_{\text{LS}}^{\text{opt}}(M, g_a)$ 为关于归一化体积测度

$$d\mu_a = \frac{dv_{g_a}}{\operatorname{Vol}(M, g_a)}$$

的最优对数 Sobolev 常数，则

$$\max_{1 \leq i \leq r} \frac{a_i}{2(m_i+1)} \leq C_{\text{LS}}^{\text{opt}}(M, g_a) \leq \max_{1 \leq i \leq r} \frac{m_i a_i}{(m_i+1)^2} < \frac{m}{m+1} \max_{1 \leq i \leq r} \frac{a_i}{m_i+1} \quad (3.1)$$

证明. 先证明下界。取非零函数 $h \in C^\infty(M)$ 满足：

$$\int_M h d\mu_a = 0$$

由于 M 紧致， h 有界，故可取 $|\varepsilon|$ 充分小，使 $u_\varepsilon = 1 + \varepsilon h > 0$ ，记 $A = \int_M h^2 d\mu_a$ ，由 $d\mu_a$ 是概率测度以及 h 的零均值条件：

$$\int_M u_\varepsilon^2 d\mu_a = \int_M (1 + 2\varepsilon h + \varepsilon^2 h^2) d\mu_a = 1 + \varepsilon^2 A \quad (3.2)$$

令 $z_\varepsilon = 2\varepsilon h + \varepsilon^2 h^2$ ，则 $u_\varepsilon^2 = 1 + z_\varepsilon$ ，对函数

$$F(z) = (1+z)\log(1+z)$$

在 $z=0$ 处作 Taylor 展开。存在常数 $C > 0$ ，使得当 $|z| \leq \frac{1}{2}$ 时，

$$F(z) = z + \frac{1}{2}z^2 + R(z), \quad |R(z)| \leq C|z|^3$$

由于 h 有界，当 $|\varepsilon|$ 足够小时， $|z_\varepsilon| \leq \frac{1}{2}$ 在 M 上一致成立，而且 $z_\varepsilon = O(\varepsilon)$, $R(z_\varepsilon) = O(|\varepsilon|^3)$ 在 M 上一致成立。又有 $z_\varepsilon^2 = 4\varepsilon^2 h^2 + O(|\varepsilon|^3)$ ，则：

$$u_\varepsilon^2 \log u_\varepsilon^2 = z_\varepsilon + \frac{1}{2}z_\varepsilon^2 + O(|\varepsilon|^3) = 2\varepsilon h + 3\varepsilon^2 h^2 + O(|\varepsilon|^3)$$

由于余项在紧流形 M 上一致可控，可以逐项积分。利用 $\int_M h d\mu_a = 0$ ，得到：

$$\int_M u_\varepsilon^2 \log u_\varepsilon^2 d\mu_a = 3\varepsilon^2 A + o(\varepsilon^2) \quad (3.3)$$

另一方面，由(3.2)及 $(1+s)\log(1+s) = s + O(s^2)$ ($s \rightarrow 0$) 可得：

$$\left(\int_M u_\varepsilon^2 d\mu_a \right) \log \left(\int_M u_\varepsilon^2 d\mu_a \right) = (1 + \varepsilon^2 A) \log(1 + \varepsilon^2 A) = \varepsilon^2 A + o(\varepsilon^2) \quad (3.4)$$

由熵的定义以及(3.3)~(3.4)，得到：

$$\text{Ent}_{\mu_a}(u_\varepsilon^2) = 2\varepsilon^2 \int_M h^2 d\mu_a + o(\varepsilon^2) \quad (3.5)$$

同时，

$$\int_M |\nabla u_\varepsilon|^2 d\mu_a = \varepsilon^2 \int_M |\nabla h|^2 d\mu_a \quad (3.6)$$

将(3.5)和(3.6)代入最优对数 Sobolev 不等式，除以 ε^2 并令 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，得到：

$$2 \int_M h^2 d\mu_a \leq C_{\text{LS}}^{\text{opt}}(M, g_a) \int_M |\nabla h|^2 d\mu_a$$

因此：

$$C_{\text{LS}}^{\text{opt}}(M, g_a) \geq 2 \sup \left\{ \frac{\int_M h^2 d\mu_a}{\int_M |\nabla h|^2 d\mu_a} : h \in C^\infty(M), h \neq 0, \int_M h d\mu_a = 0 \right\} = \frac{2}{\lambda_1(M, g_a)}$$

由定理 3.1，

$$\lambda_1(M, g_a) = \min_i \frac{4(m_i + 1)}{a_i}$$

从而:

$$C_{\text{LS}}^{\text{opt}}(M, g_a) \geq \frac{2}{\min_i \frac{4(m_i + 1)}{a_i}} = \max_i \frac{a_i}{2(m_i + 1)}$$

下面证明两个上界。先说明, 定理 2.1 虽以正光滑函数表述, 但其对数 Sobolev 端点可以延拓到任意光滑函数。事实上, 对任意 $v \in C^\infty(M)$ 及 $\delta > 0$, 令 $v_\delta = (v^2 + \delta)^{\frac{1}{2}} > 0$, 则

$$|\nabla v_\delta|^2 = \frac{v^2}{v^2 + \delta} |\nabla v|^2 \leq |\nabla v|^2$$

对 v_δ 应用正函数版本的不等式。由于函数 $s \mapsto s \log s$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 并规定 $0 \log 0 = 0$, 由紧致性及支配收敛定理,

$$\text{Ent}_{\mu_a}(v_\delta^2) \rightarrow \text{Ent}_{\mu_a}(v^2) \quad (\delta \downarrow 0)$$

令 $\delta \downarrow 0$, 即可得到任意光滑函数版本。因此, 以下可以直接使用定理 2.1 的对数 Sobolev 端点估计。乘积流形的复维数为

$$m = \sum_{i=1}^r m_i \geq 2$$

其最佳统一 Ricci 下界由定理 3.1 给出:

$$\rho(a) = \min_i \frac{2(m_i + 1)}{a_i}$$

由凯勒 Beckner 不等式的对数 Sobolev 端点[5],

$$C_{\text{LS}}^{\text{opt}}(M, g_a) \leq \frac{2m}{(m+1)\rho(a)}$$

$$\frac{2m}{(m+1)\rho(a)} = \frac{2m}{m+1} \frac{1}{\min_i \frac{2(m_i + 1)}{a_i}} = \frac{m}{m+1} \max_i \frac{a_i}{m_i + 1}$$

记

$$C_{\text{LS}}^{\text{global}}(a) = \frac{m}{m+1} \max_i \frac{a_i}{m_i + 1}$$

再考虑第 i 个因子 $M_i = \mathbb{CP}^{m_i}$, $g_i = a_i g_{\text{FS},i}$, 其 Ricci 曲率满足

$$\text{Ric}_{g_i} = \frac{2(m_i + 1)}{a_i} g_i$$

若 $m_i \geq 2$, 由定理 2.1 的对数 Sobolev 端点

$$C_{\text{LS}}^{\text{opt}}(M_i, g_i) \leq \frac{2m_i}{(m_i + 1) \frac{2(m_i + 1)}{a_i}} = \frac{m_i a_i}{(m_i + 1)^2}$$

若 $m_i = 1$, 则在本文归一化下 $(\mathbb{CP}^1, g_{FS,i}) \cong S^2(1/2)$ 由球面上的 Beckner 尖锐不等式[2]及常数缩放关系

$$C_{LS}^{\text{opt}}(\mathbb{CP}^1, a_i g_{FS,i}) = \frac{a_i}{4} = \frac{m_i a_i}{(m_i + 1)^2}$$

因此, 对所有 $m_i \geq 1$, 均有

$$C_{LS}^{\text{opt}}(M_i, g_i) \leq \frac{m_i a_i}{(m_i + 1)^2} \quad (3.7)$$

设

$$d\mu_i = \frac{dv_{g_i}}{\text{Vol}(M_i, g_i)}$$

由于 g_a 是乘积度量,

$$dv_{g_a} = \prod_{i=1}^r dv_{g_i}, \quad \text{Vol}(M, g_a) = \prod_{i=1}^r \text{Vol}(M_i, g_i)$$

故 $d\mu_a = d\mu_1 \otimes \cdots \otimes d\mu_r$ 。由引理 2.2 的精确张量化公式

$$C_{LS}^{\text{opt}}(M, g_a) = \max_i C_{LS}^{\text{opt}}(M_i, g_i) \leq \max_i \frac{m_i a_i}{(m_i + 1)^2}$$

记

$$C_{LS}^{\text{tensor}}(a) = \max_i \frac{m_i a_i}{(m_i + 1)^2}$$

最后比较两个上界。令

$$x_i = \frac{a_i}{m_i + 1} > 0, \quad \alpha_i = \frac{m_i}{m_i + 1}, \quad \alpha = \frac{m}{m + 1}$$

则 $C_{LS}^{\text{tensor}} = \max_i \alpha_i x_i$, $C_{LS}^{\text{global}} = \alpha \max_i x_i$ 。

由于 $r \geq 2$ 且 $m_i \geq 1$, 对每个 i 都有 $m_i < m$, 函数 $f(s) = \frac{s}{s+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格递增, 因此 $\alpha_i < \alpha (1 \leq i \leq r)$, 取指标 j 使 $\alpha_j x_j = \max_i \alpha_i x_i$, 由于 $x_j > 0$, 有

$$C_{LS}^{\text{tensor}} = \alpha_j x_j < \alpha x_j \leq \alpha \max_i x_i = C_{LS}^{\text{global}}$$

综上, (3.1)成立。

证毕

注. C_{LS}^{tensor} 和 C_{LS}^{global} 一般只是最优常数的上界。本文证明的是张量化上界严格优于整体曲率上界, 而不是一般高维 $\mathbb{CP}^n$ 上最优对数 Sobolev 常数的精确公式。

乘积度量的总体积为

$$\text{Vol}(M, g_a) = \left(\prod_{i=1}^r a_i^{m_i} \right) \prod_{i=1}^r \text{Vol}(\mathbb{CP}^{m_i}, g_{FS,i})$$

因此固定总体积等价于固定

$$\prod_{i=1}^r a_i^{m_i} = A > 0 \quad (3.8)$$

记

$$\beta_i = \frac{m_i}{(m_i + 1)^2}, \quad C(a) = C_{\text{LS}}^{\text{tensor}}(a) = \max_i \beta_i a_i$$

定理 3.3. 在约束(3.8)下, C 有唯一全局极小点

$$a_i^* = \frac{T_*}{\beta_i}, \quad T_* = \left(A \prod_{i=1}^r \beta_i^{m_i} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (3.9)$$

并且

$$\min_{\prod_i a_i^{m_i} = A} C(a) = T_* \quad (3.10)$$

证明. 任取满足体积约束的 a , 令 $t = C(a) = \max_i \beta_i a_i$, 则对每个 i , $a_i \leq \frac{t}{\beta_i}$, 将各式取 m_i 次方后相

乘, 并利用 $\sum_i m_i = m$, 得到: $A = \prod_i a_i^{m_i} \leq \prod_i \left(\frac{t}{\beta_i} \right)^{m_i} = \frac{t^m}{\prod_i \beta_i^{m_i}}$ 。

于是

$$t \geq \left(A \prod_i \beta_i^{m_i} \right)^{\frac{1}{m}} = T_*$$

令 $a_i^* = T_*/\beta_i$, 则

$$\prod_i (a_i^*)^{m_i} = \frac{T_*^m}{\prod_i \beta_i^{m_i}} = A, \quad \beta_i a_i^* = T_*$$

故该尺度可行且达到下界。

若另一个可行点也达到 T_* , 则前述每个不等式 $a_i \leq \frac{T_*}{\beta_i}$ 必须同时取等号; 否则乘积将严格小于 A 。因

此 $a_i = a_i^*$ 对所有 i 成立, 极小点唯一。

证毕

注. 尺度向量 $a^* = (a_1^*, \dots, a_r^*)$ 它描述了在总体积固定时, 各复射影因子之间的最佳尺度分配。最优条件表明, 各因子对张量化上界的贡献在 a^* 处恰好达到平衡。因此 a^* 可理解为固定体积约束下的极小极大平衡尺度。该尺度优化的是张量化对数 Sobolev 上界, 一般不同于使乘积度量成为 Einstein 度量的尺度。

推论. 设

$$a_i(t) = a_i^* e^{tb_i}, \quad \sum_i m_i b_i = 0$$

$$C(t) := C(a_1(t), \dots, a_r(t)) = C_{\text{LS}}^{\text{tensor}}(a(t))$$

若 $b \neq 0$, 记 $b_+ = \max_i b_i > 0$ 、 $b_- = \min_i b_i < 0$, 则

$$C(t) = \begin{cases} T_* e^{tb_+}, & t \geq 0 \\ T_* e^{tb_-}, & t \leq 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

因而 $t = 0$ 是沿该非平凡体积保持扰动曲线的严格极小点, 且

$$C'_-(0) = T_* b_- < 0 < T_* b_+ = C'_+(0)$$

证明. 体积约束由

$$\prod_i a_i(t)^{m_i} = A \exp\left(t \sum_i m_i b_i\right) = A$$

得到。又因 $\beta_i a_i^* = T_*$, $C(t) = \max_i \beta_i a_i(t) = T_* \max_i e^{tb_i}$, 当 $t \geq 0$ 时最大值由 b_+ 控制; 当 $t \leq 0$ 时最大值由 b_- 控制, 故得(3.11)。由于 $m_i > 0$ 且 $\sum_i m_i b_i = 0$, 非零向量 b 必同时含有正分量和负分量, 故 $b_- < 0 < b_+$ 。于是 $t \neq 0$ 时 $C(t) > T_*$, 左右导数公式由直接求导得到。

证毕

注. 尖点行为体现在最优尺度处左右导数不相等, 即 $C'_-(0) < 0 < C'_+(0)$ 。这说明沿任意非平凡的体积保持扰动, 张量化上界都会以一阶速度离开其最小值, 因而该极小点一般不可微, 并呈现类似绝对值函数的尖点结构。这里的尖点描述的是尺度参数空间中显式张量化上界的非光滑性, 而非乘积流形本身出现几何奇点。

4. 具体算例与渐近比较

本节主要比较整体 Ricci 方法与张量化方法所得的两个显式对数 Sobolev 上界, 并同时列出相应的最优 Poincaré 常数, 标准乘积度量下的常数比较见表 1。

$$C_{\text{LS}}^{\text{global}} = \frac{m}{m+1} \max_i \frac{a_i}{m_i+1}, \quad C_{\text{LS}}^{\text{tensor}} = \max_i \frac{m_i a_i}{(m_i+1)^2}$$

Table 1. Comparison of constants under the standard product metric

表 1. 标准乘积度量下的常数比较

流形	C_P^{opt}	$C_{\text{LS}}^{\text{global}}$	$C_{\text{LS}}^{\text{tensor}} / C_{\text{LS}}^{\text{global}}$
$\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$
$\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^2$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{3}$
$(\mathbb{CP}^1)^r$	$\frac{1}{8}$	$\frac{r}{2(r+1)}$	$\frac{(r+1)}{(2r)}$
$\mathbb{CP}^k \times \mathbb{CP}^{m-k}$	$\frac{1}{4(d+1)}$	$\frac{m}{(m+1)(d+1)}$	$\frac{d(m+1)}{m(d+1)}$

4.1. $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$

取 $g = ag_{\text{FS}} \oplus bg_{\text{FS}}$ 。由定理 3.1 和定理 3.2,

$$C_P^{\text{opt}} = \frac{\max\{a, b\}}{8}, \quad C_{\text{LS}}^{\text{global}} = \frac{\max\{a, b\}}{3}, \quad C_{\text{LS}}^{\text{tensor}} = \frac{\max\{a, b\}}{4}$$

因此

$$\frac{C_{\text{LS}}^{\text{tensor}}}{C_{\text{LS}}^{\text{global}}} = \frac{3}{4} \quad (4.1)$$

若固定 $ab = A$ ，则 $\max\{a, b\} \geq \sqrt{A}$ ，等号仅在 $a = b = \sqrt{A}$ 时成立。

4.2. $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^2$

取 $g = ag_{\text{FS},1} \oplus bg_{\text{FS},2}$ 。此时

$$C_P^{\text{opt}} = \max\left\{\frac{a}{8}, \frac{b}{12}\right\}$$

$$C_{\text{LS}}^{\text{global}} = \max\left\{\frac{3a}{8}, \frac{b}{4}\right\}, \quad C_{\text{LS}}^{\text{tensor}} = \max\left\{\frac{a}{4}, \frac{2b}{9}\right\}$$

令 $s = a/b$ ，两个最大值的切换点分别为 $s = 2/3$ 和 $s = 8/9$ ，故

$$\frac{C_{\text{LS}}^{\text{tensor}}}{C_{\text{LS}}^{\text{global}}} = \begin{cases} \frac{8}{9}, & 0 < s \leq \frac{2}{3} \\ \frac{16}{27s}, & \frac{2}{3} \leq s \leq \frac{8}{9} \\ \frac{2}{3}, & s \geq \frac{8}{9} \end{cases} \quad (4.2)$$

特别地，标准乘积度量 $a = b = 1$ 时，该比例为 $2/3$ 。在固定体积 $ab^2 = A$ 下，张量化上界的最优尺度满足：

$$\frac{a^*}{b^*} = \frac{8}{9}$$

该尺度恰位于式(4.2)中比例取得最小值 $2/3$ 的区间 $s \geq 8/9$ 的边界点。

4.3. $(\mathbb{CP}^1)^r$

令 $a_{\max} = \max_i a_i$ ，则： $C_P^{\text{opt}} = \frac{a_{\max}}{8}$ ， $C_{\text{LS}}^{\text{global}} = \frac{r}{2(r+1)} a_{\max}$ ， $C_{\text{LS}}^{\text{tensor}} = \frac{1}{4} a_{\max}$

因此

$$\frac{C_{\text{LS}}^{\text{tensor}}}{C_{\text{LS}}^{\text{global}}} = \frac{r+1}{2r} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (4.3)$$

固定 $\prod_i a_i = A$ 时， $a_{\max} \geq A^{\frac{1}{r}}$ ，唯一最优尺度为 $a_1 = \dots = a_r = A^{\frac{1}{r}}$ 。

4.4. $\mathbb{CP}^k \times \mathbb{CP}^{m-k}$ 的标准乘积度量

令 $m \geq 2$ ， $1 \leq k \leq m-1$ ， $d = \min\{k, m-k\}$ 当两个尺度均为 1 时，

$$C_P^{\text{opt}} = \frac{1}{4(d+1)}, \quad C_{\text{LS}}^{\text{global}} = \frac{m}{(m+1)(d+1)}, \quad C_{\text{LS}}^{\text{tensor}} = \frac{d}{(d+1)^2}$$

这里使用了函数 $\frac{x}{(x+1)^2}$ 在 $x \geq 1$ 上单调不增。故

$$\frac{C_{\text{LS}}^{\text{tensor}}}{C_{\text{LS}}^{\text{global}}} = \frac{d(m+1)}{m(d+1)} \quad (4.4)$$

若 d 固定而 $m \rightarrow \infty$, 比例趋于 $\frac{d}{(d+1)}$; 特别地, $d=1$ 时趋于 $\frac{1}{2}$ 。若 $\frac{k}{m} \rightarrow \theta \in (0,1)$, 则 d 与 m 同阶, 式(4.4)趋于 1。这表明: 因子维数越不均衡, 张量化方法相对于整体曲率方法的改进通常越显著。

5. 讨论与结论

本文对逐因子缩放的乘积复射影空间上的泛函不等式常数进行了显式计算、比较与优化。首先, 利用 Fubini-Study 度量的曲率与谱公式, 证明乘积流形的第一非零特征值恒等于最佳 Ricci 下界的两倍, 从而凯勒 Bochner-Poincaré 上界在整个尺度族上均达到等号。其次, 通过逐因子估计与熵张量化, 构造了保留各因子维数和尺度信息的对数 Sobolev 显式上界, 并证明其严格优于仅使用总维数和最弱 Ricci 下界所得的整体上界。最后, 在固定总体积条件下, 求得该张量化上界的唯一最优尺度向量, 说明最优尺度对应各因子有效贡献的完全平衡, 并刻画了体积保持扰动下的尖点型极小行为。

算例表明, 张量化改进的幅度同时受到因子维数分布、尺度比例及因子数的影响。标准双因子模型显示, 因子维数越不均衡, 张量化方法相对于整体方法的改进通常越显著; 变尺度模型中的分段公式说明, 上界由不同瓶颈因子的切换所控制, 而固定体积下的最优尺度对应这些贡献达到平衡的状态。在相应的低维多因子模型中, 随着因子数增加, 两种上界之比可以趋近于二分之一。

上述规律来源于两类估计对乘积结构的不同处理: 整体方法由总维数和最弱 Ricci 下界共同控制, 而张量化方法保留逐因子的估计信息。因此, 在其他具有显式因子估计并满足张量化性质的乘积空间上, 也可能出现类似的严格比较和尺度平衡现象。不过, 本文的严格结论目前仅适用于所研究的复射影空间乘积, 一般高维复射影空间上的精确最优对数 Sobolev 常数仍有待进一步研究。

参考文献

- [1] Gross, L. (1975) Logarithmic Sobolev Inequalities. *American Journal of Mathematics*, **97**, 1061-1083. <https://doi.org/10.2307/2373688>
- [2] Beckner, W. (1993) Sharp Sobolev Inequalities on the Sphere and the Moser-Trudinger Inequality. *The Annals of Mathematics*, **138**, 213-242. <https://doi.org/10.2307/2946638>
- [3] Bakry, D., Gentil, I. and Ledoux, M. (2014) Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-00227-9>
- [4] Ledoux, M. (2001) The Concentration of Measure Phenomenon. American Mathematical Society.
- [5] Baudoin, F. and Munteanu, O. (2019) Improved Beckner-Sobolev Inequalities on Kähler Manifolds. *The Journal of Geometric Analysis*, **31**, 100-125. <https://doi.org/10.1007/s12220-019-00252-w>
- [6] Chavel, I. (1984) Eigenvalues in Riemannian Geometry. 2nd Edition, Academic Press.
- [7] Besse, A.L. (1987) Einstein Manifolds. Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-74311-8>
- [8] Kobayashi, S. and Nomizu, K. (1996) Foundations of Differential Geometry, Volume II. Wiley.
- [9] Ikeda, A. and Taniguchi, Y. (1978) Spectra and Eigenforms of the Laplacian on S^n and $P^n(\mathbb{C})$. *Osaka Journal of Mathematics*, **15**, 515-546.