

# 关于Cayley Heisenberg群上次椭圆 $p$ -Laplace算子的唯一延拓性

刘慧萍, 廖冬妮\*

赣南师范大学数学与计算机科学学院, 江西 赣州

收稿日期: 2026年7月12日; 录用日期: 2026年8月14日; 发布日期: 2026年8月25日

---

## 摘 要

本文的主要目标是建立Cayley Heisenberg群 $CH^n$ 上次椭圆 $p$ -Laplace方程的解的唯一延拓性, 通过引入Almgren函数并研究其相关性质, 在频率函数局部有界的假设下, 建立能量积分的二重性, 进而得到次椭圆 $p$ -Laplace方程的弱解的唯一延拓性。

## 关键词

Cayley Heisenberg群, 次椭圆 $p$ -Laplace方程, 频率函数, 唯一延拓性

---

# The Unique Continuation Property for the $p$ -Subelliptic-Laplace Operator on the Cayley Heisenberg Group

Huiping Liu, Dongni Liao\*

School of Mathematics and Computer Science, Gannan Normal University, Ganzhou Jiangxi

Received: July 12, 2026; accepted: August 14, 2026; published: August 25, 2026

---

## Abstract

The main purpose of this paper is to establish the unique continuation property of solutions to the  $p$ -subelliptic-Laplace equation on Cayley Heisenberg group. By introducing the Almgren function and presenting its relevant properties, a doubling estimate for the energy integral is established under the assumption that the frequency function is locally bounded, thereby establishing the

---

\*通讯作者。

文章引用: 刘慧萍, 廖冬妮. 关于 Cayley Heisenberg 群上次椭圆  $p$ -Laplace 算子的唯一延拓性[J]. 理论数学, 2026, 16(8): 131-146. DOI: 10.12677/pm.2026.168187

unique continuation property of weak solutions to the  $p$ -subelliptic-Laplace equation.

## Keywords

Cayley Heisenberg Group,  $p$ -Sub-Laplace Equation, Frequency Function, Unique Continuation Property

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

近些年来, 大量学者研究了二阶椭圆方程解的唯一延拓性(见[1]-[9])。关于非线性次椭圆算子的唯一延拓性也有一些研究成果, 如 Liu 等人[10]研究了 Heisenberg 群上次  $p$ -Laplace 方程的唯一延拓性; Wang 和 Liao [11]建立了四元数 Heisenberg 群的次-Laplace 方程表示式及其性质, 并在该群上证明了带位势的次-Laplace 方程的唯一延拓性; Zhu [12]则研究了四元数 Heisenberg 群上次-Laplace 方程的基本解; Niu 和 Wang [13]建立了 Carnot 群上函数的表示公式及性质, 进而证明了该群上次-Laplace 方程的唯一延拓性。

我们知道, Cayley Heisenberg 群是四元数 Heisenberg 群的自然拓广, 其上的几何结构更加复杂。这主要体现在 Cayley Heisenberg 群的李代数源于八元数代数的非交换、非结合乘法(八元数虚部乘法不满足结合律), 这导致李括号关系相较于 Heisenberg 群、四元数 Heisenberg 群更为复杂, 从而显著增加了在该群上应用 Almgren 频率函数法研究解的唯一延拓性的难度。自然地, Cayley Heisenberg 群上的, 形如

$$\Delta_L^p u = \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 X_{rm} \left( |X_{rm} u|^{p-2} X_{rm} u \right) = \operatorname{div} \left( |\mathfrak{X} u|^{p-2} \mathfrak{X} u \right) = 0, \quad 1 < p < \infty, \quad (1.1)$$

其弱解的唯一延拓性该如何建立? 本文重点研究该问题。

本文通过在 Cayley Heisenberg 群上引入 Almgren 函数并给出相关性质, 在频率函数局部有界的假设下建立能量积分的二重性, 进而建立次椭圆  $p$ -Laplace 方程的解的唯一延拓性。本文的主要结果如下。

**定理 1.1** 对  $\forall u \in C^1(\Omega)$ , 假设存在两个同心球  $B_{k_0} \subset \bar{B}_{K_0} \subset \Omega$ , 使得频率函数  $N_p(k)$  具有良好定义, 即对每个  $k \in (k_0, K_0)$ ,  $H_p(k) > 0$  且  $\|N_p(k)\|_{L^\infty(k_0, K_0)} < \infty$ 。那么, 对  $\forall k_2 \in (k_0, K_0)$ ,  $\exists k^* \in (k_0, K_0)$ , 使得对  $\forall k_1 \in [k^*, k_2]$ , 有

$$\int_{\partial B_{k_2}} \frac{|u|^p}{|\nabla d|} \Psi^{\frac{p}{2}} dH \leq 2 \int_{\partial B_{k_1}} \frac{|u|^p}{|\nabla d|} \Psi^{\frac{p}{2}} dH, \quad (1.2)$$

即  $H_p(k_2) \leq 2H_p(k_1)$ , 其中  $N_p(k), H_p(k)$  的具体表达式见(3.2), (3.5),  $dH$  表示  $\mathbb{R}^{8n+7}$  中的  $8n+6$  维 Hausdorff 测度。

基于定理 1.1 在频率函数  $N_p(k)$  局部有界的假设下, 得到的关于能量积分  $H_p(k)$  的二重性, 进而建立次椭圆  $p$ -Laplace 方程(1.1)的解的唯一延拓性。

**定理 1.2** 设  $u \in HW^{1,p}(\Omega)$  是次  $p$ -Laplace 方程(1.1)的弱解, 即  $u$  满足

$$\int_{\Omega} |\mathfrak{X} u|^{p-2} \langle \mathfrak{X} u, \mathfrak{X} \varphi \rangle d\mathbf{a}ds = 0, \quad \forall \varphi \in HW_0^{1,p}(\Omega), \quad (1.3)$$

或者说,  $u$  是次  $p$ -能量泛函

$$I(v) = \int_{\Omega} |\mathfrak{X} v|^p d\mathbf{a}ds, \quad 1 < p < \infty, \quad (1.4)$$

的局部极小值点, 其中水平向量场  $\mathfrak{X}$  和水平 Sobolev 空间  $HW_0^{1,p}(\Omega)$  的定义分别见(2.2)和定义 2.4, 开球  $B_{k_0}$ 、 $B_{K_0}$  满足  $B_{k_0} \subset \bar{B}_{K_0} \subset \Omega$ , 并且当  $k \in (k_0, K_0]$  时  $H_p(k) > 0$ ,  $\|N_p(k)\|_{L^\infty(k_0, K_0)} < \infty$ 。那么, 对  $\Omega$  的某个开球  $B$ , 若  $u|_B = 0$ , 则  $u|_\Omega \equiv 0$ 。

本文结构如下: 第 2 节给出 Cayley Heisenberg 群的基本概念、后续证明中涉及到的相关定义、性质和一些记号; 第 3 节引入 Cayley Heisenberg 群上的频率函数, 并给出建立能量积分的二重性时所需要的相关性质; 第 4 节建立主要结果的证明。

## 2. 预备知识

在本节中, 我们介绍 Cayley Heisenberg 群的基本概念、后续证明中涉及到的相关定义、性质和一些记号。

在本文中, 我们始终使用  $C$  表示通用的正常数, 要注意的是, 在不同情形下, 甚至在同一行的估计式中  $C$  的值都可能是不同的。例如, 当我们记  $C = C(n, p)$  时, 表示  $C$  的取值仅依赖于  $n$  和  $p$ 。 $dH$  表示  $\mathbb{R}^{8n+7}$  中的  $8n+6$  维 Hausdorff 测度。 $\nabla$  为  $\mathbb{R}^{8n+7}$  中的普通梯度,  $\text{div}$  为  $\mathbb{R}^{8n+7}$  中的普通散度,  $I_n$  为  $n$  阶单位矩阵。

设  $\mathbb{H}(\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$  为四元数代数, 我们用  $\mathbb{O} = \{(x, x') | x, x' \in \mathbb{H}\}$  表示八元数 Cayley 代数, 配备了以下乘法:

$$ab = (x, x')(y, y') = (xy - \bar{y}'x', y'x + x'\bar{y}), \quad \forall a = (x, x'), b = (y, y') \in \mathbb{O}.$$

对  $a = (x, x') \in \mathbb{O}$ , 其共轭定义为  $(\bar{x}, -x')$ , 即  $\bar{a} = \overline{(x, x')} = (\bar{x}, -x')$ 。 $a$  的实部记为  $\text{Re}a = \text{Re}(x, x') = \frac{1}{2}[(x, x') + \overline{(x, x')}]$ ,  $a$  的虚部记为  $\text{Im}a = \text{Im}(x, x') = \frac{1}{2}[(x, x') - \overline{(x, x')}]$ ,  $a$  的模记为  $|a| = (a\bar{a})^{1/2}$ 。

用  $C\mathcal{H}^n = \mathbb{O}^n \times \mathbb{R}^7$  表示 Cayley Heisenberg 群, 其乘法运算如下:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n; s)(b_1, b_2, \dots, b_n; t) = \left( a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, s + t + 2 \sum_{r=1}^n \text{Im} a_r \bar{b}_r \right), \quad (2.1)$$

$$\forall a_r, b_r \in \mathbb{O}, r = 1, 2, \dots, n; \forall s, t \in \mathbb{R}^7.$$

将  $(a, s) = (a_1, a_2, \dots, a_n; s) \in C\mathcal{H}^n$ ,  $(b, t) = (b_1, b_2, \dots, b_n; t) \in C\mathcal{H}^n$  按分量方式表示为:

$$(a, s) = (a_1, a_2, \dots, a_n; s) = (x_{10}, x_{11}, \dots, x_{17}, x_{20}, x_{21}, \dots, x_{27}, \dots, x_{n0}, x_{n1}, \dots, x_{n7}; s_1, s_2, \dots, s_7),$$

$$(b, t) = (b_1, b_2, \dots, b_n; t) = (y_{10}, y_{11}, \dots, y_{17}, y_{20}, y_{21}, \dots, y_{27}, \dots, y_{n0}, y_{n1}, \dots, y_{n7}; t_1, t_2, \dots, t_7).$$

对  $r = 1, 2, \dots, n$ , 左不变向量场  $\{X_{r0}, X_{r1}, \dots, X_{r7}, S_1, S_2, \dots, S_7\}_{r=1}^n$  构成了  $C\mathcal{H}^n$  的李代数  $\mathfrak{l}(C\mathcal{H}^n)$  的一组基 [14], 其中

$$X_{r0} = \frac{\partial}{\partial x_{r0}} - 2 \left( x_{r1} \frac{\partial}{\partial s_1} + x_{r2} \frac{\partial}{\partial s_2} + x_{r3} \frac{\partial}{\partial s_3} + x_{r4} \frac{\partial}{\partial s_4} + x_{r5} \frac{\partial}{\partial s_5} + x_{r6} \frac{\partial}{\partial s_6} + x_{r7} \frac{\partial}{\partial s_7} \right)$$

$$X_{r1} = \frac{\partial}{\partial x_{r1}} + 2 \left( x_{r0} \frac{\partial}{\partial s_1} + x_{r3} \frac{\partial}{\partial s_2} - x_{r2} \frac{\partial}{\partial s_3} + x_{r5} \frac{\partial}{\partial s_4} - x_{r4} \frac{\partial}{\partial s_5} - x_{r7} \frac{\partial}{\partial s_6} + x_{r6} \frac{\partial}{\partial s_7} \right)$$

$$X_{r2} = \frac{\partial}{\partial x_{r2}} - 2 \left( x_{r3} \frac{\partial}{\partial s_1} - x_{r0} \frac{\partial}{\partial s_2} - x_{r1} \frac{\partial}{\partial s_3} - x_{r6} \frac{\partial}{\partial s_4} - x_{r7} \frac{\partial}{\partial s_5} + x_{r4} \frac{\partial}{\partial s_6} + x_{r5} \frac{\partial}{\partial s_7} \right)$$

$$\begin{aligned}
 X_{r3} &= \frac{\partial}{\partial x_{r3}} + 2 \left( x_{r2} \frac{\partial}{\partial s_1} - x_{r1} \frac{\partial}{\partial s_2} + x_{r0} \frac{\partial}{\partial s_3} + x_{r7} \frac{\partial}{\partial s_4} - x_{r6} \frac{\partial}{\partial s_5} + x_{r5} \frac{\partial}{\partial s_6} - x_{r4} \frac{\partial}{\partial s_7} \right) \\
 X_{r4} &= \frac{\partial}{\partial x_{r4}} - 2 \left( x_{r5} \frac{\partial}{\partial s_1} + x_{r6} \frac{\partial}{\partial s_2} + x_{r7} \frac{\partial}{\partial s_3} - x_{r0} \frac{\partial}{\partial s_4} - x_{r1} \frac{\partial}{\partial s_5} - x_{r2} \frac{\partial}{\partial s_6} - x_{r3} \frac{\partial}{\partial s_7} \right) \\
 X_{r5} &= \frac{\partial}{\partial x_{r5}} + 2 \left( x_{r4} \frac{\partial}{\partial s_1} - x_{r7} \frac{\partial}{\partial s_2} + x_{r6} \frac{\partial}{\partial s_3} - x_{r1} \frac{\partial}{\partial s_4} + x_{r0} \frac{\partial}{\partial s_5} - x_{r3} \frac{\partial}{\partial s_6} + x_{r2} \frac{\partial}{\partial s_7} \right) \\
 X_{r6} &= \frac{\partial}{\partial x_{r6}} + 2 \left( x_{r7} \frac{\partial}{\partial s_1} + x_{r4} \frac{\partial}{\partial s_2} - x_{r5} \frac{\partial}{\partial s_3} - x_{r2} \frac{\partial}{\partial s_4} + x_{r3} \frac{\partial}{\partial s_5} + x_{r0} \frac{\partial}{\partial s_6} - x_{r1} \frac{\partial}{\partial s_7} \right) \\
 X_{r7} &= \frac{\partial}{\partial x_{r7}} - 2 \left( x_{r6} \frac{\partial}{\partial s_1} - x_{r5} \frac{\partial}{\partial s_2} - x_{r4} \frac{\partial}{\partial s_3} + x_{r3} \frac{\partial}{\partial s_4} + x_{r2} \frac{\partial}{\partial s_5} - x_{r1} \frac{\partial}{\partial s_6} - x_{r0} \frac{\partial}{\partial s_7} \right) \\
 S_j &= \frac{\partial}{\partial s_j}, j=1,2,\dots,7.
 \end{aligned}$$

上述向量场的李括号计算结果如下:

$$\begin{aligned}
 [X_{r0}, X_{rj}] &= S_j, j=1,\dots,7; \\
 [X_{r1}, X_{r2}] &= 4S_3, \quad [X_{r1}, X_{r3}] = -4S_2, \quad [X_{r1}, X_{r4}] = 4S_5, \\
 [X_{r1}, X_{r5}] &= -4S_4, \quad [X_{r1}, X_{r6}] = -4S_7, \quad [X_{r1}, X_{r7}] = 4S_6; \\
 [X_{r2}, X_{r6}] &= -4S_4, \quad [X_{r2}, X_{r7}] = -4S_5; \\
 [X_{r3}, X_{r4}] &= 4S_7, \quad [X_{r3}, X_{r5}] = -4S_6, \quad [X_{r3}, X_{r6}] = 4S_5, \\
 [X_{r3}, X_{r7}] &= -4S_4; \\
 [X_{r4}, X_{r5}] &= 4S_1, \quad [X_{r4}, X_{r6}] = 4S_2, \quad [X_{r4}, X_{r7}] = 4S_3; \\
 [X_{r5}, X_{r6}] &= -4S_3, \quad [X_{r5}, X_{r7}] = 4S_2; \\
 [X_{r6}, X_{r7}] &= 4S_1,
 \end{aligned}$$

其余均为 0。注意到, Cayley Heisenberg 群  $CH^n$  的李代数  $\mathfrak{l}(CH^n)$  的中心是由  $\{S_1, S_2, \dots, S_7\}$  张成的, 即

$$[X, S_j] = 0, \quad j=1,\dots,7, \quad \forall X \in \mathfrak{l}(CH^n).$$

因此, Cayley Heisenberg 群  $CH^n$  是二步幂零李群, 其上的广义梯度(水平梯度)为

$$\mathfrak{X} = (X_1; X_2; \dots; X_n) = (X_{10}, X_{11}, \dots, X_{17}; \dots; X_{n0}, X_{n1}, \dots, X_{n7}). \quad (2.2)$$

**注 2.1** 对  $r=1,2,\dots,n$ , 我们记

$$R_r = 2 \begin{pmatrix} -x_{r1} & -x_{r2} & -x_{r3} & -x_{r4} & -x_{r5} & -x_{r6} & -x_{r7} \\ x_{r0} & x_{r3} & -x_{r2} & x_{r5} & -x_{r4} & -x_{r7} & x_{r6} \\ -x_{r3} & x_{r0} & x_{r1} & x_{r6} & x_{r7} & -x_{r4} & -x_{r5} \\ x_{r2} & -x_{r1} & x_{r0} & x_{r7} & -x_{r6} & x_{r5} & -x_{r4} \\ -x_{r5} & -x_{r6} & -x_{r7} & x_{r0} & x_{r1} & x_{r2} & x_{r3} \\ x_{r4} & -x_{r7} & x_{r6} & -x_{r1} & x_{r0} & -x_{r3} & x_{r2} \\ x_{r7} & x_{r4} & -x_{r5} & -x_{r2} & x_{r3} & x_{r0} & -x_{r1} \\ -x_{r6} & x_{r5} & x_{r4} & -x_{r3} & -x_{r2} & x_{r1} & x_{r0} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

此时,  $\mathfrak{X} = G' \cdot \nabla$ , 其中

$$G' = \begin{pmatrix} I_8 & \cdots & 0 & R_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_8 & R_n \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

事实上,  $R_r$  是八元数右乘算子的矩阵表示, 它将八元数乘法转化为线性变换(右乘), 便于在矩阵群中研究  $C\mathcal{H}^n$  的结构. 此外,  $\mathfrak{X} = G' \cdot \nabla$  这一等式还表明  $R_r$  将欧氏空间的梯度  $\nabla$  提升为  $C\mathcal{H}^n$  上的“水平”微分算子, 保持八元数代数与 Heisenberg 结构的相容性.

我们注意到, 当方程(1.1)中  $p$  取值为 2 时, 为经典的 Kohn-Laplace 方程

$$\Delta_L u = \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 X_{rm}^2 u = 0.$$

通过直接计算, 我们有

**性质 2.1**  $\Delta_L u = \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 X_{rm} (X_{rm} u) = \operatorname{div}(G \nabla u)$ , 这里

$$G = \begin{pmatrix} I_8 & \cdots & 0 & R_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_8 & R_n \\ R_1^\top & \cdots & R_n^\top & R \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

**证明**

$$\begin{aligned} \Delta_L &= \mathfrak{X} \mathfrak{X}^\top = (X_{10}, X_{11}, \dots, X_{17}; \dots; X_{n0}, X_{n1}, \dots, X_{n7}) \\ &\quad \cdot (X_{10}, X_{11}, \dots, X_{17}; \dots; X_{n0}, X_{n1}, \dots, X_{n7})^\top \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_{10}}, \frac{\partial}{\partial x_{11}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{17}}; \dots; \frac{\partial}{\partial x_{n0}}, \frac{\partial}{\partial x_{n1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n7}}; \frac{\partial}{\partial s_1}, \frac{\partial}{\partial s_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial s_7} \right) \begin{pmatrix} I_8 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_8 \\ R_1^\top & \cdots & R_n^\top \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} I_8 & \cdots & 0 & R_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_8 & R_n \end{pmatrix} \left( \frac{\partial}{\partial x_{10}}, \frac{\partial}{\partial x_{11}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{17}}; \dots; \frac{\partial}{\partial x_{n0}}, \frac{\partial}{\partial x_{n1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n7}}; \frac{\partial}{\partial s_1}, \frac{\partial}{\partial s_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial s_7} \right)^\top \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_{10}}, \frac{\partial}{\partial x_{11}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{17}}; \dots; \frac{\partial}{\partial x_{n0}}, \frac{\partial}{\partial x_{n1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n7}}; \frac{\partial}{\partial s_1}, \frac{\partial}{\partial s_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial s_7} \right) \begin{pmatrix} I_8 & \cdots & 0 & R_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_8 & R_n \\ R_1^\top & \cdots & R_n^\top & R \end{pmatrix} \\ &\quad \left( \frac{\partial}{\partial x_{10}}, \frac{\partial}{\partial x_{11}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{17}}; \dots; \frac{\partial}{\partial x_{n0}}, \frac{\partial}{\partial x_{n1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n7}}; \frac{\partial}{\partial s_1}, \frac{\partial}{\partial s_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial s_7} \right)^\top, \end{aligned}$$

其中

$$R = \sum_{r=1}^n R_r^\top R_r = 4|a|^2 I_7 = 4 \left( \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 x_{rm}^2 \right) I_7. \quad (2.6)$$

结论得证.

定义集合  $\Lambda$  为集合  $\{(1, 2, 3), (1, 4, 5), (1, 7, 6), (2, 4, 6), (2, 5, 7), (3, 4, 7), (3, 6, 5)\}$  中三元组的循环置换, 即

$$\begin{aligned} \Lambda = \{ & (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (1, 4, 5), (4, 5, 1), (5, 1, 4), (1, 7, 6), (7, 6, 1), (6, 1, 7), \\ & (2, 4, 6), (4, 6, 2), (6, 2, 4), (2, 5, 7), (5, 7, 2), (7, 2, 5), (3, 4, 7), (4, 7, 3), \\ & (7, 3, 4), (3, 6, 5), (6, 5, 3), (5, 3, 6) \}. \end{aligned}$$

简记  $\partial \mathbf{a}^\top = \left( \frac{\partial}{\partial x_{10}}, \frac{\partial}{\partial x_{11}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{17}}; \dots; \frac{\partial}{\partial x_{n0}}, \frac{\partial}{\partial x_{n1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n7}} \right)$ ,  $\partial \mathbf{s}^\top = \left( \frac{\partial}{\partial s_1}, \frac{\partial}{\partial s_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial s_7} \right)$ , 则性质 2.1 可以改写为

性质 2.1'

$$\begin{aligned} \Delta_L &= (\partial \mathbf{a}^\top, \partial \mathbf{s}^\top) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} \partial \mathbf{a} \\ \partial \mathbf{s} \end{pmatrix} \\ &= \partial \mathbf{a}^\top \partial \mathbf{a} + \sum_{r=1}^n \partial \mathbf{s}^\top R_r^\top \partial \mathbf{a} + \sum_{r=1}^n \partial \mathbf{a}^\top R_r \partial \mathbf{s} + \sum_{r=1}^n \partial \mathbf{s}^\top R_r^\top R_r \partial \mathbf{a} \\ &= \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 \frac{\partial^2}{\partial x_{rm}^2} + 4 \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 \sum_{j=1}^7 \left( x_{r0} \frac{\partial^2}{\partial x_{rj} \partial s_j} - x_{rj} \frac{\partial^2}{\partial x_{r0} \partial s_j} \right) \\ &\quad + 4 \sum_{r=1}^n \sum_{(i,m,j) \in \Lambda} x_{ri} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_{rm} \partial s_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_{rj} \partial s_m} \right) + 4 \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 \sum_{j=1}^7 x_{rm}^2 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中  $G$  的定义见(2.5),  $(i, m, j) \in \Lambda$ 。

下面我们给出后续证明中涉及到的相关定义。

**定义 2.1 (伸缩变换族)** 对  $(\mathbf{a}, \mathbf{s}) \in C\mathcal{H}^n$ ,  $C\mathcal{H}^n$  上的伸缩变换族  $\{\delta_\theta : \theta > 0\}$  定义为  $\delta_\theta(\mathbf{a}, \mathbf{s}) = (\theta \mathbf{a}, \theta^2 \mathbf{s})$ 。不难发现,  $\delta_\theta$  满足分配律, 即  $\delta_\theta((\mathbf{a}, \mathbf{s})(\mathbf{b}, \mathbf{t})) = \delta_\theta(\mathbf{a}, \mathbf{s})\delta_\theta(\mathbf{b}, \mathbf{t})$ 。齐次维数记为  $Q = 8n + 14$ 。

**定义 2.2** 记  $\mathbf{e} = (\mathbf{0}_{\mathbb{R}^{8n}}, \mathbf{0}_{\mathbb{R}^7}) \in \mathbb{R}^{8n+7}$  为  $C\mathcal{H}^n$  的原点, 对  $\forall (\mathbf{a}, \mathbf{s}) \in C\mathcal{H}^n$ ,  $(\mathbf{a}, \mathbf{s})$  与  $\mathbf{e}$  的距离为

$$d := d(\mathbf{a}, \mathbf{s}) = \left( |\mathbf{a}|^4 + |\mathbf{s}|^2 \right)^{\frac{1}{4}} = \left( \left( \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 |x_{rm}|^2 \right)^2 + \sum_{j=1}^7 s_j^2 \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (2.8)$$

更一般地, 对  $\forall (\mathbf{a}, \mathbf{s}), (\mathbf{b}, \mathbf{t}) \in C\mathcal{H}^n$ ,  $(\mathbf{a}, \mathbf{s})$  与  $(\mathbf{b}, \mathbf{t})$  之间的距离为  $d((\mathbf{a}, \mathbf{s}); (\mathbf{b}, \mathbf{t})) = d((\mathbf{b}, \mathbf{t})^{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{s}))$ , 其中  $(\mathbf{b}, \mathbf{t})^{-1}$  为  $(\mathbf{b}, \mathbf{t})$  关于群  $C\mathcal{H}^n$  上乘法运算(2.1)的逆元, 即  $(\mathbf{b}, \mathbf{t})^{-1} = \left( -\mathbf{b}, -\mathbf{t} + \frac{1}{2} \text{Im} \bar{\mathbf{b}} \mathbf{b} \right)$ 。

由  $\delta_\theta$  的定义式知,  $d(\mathbf{a}, \mathbf{s})$  关于  $\delta_\theta$  是一次齐次的, 即  $d(\delta_\theta(\mathbf{a}, \mathbf{s})) = \theta d(\mathbf{a}, \mathbf{s})$ 。

**定义 2.3 (Cayley Heisenberg 球)** 我们用  $B_k = \{(\mathbf{a}, \mathbf{s}) \in C\mathcal{H}^n \mid d(\mathbf{a}, \mathbf{s}) < k\}$  表示中心为  $\mathbf{e}$ , 半径为  $k > 0$  的 Cayley Heisenberg 球。球  $B_k$  的边界我们记为  $\partial B_k = \{(\mathbf{a}, \mathbf{s}) \in C\mathcal{H}^n \mid d(\mathbf{a}, \mathbf{s}) = k\}$ 。

按照 Heisenberg 群上的水平 Sobolev 空间的一般定义方法(见[10]), Cayley Heisenberg 群  $C\mathcal{H}^n$  上的水平 Sobolev 空间遵循如下定义。

**定义 2.4 (水平 Sobolev 空间)** 设  $\Omega \subset C\mathcal{H}^n$  为一个开集,  $q \in \mathbb{N}, p \geq 1$ , 称集合

$$HW^{q,p} = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid |\mathfrak{X}^\alpha f| \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq q \right\}$$

为水平 Sobolev 空间, 其中  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{8n})$  为多重指标,  $\alpha_i \in \mathbb{N} (i = 1, 2, \dots, 8n)$ ,  $|\alpha| = \sum_{i=1}^{8n} \alpha_i$ ,

$\mathfrak{X}^\alpha f = X_{10}^{\alpha_1} X_{11}^{\alpha_2} \dots X_{17}^{\alpha_8} \dots X_{n0}^{\alpha_{8n-7}} X_{n1}^{\alpha_{8n-6}} \dots X_{n8}^{\alpha_{8n}}$  表示  $f$  的  $\alpha$  阶广义梯度。特别地, 当  $q = 1$  时,  $HW^{1,p}(\Omega)$  是一个赋予如下范数的 Banach 空间:

$$\|f\|_{HW^{1,p}(\Omega)} = \left( \|\mathfrak{X}f\|_{L^p(\Omega)}^p + \|f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left[ \int_\Omega (|\mathfrak{X}f|^p + |f|^p) d\mathbf{a} d\mathbf{s} \right]^{\frac{1}{p}},$$

其中  $|\mathfrak{X}f| = \left( \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 |X_{rm}f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ 。此外, 我们用  $HW_0^{1,p}(\Omega)$  表示  $C_0^\infty(\Omega)$  在  $HW^{1,p}(\Omega)$  中的闭包。

### 3. 频率函数的定义与相关性质

频率函数最初由 Almgren [15] 针对调和函数引入, 是定量研究调和函数唯一延拓性的一个重要工具。后来, Garofalo 和 Lin [1] 将 Almgren 频率函数应用在强唯一延拓性问题中。Garofalo 和 Lanconelli [2] 则推广了关于 Heisenberg 群上次-Laplace 方程的频率函数, 该频率函数的形式也是 Granlund 和 Marola [6] 在欧氏空间上针对  $p$ -调和函数所定义的频率函数的推广。最近几年, Liu [10] 等人给出了 Heisenberg 群上次  $p$ -Laplace 方程的频率函数, 进而建立了该方程解的唯一延拓性。在本节, 我们首先引入 Cayley Heisenberg 群上的 Almgren 频率函数, 并给出建立能量积分的二重性时所需要的一些相关性质。

根据 Heisenberg 群的一般记法, 在形式上, 记

$$\Psi = \frac{|a|^2}{d^2(a, s)}, \quad (a, s) \in C\mathcal{H}^n \setminus \{e\} \quad (3.1)$$

为权函数。

**定义 3.1** 对  $\forall k > 0$ , 定义  $|B_k|_{C\mathcal{H}^n} = \int_{B_k} \Psi d\mathbf{a}ds$ ,  $|\partial B_k|_{C\mathcal{H}^n} = \frac{d}{dk} |B_k|_{C\mathcal{H}^n}$ , 其中  $\Psi$  如(3.1)所定义。

对上述定义作极坐标变换(见[16]), 容易得到, 存在常数  $\lambda = \lambda(Q) > 0$ , 使得

$$|B_k|_{C\mathcal{H}^n} = \lambda k^Q, \quad |\partial B_k|_{C\mathcal{H}^n} = \lambda Q k^{Q-1},$$

其中  $Q = 8n + 7$ 。

回顾余面积公式, 设  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $g \in \text{Lip}(\mathbb{R}^N)$ , 则

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho \int_{\{g=\rho\}} \frac{f(x)}{|\nabla g(x)|} dH_{N-1}, \quad (3.2)$$

其中  $dH_{N-1}$  表示  $\mathbb{R}^N$  中的  $N-1$  维 Hausdorff 测度, 且  $a.e. \rho$  在  $\{g=\rho\}$  上有  $\nabla g \neq 0$ 。则对  $\forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}^{8n+7})$ , 由(3.2)可得

$$\int_{B_k} \varphi d\mathbf{a}ds = \int_0^k d\rho \int_{\partial B_\rho} \frac{\varphi}{|\nabla d|} dH. \quad (3.3)$$

特别地,

$$|B_k|_{C\mathcal{H}^n} = \int_0^k d\rho \int_{\partial B_\rho} \frac{\Psi}{|\nabla d|} dH, \quad |\partial B_k|_{C\mathcal{H}^n} = \int_{\partial B_k} \frac{\Psi}{|\nabla d|} dH. \quad (3.4)$$

类似 Garofalo 与 Lanconelli [2] 在 Heisenberg 群引入的次  $p$ -Laplace 方程的频率函数定义, 我们给出 Cayley Heisenberg 群上次  $p$ -Laplace 方程的频率函数的定义。

**定义 3.2** 设  $\Omega \subset C\mathcal{H}^n$  为一个开集,  $u \in HW^{1,p} \cap C^1(\Omega)$ ,  $\bar{B}_k \subset \Omega$ , 定义能量积分为

$$H_p(k) = \int_{\partial B_k} \frac{|u|^p}{|\nabla d|} \Psi^{\frac{p}{2}} dH, \quad (3.5)$$

其中  $\Psi$  如(3.1)所定义, 且次  $p$ -Dirichlet 积分为

$$D_p(k) = \int_{B_k} |\mathfrak{X}u|^p d\mathbf{a}ds, \quad (3.6)$$

则频率函数定义为

$$N_p(k) = \frac{k^{p-1} D_p(k)}{H_p(k)}, H_p(k) \neq 0.$$

为了在频率函数  $N_p(k)$  局部有界的假设下建立能量积分  $H_p(k)$  的二重性, 进而得到次  $p$ -Laplace 方程解的唯一延拓性, 我们给出以下命题和引理。

**命题 3.1** 等式  $|\mathfrak{X}d|^2 = \frac{|a|^2}{d^2(a, s)}$  成立, 其中  $\mathfrak{X}$ 、 $d$  分别如(2.2)、(2.8)所定义。

**证明** 经计算, 对  $r=1, 2, \dots, n$ , 有

$$\begin{aligned} X_{r0}d &= \frac{\partial}{\partial x_{r0}}d - 2\sum_{j=1}^7 x_{rj} \frac{\partial}{\partial s_j}d = d^{-3} \left( |a|^2 x_{r0} - \sum_{j=1}^7 x_{rj} s_j \right), \\ X_{r1}d &= d^{-3} \left( |a|^2 x_{r1} + x_{r0}s_1 + x_{r3}s_2 - x_{r2}s_3 + x_{r5}s_4 - x_{r4}s_5 - x_{r7}s_6 + x_{r6}s_7 \right), \\ X_{r2}d &= d^{-3} \left( |a|^2 x_{r2} - x_{r3}s_1 + x_{r0}s_2 + x_{r1}s_3 + x_{r6}s_4 + x_{r7}s_5 - x_{r4}s_6 - x_{r5}s_7 \right), \\ X_{r3}d &= d^{-3} \left( |a|^2 x_{r3} + x_{r2}s_1 - x_{r1}s_2 + x_{r0}s_3 + x_{r7}s_4 - x_{r6}s_5 + x_{r5}s_6 - x_{r4}s_7 \right), \\ X_{r4}d &= d^{-3} \left( |a|^2 x_{r4} - x_{r5}s_1 - x_{r6}s_2 - x_{r7}s_3 + x_{r0}s_4 + x_{r1}s_5 + x_{r2}s_6 + x_{r3}s_7 \right), \\ X_{r5}d &= d^{-3} \left( |a|^2 x_{r5} + x_{r4}s_1 - x_{r7}s_2 + x_{r6}s_3 - x_{r1}s_4 + x_{r0}s_5 - x_{r3}s_6 + x_{r2}s_7 \right), \\ X_{r6}d &= d^{-3} \left( |a|^2 x_{r6} + x_{r7}s_1 + x_{r4}s_2 - x_{r5}s_3 - x_{r2}s_4 + x_{r3}s_5 + x_{r0}s_6 - x_{r1}s_7 \right), \\ X_{r7}d &= d^{-3} \left( |a|^2 x_{r7} - x_{r6}s_1 + x_{r5}s_2 + x_{r4}s_3 - x_{r3}s_4 - x_{r2}s_5 + x_{r1}s_6 + x_{r0}s_7 \right), \end{aligned}$$

简记  $D_r = (X_{r0}d, X_{r1}d, X_{r2}d, X_{r3}d, X_{r4}d, X_{r5}d, X_{r6}d, X_{r7}d)^\top$ , ( $r=1, 2, \dots, n$ ), 于是有

$$\begin{aligned} D_r &= (X_{r0}d, X_{r1}d, X_{r2}d, X_{r3}d, X_{r4}d, X_{r5}d, X_{r6}d, X_{r7}d)^\top \\ &= d^{-3} \left[ |a|^2 (x_{r0}, x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}, x_{r4}, x_{r5}, x_{r6}, x_{r7})^\top + \frac{1}{2} R_r (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7)^\top \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中  $R_r$  ( $r=1, 2, \dots, n$ ) 如(2.3)所定义。现在应用(2.6), 得

$$\begin{aligned} |\mathfrak{X}d|^2 &= \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 (X_{rm}d)^2 = \sum_{r=1}^n D_r^\top D_r \\ &= d^{-6} \sum_{r=1}^n \left[ |a|^2 (x_{r0}, x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}, x_{r4}, x_{r5}, x_{r6}, x_{r7}) + \frac{1}{2} (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7) \cdot R_r^\top \right] \\ &\quad \cdot \left[ |a|^2 (x_{r0}, x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}, x_{r4}, x_{r5}, x_{r6}, x_{r7})^\top + \frac{1}{2} R_r (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7)^\top \right] \\ &= d^{-6} \left[ |a|^4 \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 x_{rm}^2 + \frac{1}{2} |a|^2 \sum_{r=1}^n (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7) \cdot R_r^\top \cdot (x_{r0}, x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}, x_{r4}, x_{r5}, x_{r6}, x_{r7})^\top \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} |a|^2 \sum_{r=1}^n (x_{r0}, x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}, x_{r4}, x_{r5}, x_{r6}, x_{r7}) \cdot R_r \cdot (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7)^\top \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^n (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7) \cdot R_r^\top R_r (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7)^\top \right] \\ &= d^{-6} \left[ |a|^4 \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 x_{rm}^2 + |a|^2 \sum_{j=1}^7 s_j^2 \right] + d^{-6} |a|^2 \left[ |a|^2 \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 x_{rm}^2 + \sum_{j=1}^7 s_j^2 \right] \\ &= d^{-6} |a|^2 \left[ \left( \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 x_{rm}^2 \right) + \sum_{j=1}^7 s_j^2 \right] = d^{-6} |a|^2 d^4 = \frac{|a|^2}{d^2(a, s)}. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^n (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7) \cdot R_r^\top \cdot (x_{r0}, x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}, x_{r4}, x_{r5}, x_{r6}, x_{r7})^\top \\ &= \sum_{r=1}^n (x_{r0}, x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}, x_{r4}, x_{r5}, x_{r6}, x_{r7}) \cdot R_r \cdot (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7)^\top = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

命题得证。

**命题 3.2** 等式  $\Delta_L d = \frac{Q-1}{d} \Psi$  成立, 其中  $Q = 8n + 14$ ,  $\Delta_L, d$  分别如(2.7)、(2.8)所定义。

**证明** 由(2.7)与(2.8), 有

$$\begin{aligned} \Delta_L d = & \left[ \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 \frac{\partial^2}{\partial x_{rm}^2} + 4 \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^7 \left( x_{r0} \frac{\partial^2}{\partial x_{rj} \partial s_j} - x_{rj} \frac{\partial^2}{\partial x_{r0} \partial s_j} \right) \right. \\ & \left. + 4 \sum_{r=1}^n \sum_{(i,m,j) \in \Lambda} x_{ri} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_{rm} \partial s_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_{rj} \partial s_m} \right) + 4 \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 \sum_{j=1}^7 x_{rm}^2 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right] d(\mathbf{a}, \mathbf{s}), \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中  $(i, m, j) \in \Lambda$ 。对  $j = 1, 2, \dots, 7$ , 有  $\frac{\partial}{\partial s_j} d(\mathbf{a}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2} s_j d^{-3}(\mathbf{a}, \mathbf{s})$ , 于是对  $r = 1, 2, \dots, n; (i, m, j) \in \Lambda$ , 有

$$\frac{\partial^2}{\partial x_{rj} \partial s_j} d(\mathbf{a}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2} s_j \frac{\partial}{\partial x_{rj}} d^{-3}(\mathbf{a}, \mathbf{s}) = -\frac{3}{2} s_j x_{rj} |\mathbf{a}|^2 d^{-7}(\mathbf{a}, \mathbf{s}), \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_{r0} \partial s_j} d(\mathbf{a}, \mathbf{s}) = -\frac{3}{2} s_j x_{r0} |\mathbf{a}|^2 d^{-7}(\mathbf{a}, \mathbf{s}), \quad (3.11)$$

$$x_{ri} \frac{\partial^2}{\partial x_{rm} \partial s_j} d(\mathbf{a}, \mathbf{s}) = -\frac{3}{2} x_{ri} s_j x_{rm} |\mathbf{a}|^2 d^{-7}(\mathbf{a}, \mathbf{s}), \quad (3.12)$$

$$x_{ri} \frac{\partial^2}{\partial x_{rj} \partial s_m} d(\mathbf{a}, \mathbf{s}) = -\frac{3}{2} x_{ri} s_m x_{rj} |\mathbf{a}|^2 d^{-7}(\mathbf{a}, \mathbf{s}). \quad (3.13)$$

结合(3.10)与(3.11), 我们有

$$\left[ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^7 \left( x_{r0} \frac{\partial^2}{\partial x_{rj} \partial s_j} - x_{rj} \frac{\partial^2}{\partial x_{r0} \partial s_j} \right) \right] d(\mathbf{a}, \mathbf{s}) = 0. \quad (3.14)$$

由(3.12)与(3.13)可得

$$\left[ \sum_{r=1}^n \sum_{(i,m,j) \in \Lambda} x_{ri} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_{rm} \partial s_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_{rj} \partial s_m} \right) \right] d(\mathbf{a}, \mathbf{s}) = 0. \quad (3.15)$$

直接计算得到

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 \frac{\partial^2}{\partial x_{rm}^2} \right] d(\mathbf{a}, \mathbf{s}) &= \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 \left[ d^{-3} (|\mathbf{a}|^2 + 2x_{rm}^2) - 3d^{-7} x_{rm}^2 |\mathbf{a}|^4 \right] \\ &= 8n \cdot d^{-3} |\mathbf{a}|^2 + 2d^{-3} |\mathbf{a}|^2 - 3d^{-7} |\mathbf{a}|^4 \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 x_{rm}^2, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \left[ 4 \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 \sum_{j=1}^7 x_{rm}^2 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right] d(\mathbf{a}, \mathbf{s}) &= \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 \sum_{j=1}^7 x_{rm}^2 (2d^{-3} - 3d^{-7} s_j^2) \\ &= 14 \cdot d^{-3} |\mathbf{a}|^2 - 3d^{-7} |\mathbf{s}|^2 \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 x_{rm}^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

将(3.16)与(3.17)相加, 得

$$\begin{aligned}
 & \left[ \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 \frac{\partial^2}{\partial x_{rm}^2} + 4 \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 \sum_{j=1}^7 x_{rm}^2 \frac{\partial^2}{\partial s_j^2} \right] d(a, s) \\
 &= (8n+14)d^{-3}|a|^2 + 2d^{-3}|a|^2 - 3d^{-7}(|a|^4 + |s|^2) \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 x_{rm}^2 \\
 &= (8n+14)d^{-3}|a|^2 + 2d^{-3}|a|^2 - 3d^{-7}d^4|a|^2 \\
 &= (8n+14)d^{-3}|a|^2 + 2d^{-3}|a|^2 - 3d^{-3}|a|^2 \\
 &= \frac{8n+14-1}{d} \frac{|a|^2}{d^2} = \frac{Q-1}{d} \Psi.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

最后, 将(3.14)、(3.15)以及(3.18)代入(3.9), 即得结论。

**引理 3.1** 在  $CH^n \setminus e$  上, 有

$$\langle \mathfrak{X}d, \mathfrak{X}\Psi \rangle = \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 X_{rm} dX_{rm} \Psi = 0, \tag{3.19}$$

其中  $\mathfrak{X}, d, \Psi$  如(2.2), (2.8), (3.1)所定义。

**证明** 由(3.1), 对  $r=1, 2, \dots, n; m=0, 1, \dots, 7$ , 有

$$\frac{\partial}{\partial x_{rm}} \Psi = 2d^{-6} x_{rm} |s|^2, \quad \frac{\partial}{\partial s_j} \Psi = -d^{-6} s_j |a|^2. \tag{3.20}$$

于是, 有

$$\begin{aligned}
 X_{r0} \Psi &= 2d^{-6} \left( x_{r0} |s|^2 + |a|^2 \sum_{j=1}^7 x_{rj} s_j \right), \\
 X_{r1} \Psi &= 2d^{-6} \left[ x_{r1} |s|^2 - |a|^2 (x_{r0} s_1 + x_{r3} s_2 - x_{r2} s_3 + x_{r5} s_4 - x_{r4} s_5 - x_{r7} s_6 + x_{r6} s_7) \right], \\
 X_{r2} \Psi &= 2d^{-6} \left[ x_{r2} |s|^2 + |a|^2 (x_{r3} s_1 - x_{r0} s_2 - x_{r1} s_3 - x_{r6} s_4 - x_{r7} s_5 + x_{r4} s_6 + x_{r5} s_7) \right], \\
 X_{r3} \Psi &= 2d^{-6} \left[ x_{r3} |s|^2 - |a|^2 (x_{r2} s_1 - x_{r1} s_2 + x_{r0} s_3 + x_{r7} s_4 - x_{r6} s_5 + x_{r5} s_6 - x_{r4} s_7) \right], \\
 X_{r4} \Psi &= 2d^{-6} \left[ x_{r4} |s|^2 + |a|^2 (x_{r5} s_1 + x_{r6} s_2 + x_{r7} s_3 - x_{r0} s_4 - x_{r1} s_5 - x_{r2} s_6 - x_{r3} s_7) \right], \\
 X_{r5} \Psi &= 2d^{-6} \left[ x_{r5} |s|^2 - |a|^2 (x_{r4} s_1 - x_{r7} s_2 + x_{r6} s_3 - x_{r1} s_4 + x_{r0} s_5 - x_{r3} s_6 + x_{r2} s_7) \right], \\
 X_{r6} \Psi &= 2d^{-6} \left[ x_{r6} |s|^2 - |a|^2 (x_{r7} s_1 + x_{r4} s_2 - x_{r5} s_3 - x_{r2} s_4 + x_{r3} s_5 + x_{r0} s_6 - x_{r1} s_7) \right], \\
 X_{r7} \Psi &= 2d^{-6} \left[ x_{r7} |s|^2 + |a|^2 (x_{r6} s_1 - x_{r5} s_2 - x_{r4} s_3 + x_{r3} s_4 + x_{r2} s_5 - x_{r1} s_6 - x_{r0} s_7) \right].
 \end{aligned}$$

简记  $D'_r = (X_{r0} \Psi, X_{r1} \Psi, X_{r2} \Psi, X_{r3} \Psi, X_{r4} \Psi, X_{r5} \Psi, X_{r6} \Psi, X_{r7} \Psi)^\top$ ,  $(r=1, 2, \dots, n)$ , 则有

$$\begin{aligned}
 D'_r &= (X_{r0} \Psi, X_{r1} \Psi, X_{r2} \Psi, X_{r3} \Psi, X_{r4} \Psi, X_{r5} \Psi, X_{r6} \Psi, X_{r7} \Psi)^\top \\
 &= 2d^{-6} \left[ |s|^2 (x_{r0}, x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}, x_{r4}, x_{r5}, x_{r6}, x_{r7})^\top - \frac{1}{2} |a|^2 R_r (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7)^\top \right].
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

结合(3.7)、(3.21)、(2.6)以及(3.8), 得

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 X_{rm} dX_{rm} \Psi = \sum_{r=1}^n D_r'^\top D_r' \\
& = \sum_{r=1}^n d^{-3} \left[ |a|^2 (x_{r0}, x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}, x_{r4}, x_{r5}, x_{r6}, x_{r7}) + \frac{1}{2} (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7) R_r^\top \right] \\
& \quad \cdot 2d^{-6} \left[ |s|^2 (x_{r0}, x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}, x_{r4}, x_{r5}, x_{r6}, x_{r7})^\top - \frac{1}{2} |a|^2 R_r (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7)^\top \right] \\
& = 2d^{-9} \left[ |a|^2 |s|^2 \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 x_{rm}^2 + \frac{1}{2} |s|^2 \sum_{r=1}^n (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7) \cdot R_r^\top \cdot (x_{r0}, x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}, x_{r4}, x_{r5}, x_{r6}, x_{r7})^\top \right. \\
& \quad - \frac{1}{2} |a|^4 \sum_{r=1}^n (x_{r0}, x_{r1}, x_{r2}, x_{r3}, x_{r4}, x_{r5}, x_{r6}, x_{r7}) \cdot R_r \cdot (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7)^\top \\
& \quad \left. - \frac{1}{4} |a|^2 \sum_{r=1}^n (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7) \cdot R_r^\top R_r (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7)^\top \right] \\
& = 2d^{-9} \left[ |a|^4 |s|^2 - |a|^4 |s|^2 \right] = 0,
\end{aligned}$$

结论得证。

此时, (3.1)可改写为

$$\Psi = |\mathfrak{X}d|^2. \quad (3.22)$$

下面, 我们给出  $H_p(k)$  与  $D_p(k)$  的一些性质。

**引理 3.2** 设  $u$  是定义在  $B_K$  上的(1.1)的弱解, 即  $u$  满足(1.3)或(1.4), 则对  $\forall k \in (0, K)$ , 有

$$D_p(k) = \int_{\partial B_k} |\mathfrak{X}u|^{p-2} u \frac{\langle \mathfrak{X}u, \mathfrak{X}d \rangle}{|\nabla d|} dH, \quad \forall 1 < p < \infty. \quad (3.23)$$

**证明** 当  $p=2$  时, 由散度定理[17]易得(3.23)。对  $1 < p < \infty$  且  $p \neq 2$  情形, 注意到  $u \notin C^2(B_K)$ , 这时需要用到一种近似方法[18]。设  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,  $M$  为满足  $\bar{B}_k \subset \bar{M} \subset \Omega$  的有界开集, 类似[16]中的做法, 构造函数序列  $\{u_\varepsilon^\# | \varepsilon \in (0, 1)\} \subset HW^{1,p}(M)$ , 使得这些  $u_\varepsilon^\#$  的极小化变分积分  $I_\varepsilon(v)$  对所有容许函数  $v \in A_u(M)$  均有效, 其中  $A_u(M) = \{v \in HW^{1,p}(M) | v - u \in HW_0^{1,p}(M)\}$ ,  $I_\varepsilon(v) = \int_M \left( \varepsilon + |\mathfrak{X}v|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} d\mathbf{a}ds$ 。

我们知道, 极小化函数  $u_\varepsilon^\#$  是唯一的, 从而  $u_\varepsilon^\#$  满足

$$\sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 X_{rm} \left[ \left( \varepsilon + |\mathfrak{X}u_\varepsilon^\#|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} X_{rm} u_\varepsilon^\# \right] = 0. \quad (3.24)$$

考虑向量场  $F_\varepsilon = \left( \varepsilon + |\mathfrak{X}u_\varepsilon^\#|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \mathfrak{X}u_\varepsilon^\#$ , 有

$$\begin{aligned}
& \int_{B_k} \left( \varepsilon + |\mathfrak{X}u_\varepsilon^\#|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} |\mathfrak{X}u_\varepsilon^\#|^2 d\mathbf{a}ds \\
& = \int_{\partial B_k} \left( \varepsilon + |\mathfrak{X}u_\varepsilon^\#|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 X_{rm} u_\varepsilon^\# \cdot \frac{X_{rm} d}{|\nabla d|} u_\varepsilon^\# dH - \int_{B_k} \operatorname{div} \left( \varepsilon + |\mathfrak{X}u_\varepsilon^\#|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \mathfrak{X}u_\varepsilon^\# \cdot u_\varepsilon^\# d\mathbf{a}ds \\
& = \int_{\partial B_k} \left( \varepsilon + |\mathfrak{X}u_\varepsilon^\#|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \cdot u_\varepsilon^\# \cdot \frac{\langle \mathfrak{X}u_\varepsilon^\#, \mathfrak{X}d \rangle}{|\nabla d|} dH - \int_{B_k} \sum_{r=1}^n \sum_{m=0}^7 X_{rm} \left[ \left( \varepsilon + |\mathfrak{X}u_\varepsilon^\#|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} X_{rm} u_\varepsilon^\# \right] d\mathbf{a}ds \\
& = \int_{\partial B_k} \left( \varepsilon + |\mathfrak{X}u_\varepsilon^\#|^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \cdot u_\varepsilon^\# \cdot \frac{\langle \mathfrak{X}u_\varepsilon^\#, \mathfrak{X}d \rangle}{|\nabla d|} dH,
\end{aligned} \quad (3.25)$$

其中应用了散度定理[17]和(3.24)。

注意到,  $\exists N = N(p, Q, M) > 0$ , 使得

$$\max_{(a,s) \in \bar{M}} |\mathfrak{X}u_\varepsilon^\#(a,s)| \leq N, \quad (3.26)$$

且对每一个  $(a,s) \in M$  以及上述  $N, \mathfrak{X}u_\varepsilon^\#$  具有指数为  $\beta$  ( $\beta = \beta(p, Q) > 0$ ) 的 Hölder 连续性, 即对  $(a,s), (b,t) \in M$ , 有

$$|\mathfrak{X}u_\varepsilon^\#(a,s) - \mathfrak{X}u_\varepsilon^\#(b,t)| \leq N [d((a,s), (b,t))]^\beta. \quad (3.27)$$

于是由(3.26)和 Poincaré 不等式, 得  $\|u_\varepsilon^\#\|_{HW^{1,p}(M)} \leq C$ 。注意, 这里的正常数  $C$  与  $\varepsilon$  无关(见[19])。由  $HW^{1,p}(M)$  的弱紧性知, 存在  $\{u_\varepsilon^\#\}$  的一个子列, 不妨仍记为  $\{u_\varepsilon^\#\}$ , 存在  $\mu \in A_u(M)$ , 使得当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时,  $u_\varepsilon^\# \rightharpoonup \mu(HW^{1,p}(M))$ 。因为  $u_\varepsilon^\#$  是  $I_\varepsilon(v)$  的极小值点, 故对  $\forall \tau \in A_u(M)$ , 有

$$\int_M |\mathfrak{X}\tau|^p \, d\mathbf{a}ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(\tau) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(u_\varepsilon^\#) = \int_M |\mathfrak{X}\mu|^p \, d\mathbf{a}ds.$$

即  $\mu$  是  $A_u(M)$  中使得  $\int_M |\mathfrak{X}v|^p \, d\mathbf{a}ds$  最小的函数, 因此  $\mu = u$ 。

我们注意到, (3.26)和(3.27)表明  $\{\mathfrak{X}u_\varepsilon^\#\}$  是一致有界且等度连续的。下面, 我们将说明  $\{u_\varepsilon^\#\}$  是一致有界且等度连续的。应用次  $p$ -Laplace 方程的最大值原理[20], 并且  $u_\varepsilon^\# - u \in HW_0^{1,p}(M)$ , 由此可得  $\{u_\varepsilon^\#\}$  是一致有界的。此外, 根据(3.26)和 Morry 引理[21]可得  $\{u_\varepsilon^\#\}$  是等度连续的。此时, 我们应用 Ascoli-Arzelà 定理知, 存在  $\{u_\varepsilon^\#\}$  的一个子列和  $\{\mathfrak{X}u_\varepsilon^\#\}$  的一个子列, 这里我们仍旧记为  $\{u_\varepsilon^\#\}$  和  $\{\mathfrak{X}u_\varepsilon^\#\}$ , 使得

$$u_\varepsilon^\# \rightarrow u, \quad \mathfrak{X}u_\varepsilon^\# \rightarrow \mathfrak{X}u (\varepsilon \rightarrow 0).$$

现在, 在等式(3.25)两端令  $\varepsilon \rightarrow 0$  即得(3.23), 结论得证。

**注 3.1** 虽然 Cayley Heisenberg 群  $CH^n$  本身是非交换、非椭圆的幂零李群, 但我们在证明中是通过局部化和嵌入欧氏空间的方式, 将问题转化为在开集  $M \subset \Omega$  上定义的变分问题, 并且水平 Sobolev 空间  $HW^{1,p}(M)$  具有良好的弱紧性与正则性, 因此我们所取的函数序列  $\{u_\varepsilon^\# | \varepsilon \in (0,1)\} \subset HW^{1,p}(M)$  适用于散度定理、Poincaré 不等式和 Ascoli-Arzelà 定理等工具。

**引理 3.3** 设  $u$  是定义在  $B_K$  上的方程(1.1)的弱解, 即  $u$  满足(1.3)或(1.4), 则  $\exists k_0 = k_0(Q)$ , 使得  $u|_{B_{k_0}} \equiv 0$ ; 或者对每个  $k \in (0, k_0)$ , 都有  $H_p(k) \neq 0$  成立。

**证明** 假设对某个  $k_0 \leq K$ , 有  $H_p(k_0) = 0$ , 则  $u|_{\partial B_{k_0}} = 0$ , 于是由(3.23)知,  $D_p(k_0) = 0$ , 即  $\mathfrak{X}u|_{B_{k_0}} = 0$ 。因此,  $u|_{B_{k_0}} \equiv 0$ 。

**引理 3.4** 设  $u \in C^1(B_K)$ , 对  $\forall k \in (0, K)$ , 有

$$H'_p(k) = \frac{Q-1}{k} H_p(k) + p \int_{\partial B_k} |u|^{p-2} u \Psi^{\frac{p-1}{2}} \frac{\langle \mathfrak{X}u, \mathfrak{X}d \rangle}{|\nabla d|} \, dH, \quad (3.28)$$

且

$$H'_p(k) \leq \frac{Q-1}{k} H_p(k) + p \int_{\partial B_k} |u|^{p-1} |\mathfrak{X}u| \Psi^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{|\nabla d|} \, dH, \quad (3.29)$$

其中  $Q = 8n + 14$ 。

**证明** 由  $\Psi$  的等价定义式(3.22)、 $H_p(k)$  的定义式(3.5)、(3.19)以及散度定理[17], 得

$$\begin{aligned}
H_p(k) &= \int_{\partial B_k} \frac{|u|^p}{|\nabla d|} \Psi^{\frac{p}{2}} dH = \int_{\partial B_k} \frac{|u|^p}{|\nabla d|} \Psi^{\frac{p-1}{2}} |\mathfrak{X}d|^2 dH = \int_{\partial B_k} |u|^p \Psi^{\frac{p-1}{2}} \frac{\langle \mathfrak{X}d, \mathfrak{X}d \rangle}{|\nabla d|} dH \\
&= \int_{\partial B_k} |u|^p \Psi^{\frac{p-1}{2}} \langle C'^{\top} \mathfrak{X}d, \mathbf{n} \rangle dH = \int_{B_k} \operatorname{div} \left( C'^{\top} \mathfrak{X}d |u|^p \Psi^{\frac{p-1}{2}} \right) d\mathbf{a}ds \\
&= \int_{B_k} \left[ |u|^p \Psi^{\frac{p-1}{2}} \Delta_L d + p |u|^{p-2} u \langle \mathfrak{X}u, \mathfrak{X}d \rangle \Psi^{\frac{p-1}{2}} + \left( \frac{p}{2} - 1 \right) \Psi^{\frac{p-2}{2}} |u|^p \langle \mathfrak{X}d, \mathfrak{X}\Psi \rangle \right] d\mathbf{a}ds \\
&= \int_{B_k} |u|^p \Psi^{\frac{p-1}{2}} \Delta_L d d\mathbf{a}ds + p \int_{B_k} |u|^{p-2} u \langle \mathfrak{X}u, \mathfrak{X}d \rangle \Psi^{\frac{p-1}{2}} d\mathbf{a}ds,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

其中  $\mathbf{n}$  为  $\partial B_k$  的单位外法向量。进一步地, 由命题 3.2, (3.30) 可以重写为

$$\begin{aligned}
H_p(k) &= \int_{B_k} |u|^p \Psi^{\frac{p-1}{2}} \frac{Q-1}{d} \Psi d\mathbf{a}ds + p \int_{B_k} |u|^{p-2} u \langle \mathfrak{X}u, \mathfrak{X}d \rangle \Psi^{\frac{p-1}{2}} d\mathbf{a}ds \\
&= (Q-1) \int_{B_k} |u|^p \Psi^{\frac{p}{2}} \frac{1}{d} d\mathbf{a}ds + p \int_{B_k} |u|^{p-2} u \langle \mathfrak{X}u, \mathfrak{X}d \rangle \Psi^{\frac{p-1}{2}} d\mathbf{a}ds
\end{aligned}$$

于是, 有

$$\begin{aligned}
H'_p(k) &= (Q-1) \frac{d}{dk} \int_{B_k} |u|^p \Psi^{\frac{p}{2}} \frac{1}{d} d\mathbf{a}ds + p \frac{d}{dk} \int_{B_k} |u|^{p-2} u \langle \mathfrak{X}u, \mathfrak{X}d \rangle \Psi^{\frac{p-1}{2}} d\mathbf{a}ds \\
&= (Q-1) \frac{d}{dk} \int_0^k d\rho \int_{\partial B_k} \frac{|u|^p}{|\nabla d|} \frac{1}{d} \Psi^{\frac{p}{2}} dH + p \frac{d}{dk} \int_0^k d\rho \int_{\partial B_k} \frac{|u|^{p-2} u \langle \mathfrak{X}u, \mathfrak{X}d \rangle}{|\nabla d|} \Psi^{\frac{p-1}{2}} dH \\
&= \frac{Q-1}{k} \int_{\partial B_k} \frac{|u|^p}{|\nabla d|} \Psi^{\frac{p}{2}} dH + p \int_{\partial B_k} \frac{|u|^{p-2} u \langle \mathfrak{X}u, \mathfrak{X}d \rangle}{|\nabla d|} \Psi^{\frac{p-1}{2}} dH,
\end{aligned}$$

由  $H_p(k)$  的定义式(3.5)即得(3.28)。此外, 由  $\Psi$  的等价定义式(3.22)和 Cauchy-Schwarz 不等式, 容易得到

$$\begin{aligned}
H'_p(k) &= \frac{Q-1}{k} H_p(k) + p \int_{\partial B_k} \frac{|u|^{p-2} u \langle \mathfrak{X}u, \mathfrak{X}d \rangle}{|\nabla d|} \Psi^{\frac{p-1}{2}} dH \\
&\leq \frac{Q-1}{k} H_p(k) + p \int_{\partial B_k} |u|^{p-1} \frac{1}{|\nabla d|} \Psi^{\frac{p-1}{2}} |\mathfrak{X}u| |\mathfrak{X}d| dH \\
&= \frac{Q-1}{k} H_p(k) + p \int_{\partial B_k} |u|^{p-1} \frac{1}{|\nabla d|} \Psi^{\frac{p-1}{2}} |\mathfrak{X}u| dH.
\end{aligned}$$

综上, 结论得证。

#### 4. 主要结果的证明

下面给出本文主要结果的证明。

**定理 1.1 的证明** 任取  $k_2 \in (k_0, K_0]$ , 当  $H_p(k)$  关于  $k$  为减函数时, 立即得到(1.2)。此时我们考虑  $H_p(k)$  关于  $k$  为非递减的情形, 又由于  $H_p(k)$  的连续性, 可以知道,  $\exists k_1 \in (k_0, k_2]$ , 使得对  $\forall \kappa \in [k_1, k_2]$ , 有

$$H_p(\kappa) \leq H_p(k_2). \tag{4.1}$$

对不等式(3.28)两边在  $[k_1, k_2]$  上关于  $k$  同时积分, 得

$$H_p(k_2) - H_p(k_1) \leq (Q-1) \int_{k_1}^{k_2} \frac{H_p(k)}{k} dk + p \int_{k_1}^{k_2} \left( \int_{\partial B_k} |u|^{p-1} |\mathfrak{X}u| \Psi^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{|\nabla d|} dH \right) dk := I + II, \tag{4.2}$$

其中  $I, II$  如上式所定义。现在我们对  $I$  进行估计, 由(4.1), 立即得到

$$I \leq (Q-1)H_p(k_2) \ln \frac{k_2}{k_1}. \quad (4.3)$$

接下来我们估计  $II$ , 由  $\Psi$  的定义式(3.1)、Young 不等式和(3.3), 得

$$\begin{aligned} II &= p \int_{k_1}^{k_2} \left( \int_{\partial B_k} \left( k^{\frac{p-1}{p}} |u|^{p-1} \right) \left( k^{\frac{p-1}{p}} |\mathfrak{X}u| \right) \Psi^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{|\nabla d|} dH \right) dk \\ &\leq \varepsilon \int_{k_1}^{k_2} k^{p-1} \left( \int_{\partial B_k} \frac{|\mathfrak{X}u|^p}{|\nabla d|} dH \right) dk + C(p, \varepsilon) \int_{k_1}^{k_2} \frac{1}{k} \left( \int_{\partial B_k} \Psi^{\frac{p}{2}} \frac{|u|^p}{|\nabla d|} dH \right) dk \\ &\leq \varepsilon k_2^{p-1} \int_0^{k_2} \left( \int_{\partial B_{k_2}} \frac{|\mathfrak{X}u|^p}{|\nabla d|} dH \right) dk + C(p, \varepsilon) \int_{k_1}^{k_2} \frac{1}{k} H_p(k) dk \\ &= \varepsilon k_2^{p-1} \int_{B_{k_2}} |\mathfrak{X}u|^p d\mathbf{a}ds + C(p, \varepsilon) H_p(k_2) \ln \frac{k_2}{k_1}. \end{aligned}$$

由(3.6), 即得

$$II \leq \varepsilon k_2^{p-1} D_p(k) + C(p, \varepsilon) H_p(k_2) \ln \frac{k_2}{k_1}. \quad (4.4)$$

于是将(4.3), (4.4)代入(4.2), 得

$$H_p(k_2) - H_p(k_1) \leq (Q-1)H_p(k_2) \ln \frac{k_2}{k_1} + \varepsilon k_2^{p-1} D_p(k) + C(p, \varepsilon) H_p(k_2) \ln \frac{k_2}{k_1}. \quad (4.5)$$

根据假设, 对这样取定的  $k_2$ , 有  $H_p(k_2) \neq 0$  且  $H_p(k_2) = \max_{k \in [k_1, k_2]} H_p(k)$ 。此时, 我们固定  $\varepsilon$ , 对不等式(4.5)两边同时除以  $H_p(k_2)$ , 得

$$\frac{H_p(k_2) - H_p(k_1)}{H_p(k_2)} \leq [(Q-1) + C(p, \varepsilon)] \ln \frac{k_2}{k_1} + \varepsilon N_p(k_2). \quad (4.6)$$

我们继续估计(4.6)的右端项。由于  $\|N_p(k)\|_{L^\infty(k_0, K_0)} < \infty$ , 即存在足够大的正常数  $m$ , 使得  $\|N_p(k)\|_{L^\infty(k_0, K_0)} \leq m$ ,

不妨设  $\varepsilon = \frac{1}{4m}$ 。我们可以取到足够接近  $k$  的  $k^* \in (k, k_2]$ , 使得对  $\forall k_1 \in [k^*, k_2]$ , 有

$$[(Q-1) + C(p, \varepsilon)] \ln \frac{k_2}{k_1} \leq \frac{1}{4}, \quad (4.7)$$

且有

$$\varepsilon N_p(k_2) \leq \varepsilon \|N_p(k)\|_{L^\infty(k_0, K_0)} \leq \frac{1}{4}, \quad (4.8)$$

代入(4.7)和(4.8)至(4.6), 即得(1.2)。结论得证。

**定理 1.2 的证明** 设  $u \in HW^{1,p}(\Omega)$  为方程(1.1)的非平凡解, 并且有  $u|_{\bar{B}_{k_1}} = 0$ ,  $u|_{B_{k_2}} \neq 0$ , 其中  $B_{k_1}$ 、 $B_{k_2}$  为满足  $\bar{B}_{k_1} \subset B_{k_2} \subset \Omega$  的开球。对于  $\omega > 0$ , 定义

$$\omega^* = \sup \left\{ \omega > 0 : u|_{\partial B_\omega} \equiv 0 \right\},$$

故  $\omega^* \in [k_1, k_2)$ 。根据引理 3.3, 对  $\forall \mathfrak{A} \in (\omega^*, k_2]$ , 我们有  $H_p(\mathfrak{A}) \neq 0$ 。根据  $H_p(k)$  的定义式, 此时有  $H_p(\mathfrak{A}) > 0$ , 故由定理 1.1 知,  $\exists k^* \in (\omega^*, k_2]$ , 使得对  $\forall k \in (\omega^*, k^*]$ , 有

$$H_p(k^*) \leq 2H_p(k).$$

显然, 这是矛盾的. 事实上, 当  $k \rightarrow \omega^*$  时,  $H_p(k) \rightarrow 0$ . 结论得证.

## 5. 总结与展望

本文通过引入  $CH^n$  群上的 Almgren 频率函数, 并证明了该频率函数的二重性, 进而得到了次椭圆  $p$ -Laplace 方程的解的唯一延拓性. 我们将  $\mathbb{H}^n$  群上次  $p$ -Laplace 方程的解的唯一延拓性结果推广至更为复杂的  $CH^n$  群. 但对于更一般的群——Carnot 群, 本文并未展开讨论, 我们期望在后续的工作中完成.

## 基金项目

赣南师范大学研究生创新基金项目(YCXJ25-A11); 江西省自然科学基金重点项目(NO. 20242BAB26003).

## 参考文献

- [1] Garofalo, N. and Lin, F.H. (1987) Unique Continuation for Elliptic Operators: A Geometric-Variational Approach. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **40**, 347-366. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160400305>
- [2] Garofalo, N. and Lanconelli, E. (1990) Frequency Functions on the Heisenberg Group, the Uncertainty Principle and Unique Continuation. *Annales de l'Institut Fourier*, **40**, 313-356. <https://doi.org/10.5802/aif.1215>
- [3] Garofalo, N. and Vassilev, D. (2007) Strong Unique Continuation Properties of Generalized Baouendi-Grushin Operators. *Communications in Partial Differential Equations*, **32**, 643-663. <https://doi.org/10.1080/03605300500532905>
- [4] Liu, H.R. and Yang, X.P. (2013) Strong Unique Continuation of Sub-Elliptic Operator on the Heisenberg Group. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, **34**, 461-478. <https://doi.org/10.1007/s11401-013-0768-x>
- [5] Guo, C.Y. and Kar, M. (2016) Quantitative Uniqueness Estimates for  $p$ -Laplace Type Equations in the Plane. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **143**, 19-44. <https://doi.org/10.1016/j.na.2016.04.015>
- [6] Granlund, S. and Marola, N. (2014) On the Problem of Unique Continuation for the  $p$ -Laplace Equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **101**, 89-97. <https://doi.org/10.1016/j.na.2014.01.020>
- [7] Banerjee, A. and Mallick, A. (2020) On the Strong Unique Continuation Property of a Degenerate Elliptic Operator with Hardy-Type Potential. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* (1923 -), **199**, 1-21. <https://doi.org/10.1007/s10231-019-00864-7>
- [8] Laurent, C. and Léautaud, M. (2020) Quantitative Unique Continuation for Hyperbolic and Hypoelliptic Equations. *Séminaire Laurent Schwartz—EDP et applications*, **6**, 1-26. <https://doi.org/10.5802/slsedp.137>
- [9] Blair, D. (2026) A Frequency Function Approach to Quantitative Unique Continuation for Elliptic Equations. arXiv: 2506.19130. <https://arxiv.org/abs/2506.19130>
- [10] Liu, H.R., Liu, F. and Wu, H. (2019) The Unique Continuation Property of  $p$ -Harmonic Functions on the Heisenberg Group. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **99**, 219-230. <https://doi.org/10.1017/s0004972718001016>
- [11] Wang, J.L. and Liao, D.N. (2008) On Unique Continuation Properties for the Sub-Laplacian on the Quaternionic Heisenberg Group. *Journal of University of Chinese Academy of Sciences*, **25**, 1-11.
- [12] Zhu, L. (2002) A Fundamental Solution for the Laplace Operator on the Quaternionic Heisenberg Group. *Acta Mathematica Scientia*, **22**, 369-378. [https://doi.org/10.1016/s0252-9602\(17\)30306-5](https://doi.org/10.1016/s0252-9602(17)30306-5)
- [13] Niu, P.C. and Wang, J.L. (2010) On Unique Continuation Properties for Sub-Laplacian on Carnot Groups. *Acta Mathematica Scientia*, **30**, 1776-1784. [https://doi.org/10.1016/s0252-9602\(10\)60171-3](https://doi.org/10.1016/s0252-9602(10)60171-3)
- [14] Luan, J.W. and Zhu, F.L. (2005) The Heat Kernel on the Cayley Heisenberg Group. *Acta Mathematica Scientia*, **25**, 687-702. [https://doi.org/10.1016/s0252-9602\(17\)30209-6](https://doi.org/10.1016/s0252-9602(17)30209-6)
- [15] Almgren Jr., F.J. (1978) Dirichlet's Problem for Multiple Valued Functions and the Regularity of Mass Minimizing Integral Currents. *Proceedings of the Japan-United States Seminar*, Tokyo, 1-6. <https://zbmath.org/0439.49028>
- [16] Luo, X.B. (1999) Removable Singularities Theorems for Solutions of Quasi Homogeneous Hypoelliptic Equations. In: Chen, H. and Rodino, L., Eds., *Partial Differential Equations and Their Applications*, World Scientific, 200-210.
- [17] Kellogg, O.D. (1967) The Divergence Theorem. In: Kellogg, O.D., Ed., *Foundations of Potential Theory*, Springer, 84-121. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-86748-4\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-86748-4_4)

- [18] Lu, G.Z. (1994) The Sharp Poincaré Inequality for Free Vector Fields: An Endpoint Result. *Revista Matemática Iberoamericana*, **10**, 453-466. <https://doi.org/10.4171/rmi/158>
- [19] Lu, G.Z. (1992) Weighted Poincaré and Sobolev Inequalities for Vector Fields Satisfying Hörmander's Condition and Applications. *Revista Matemática Iberoamericana*, **8**, 367-439. <https://doi.org/10.4171/rmi/129>
- [20] Adamowicz, T. and Warhurst, B. (2016) Three-Spheres Theorems for Subelliptic Quasilinear Equations in Carnot Groups of Heisenberg-Type. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **144**, 4291-4302. <https://doi.org/10.1090/proc/13050>
- [21] Capogna, L. (1997) Regularity of Quasi-Linear Equations in the Heisenberg Group. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **50**, 867-889. [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1097-0312\(199709\)50:9<867::aid-cpa3>3.0.co;2-3](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0312(199709)50:9<867::aid-cpa3>3.0.co;2-3)