

脆数上的广义除数函数均值问题

马 霖

青岛大学数学与统计学院, 山东 青岛

收稿日期: 2026年7月16日; 录用日期: 2026年8月12日; 发布日期: 2026年8月21日

摘 要

设 $P(n)$ 为正整数 n 的最大素因子, 并约定 $P(1)=1$ 。本文研究单侧脆数条件下的广义不对称除数求和 $D(a,b;x,y)=\sum_{n^a m^b \leq x, P(n) \leq y} 1$, 其中 a, b 为互不相等的固定正整数。在 $\exp\left\{(\log \log x)^{5/3+\varepsilon}\right\} \leq y \leq x$ 的范围内, 利用Hildebrand的脆数分布一致估计、Dirichlet双曲求和和Stieltjes分部积分, 得到关于 y 一致的渐近公式。对 $a > b$, 保留截断Euler乘积给出的首项及含 $\zeta(b/a)$ 的次主项。对 $a < b$, 通过绝对收敛的 m -和得到单一主项及误差。两种情形的差异是因为脆数限制只施加在变量 n 上。

关键词

脆数, 广义除数函数, Dickman函数, 双曲求和, 均值估计

The Mean Value Problem of Generalized Divisor Functions over Friable Numbers

Lin Ma

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: July 16, 2026; accepted: August 12, 2026; published: August 21, 2026

Abstract

Let $P(n)$ denote the largest prime factor of a positive integer n , with the convention $P(1)=1$. We investigate the asymmetric generalized divisor sum under a one-sided friability constraint, $D(a,b;x,y)=\sum_{n^a m^b \leq x, P(n) \leq y} 1$, where a and b are distinct fixed positive integers. Uniformly in the range $\exp\left\{(\log \log x)^{5/3+\varepsilon}\right\} \leq y \leq x$, we derive asymptotic formulae uniform in y by combining

Hildebrand's uniform estimate for the distribution of friable integers with Dirichlet's hyperbola method and Stieltjes partial summation. When $a > b$, the resulting expansion contains a leading term involving a truncated Euler product and a secondary term involving $\zeta(b/a)$. When $a < b$, the absolute convergence of the m -sum yields a single main term together with an error term. The difference between these two cases arises from the fact that the friability constraint is imposed only on the variable n .

Keywords

Friable Numbers, Generalized Divisor Function, Dickman Function, Hyperbola Method, Mean-Value Estimate

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

关于脆数上的除数问题, 已有研究主要沿两条方向展开。一类工作考察脆数集合上除数函数或更一般乘法函数的平均阶, 例如 Xuan [1] 对 Piltz 除数函数的脆均值估计, 以及 Hanrot、Tenenbaum 和 Wu [2] 建立的一般脆均值理论; 另一类工作研究脆整数内部的除数分布, 包括 Drappeau [3] 以及 Drappeau 和 Tenenbaum [4] 的相关结果。上述问题通常对被求和整数整体施加脆数条件, 或研究单个脆整数的除数分布。本文则直接研究 $n^a m^b \leq x$ 内的格点, 并且只对变量 n 施加 $P(n) \leq y$ 的限制。正是这种单侧约束破坏了两个变量之间的对称性, 并导致 $a > b$ 与 $a < b$ 两种情形具有不同的主项结构。

设 $a, b \in \mathbb{N}$ 。经典广义不对称除数问题研究区域

$$n^a m^b \leq x$$

中的格点数, 其主项结构可追溯至广义格点问题的研究[5] [6]。另一方面, $P(n)$ 表示 n 的最大素因子,

$$\Psi(z, y) := \#\{n \leq z : P(n) \leq y\}$$

表示最大素因子不超过 y 的正整数的计数函数。这类整数称为脆数或光滑数; 其分布由 Dickman-de Bruijn 函数 ρ 描述[7] [8], Hildebrand 后来在较宽的区域内给出了带相对误差的一致估计[9]。

本文考虑

$$D(a, b; x, y) := \sum_{\substack{n^a m^b \leq x \\ P(n) \leq y}} 1, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

与无约束问题不同, 脆数条件仅作用于 n , 故交换 a 与 b 不再保持问题不变, 破坏了无约束问题的对称性。若 $a > b$, n -方向的幂次和绝对收敛, 产生截断 Euler 乘积 $\zeta(a/b, y)$; 双曲线另一侧则产生含 $\zeta(b/a)$ 的主项。若 $a < b$, 绝对收敛发生在 m -方向, 仅保留一个主项。恰当选择双曲线和参数后, 可以得到本文的误差项。所需的 Dickman 函数性质可参见[10] [11]。

记

$$u := \frac{\log x}{\log y}, \quad \eta := \frac{\log(u/a+1)}{\log y},$$

并对 $s > 0$ 定义有限 Euler 乘积

$$\zeta(s, y) := \sum_{\substack{n \geq 1 \\ P(n) \leq y}} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \leq y} (1 - p^{-s})^{-1}.$$

定理 1.1. 设 $a, b \in \mathbb{N}$ 为互不相等的固定正整数, $\varepsilon > 0$ 固定, 且 $x \rightarrow \infty$ 。若

$$\exp\left\{(\log \log x)^{5/3+\varepsilon}\right\} \leq y \leq x,$$

则关于 y 一致地有

$$D(a, b; x, y) = \begin{cases} x^{1/b} \zeta\left(\frac{a}{b}, y\right) + \zeta\left(\frac{b}{a}\right) x^{1/a} \rho\left(\frac{u}{a}\right) + O_{a,b,\varepsilon}\left(x^{1/a} \rho\left(\frac{u}{a}\right) \eta^{b/a}\right), & a > b, \\ \zeta\left(\frac{b}{a}\right) x^{1/a} \rho\left(\frac{u}{a}\right) + O_{a,b,\varepsilon}\left(x^{1/a} \rho\left(\frac{u}{a}\right) \eta\right), & a < b. \end{cases}$$

当 $b < a$ 时, $0 < b/a < 1$, 其中 $\zeta(b/a)$ 表示 Riemann ζ 函数的解析延拓值。

2. 预备引理

Dickman-de Bruijn 函数 ρ 由

$$\rho(v) = 1 \quad (0 \leq v \leq 1), \quad v\rho'(v) = -\rho(v-1) \quad (v > 1),$$

以及 $\rho(v) = 0$ ($v < 0$) 定义。下文在 $\rho'(v)$ 表示其导数。

引理 2.1 (Hildebrand 一致估计)。在定理 1.1 的参数范围内, 对所有 $1 \leq t \leq x$ 一致地有

$$\Psi(t, y) = t\rho(u_t) + O_\varepsilon\left(t\rho(u_t) \frac{\log(u_t + 1)}{\log y} + 1\right), \quad u_t := \frac{\log t}{\log y} \quad (2.1)$$

证明. 若 $t < y$, 则每个不超过 t 的正整数都是 y -脆数, 故 $\Psi(t, y) = [t] = t + O(1)$; 同时 $0 \leq u_t < 1$ 且 $\rho'(u_t) = 1$ 。若 $t \geq y$, 由 $t \leq x$ 和参数假设可得

$$y \geq \exp\left\{(\log \log t)^{5/3+\varepsilon}\right\},$$

此时直接应用 Hildebrand 的一致估计[9]即可。□

3. 主定理的证明

3.1. $a > b$ 的情形

取曲线 $n^a m^b = x$ 上的一点 (N, H) , 即

$$N^a H^b = x, \quad N = x^{1/a} H^{-b/a}, \quad 1 \leq H \leq x^{1/b}.$$

由 Dirichlet 双曲求和,

$$\begin{aligned} D(a, b; x, y) &= \sum_{\substack{n \leq N \\ P(n) \leq y}} \sum_{\substack{m \leq x^{1/b} n^{-a/b} \\ m \leq H}} 1 + \sum_{\substack{m \leq H \\ n \leq x^{1/a} m^{-b/a} \\ P(n) \leq y}} 1 - \sum_{\substack{n \leq N \\ P(n) \leq y}} \sum_{\substack{m \leq H}} 1 \\ &= \sum_{\substack{n \leq N \\ P(n) \leq y}} \left[x^{1/b} n^{-a/b} \right] + \sum_{m \leq H} \Psi\left(x^{1/a} m^{-b/a}, y\right) - [H] \Psi(N, y). \end{aligned} \quad (3.1)$$

定义

$$S(N; x^{1/b}, a/b, y) := \sum_{\substack{n \leq N \\ P(n) \leq y}} \psi(x^{1/b} n^{-a/b})$$

把 $[t] = t - \psi(t) - 1/2$ 代入(3.1), 有

$$\begin{aligned} D(a, b; x, y) &= x^{1/b} \sum_{\substack{n \leq N \\ P(n) \leq y}} n^{-a/b} + \sum_{m \leq H} \Psi(x^{1/a} m^{-b/a}, y) \\ &\quad - S(N; x^{1/b}, a/b, y) - H\Psi(N, y) + \psi(H)\Psi(N, y). \end{aligned} \quad (3.2)$$

因 $a/b > 1$, 第一项可将求和区间拓展到无穷:

$$x^{1/b} \sum_{\substack{n \leq N \\ P(n) \leq y}} n^{-a/b} = x^{1/b} \zeta(a/b, y) - x^{1/b} \sum_{\substack{n > N \\ P(n) \leq y}} n^{-a/b}. \quad (3.3)$$

由 Abel 求和可得

$$\sum_{\substack{n > N \\ P(n) \leq y}} n^{-a/b} = \int_N^\infty t^{-a/b} d\Psi(t, y) = -N^{-a/b} \Psi(N, y) + \frac{a}{b} \int_N^\infty \Psi(t, y) t^{-a/b-1} dt. \quad (3.4)$$

因为 $x^{1/b} N^{-a/b} = H$, 将(3.4)代入(3.3), 得到

$$x^{1/b} \sum_{\substack{n \leq N \\ P(n) \leq y}} n^{-a/b} = x^{1/b} \zeta(a/b, y) + H\Psi(N, y) - \frac{a}{b} x^{1/b} \int_N^\infty \Psi(t, y) t^{-a/b-1} dt. \quad (3.5)$$

记

$$u_m := \frac{u}{a} - \frac{b \log m}{a \log y},$$

对每个 $m \leq H$, 由引理 2.1 一致地有

$$\sum_{m \leq H} \Psi(x^{1/a} m^{-b/a}, y) = \sum_{m \leq H} x^{1/a} m^{-b/a} \rho(u_m) + \sum_{m \leq H} O_{a,b,\varepsilon} \left(x^{1/a} m^{-b/a} \rho(u_m) \frac{\log(u_m + 1)}{\log y} + 1 \right) \quad (3.6)$$

由 Dickman 函数的比值估计, 存在只依赖于 a, b 的常数 $C > 0$ 使得

$$\rho(u_m) \ll_{a,b} \rho(u/a) m^{C\eta} \quad (1 \leq m \leq H).$$

又因 $0 \leq u_m \leq u/a$, 有 $\log(u_m + 1)/\log y \leq \eta$. 因此

$$\sum_{m \leq H} \Psi(x^{1/a} m^{-b/a}, y) = \sum_{m \leq H} x^{1/a} m^{-b/a} \rho(u_m) + O_{a,b,\varepsilon} (x^{1/a} \rho(u/a) \eta H^{1-b/a+C\eta} + H). \quad (3.7)$$

对任意实数 $H \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq H} x^{1/a} m^{-b/a} \rho(u_m) &= \int_1^H x^{1/a} t^{-b/a} \rho(u_t) dt + \frac{x^{1/a} \rho(u/a)}{2} \\ &\quad - \psi(H) x^{1/a} H^{-b/a} \rho(\log H / \log y) + \int_1^H \psi(t) d(x^{1/a} t^{-b/a} \rho(u_t)). \end{aligned}$$

定义

$$R(t) := \int_t^\infty \psi(v) v^{-b/a-1} dv.$$

由于 $\int_1^t \psi(v) dv = O(1)$, 分部积分给出 $R(t) \ll_{a,b} t^{-b/a-1}$. 又

$$\left(x^{1/a} t^{-b/a} \rho(u_t)\right)' = -\frac{b}{a} x^{1/a} t^{-b/a-1} \left(\rho(u_t) + \frac{\rho'(u_t)}{\log y}\right)$$

利用 $R'(t) = -\psi(t)t^{-b/a-1}$ 、Dickman 函数的对数导数估计以及 $\rho(u_t) \ll_{a,b} \rho(u/a)t^{C\eta}$ ，分部积分可得

$$\int_1^H \psi(t) d\left(x^{1/a} t^{-b/a} \rho(u_t)\right) = -\frac{b}{a} x^{1/a} \rho(u/a) R(1) + O_{a,b}\left(x^{1/a} \rho(u/a) \eta + x^{1/a} \rho(u/a) H^{-b/a-1+C\eta}\right).$$

对 $0 < b/a < 1$ ，Riemann ζ 函数的解析延拓满足

$$\zeta\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2} + \frac{a}{b-a} - \frac{b}{a} R(1),$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq H} x^{1/a} m^{-b/a} \rho(u_m) &= \int_1^H x^{1/a} t^{-b/a} \rho(u_t) dt + \frac{x^{1/a} \rho(u/a)}{1-b/a} \\ &\quad + \zeta\left(\frac{b}{a}\right) x^{1/a} \rho(u/a) - \psi(H) x^{1/a} H^{-b/a} \rho(u_H) \\ &\quad + O_{a,b}\left(x^{1/a} \rho(u/a) \eta + x^{1/a} \rho(u/a) H^{-b/a-1+C\eta}\right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

将(3.8)代入(3.7)，得到

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq H} \Psi\left(x^{1/a} m^{-b/a}, y\right) &= \int_1^H x^{1/a} t^{-b/a} \rho(u_t) dt + \frac{x^{1/a} \rho(u/a)}{1-b/a} \\ &\quad + \zeta\left(\frac{b}{a}\right) x^{1/a} \rho(u/a) - \psi(H) x^{1/a} H^{-b/a} \rho(\log H / \log y) \\ &\quad + O_{a,b,\varepsilon}\left(x^{1/a} \rho(u/a) \eta H^{1-b/a+C\eta} + x^{1/a} \rho(u/a) H^{-b/a-1+C\eta} + H\right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

下面处理式(3.5)中的尾部积分，先在 $[N, X]$ 上应用引理 2.1. 令 $u(v) = \log v / \log y$ ，作变量代换 $v = x^{1/a} t^{-b/a}$ ，

$$\frac{a}{b} x^{1/b} \int_N^{x^{1/a}} \rho(u(v)) v^{-a/b} dv = \int_1^H x^{1/a} t^{-b/a} \rho(u_t) dt.$$

同样的变量代换与 Dickman 比值估计可得

$$\begin{aligned} x^{1/b} \int_N^{x^{1/a}} \rho(u(v)) \frac{\log(u(v)+1)}{\log y} v^{-a/b} dv &\ll_{a,b} x^{1/a} \rho(u/a) \eta H^{1-b/a+C\eta}, \\ x^{1/b} \int_N^{x^{1/a}} v^{-a/b-1} dv &\ll_{a,b} H. \end{aligned}$$

因此

$$\frac{a}{b} x^{1/b} \int_N^{x^{1/a}} \Psi(v, y) v^{-a/b-1} dv = \int_1^H x^{1/a} t^{-b/a} \rho(u_t) dt + O_{a,b,\varepsilon}\left(x^{1/a} \rho(u/a) \eta H^{1-b/a+C\eta} + H\right). \quad (3.10)$$

再处理 $[X, \infty)$ 。在 $[X, x]$ 上应用引理 2.1，而在 (x, ∞) 上使用 $\Psi(v, y) \leq v$ 。分部积分可得

$$\int_{x^{1/a}}^x \rho(u(v)) v^{-a/b} dv = \frac{\rho(u/a) x^{(b-a)/ab} - \rho(u) x^{1-a/b}}{\frac{a}{b} - 1} + \frac{b}{(a-b) \log y} \int_{x^{1/a}}^x \rho'(u(v)) v^{-a/b} dv.$$

由 Dickman 函数的对数导数估计，

$$\frac{1}{\log y} \int_{x^{1/a}}^x |\rho'(u(v))| v^{-a/b} dv \ll_{a,b} \rho(u/a) \eta x^{(b-a)/ab}.$$

因为 $x^{1-a/b+1/b} = O_{a,b}(1)$, 故

$$\frac{a}{b} x^{1/b} \int_{x^{1/a}}^{\infty} \Psi(v, y) v^{-a/b-1} dv = \frac{ax^{1/a} \rho(u/a)}{a-b} + O_{a,b,\varepsilon}(x^{1/a} \rho(u/a) \eta + 1). \quad (3.11)$$

由(3.10)和(3.11)可得

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} x^{1/b} \int_N^{\infty} \Psi(v, y) v^{-a/b-1} dv &= \int_1^H x^{1/a} t^{-b/a} \rho(u_t) dt + \frac{ax^{1/a} \rho(u/a)}{a-b} \\ &\quad + O_{a,b,\varepsilon}(x^{1/a} \rho(u/a) \eta + x^{1/a} \rho(u/a) H^{1-b/a+C\eta}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

由(3.2)和(3.5)可得

$$\begin{aligned} D(a, b; x, y) &= x^{1/b} \zeta\left(\frac{a}{b}, y\right) + \sum_{m \leq H} \Psi(x^{1/a} m^{-b/a}, y) - \frac{a}{b} x^{1/b} \int_N^{\infty} \Psi(v, y) v^{-a/b-1} dv \\ &\quad - S\left(N; x^{1/b}, \frac{a}{b}, y\right) + \psi(H) \Psi(N, y). \end{aligned}$$

由引理 2.1 与 Dickman 比值估计,

$$|\psi(N, y) - x^{1/a} H^{-b/a} \rho(u_H)| \ll_{a,b,\varepsilon} x^{1/a} \rho(u/a) \eta H^{-b/a+C\eta} + 1.$$

由(3.9)和(3.12)可得

$$\begin{aligned} D(a, b; x, y) &= x^{1/b} \zeta\left(\frac{a}{b}, y\right) + \zeta\left(\frac{b}{a}\right) x^{1/a} \rho(u/a) \\ &\quad + O_{a,b,\varepsilon}\left(x^{1/a} \rho(u/a) \eta H^{1-b/a+C\eta} + H + \left|S\left(N; x^{1/b}, \frac{a}{b}, y\right)\right| + x^{1/a} \rho(u/a) H^{-b/a-1+C\eta}\right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

现在对 S 直接使用显然估计

$$\left|S\left(N; x^{1/b}, \frac{a}{b}, y\right)\right| \leq \frac{1}{2} \Psi(N, y) \ll_{a,b} x^{1/a} \rho(u/a) H^{-b/a+C\eta} + 1.$$

取 $H = \eta^{-1}$, 可得

$$D(a, b; x, y) = x^{1/b} \zeta\left(\frac{a}{b}, y\right) + \zeta\left(\frac{b}{a}\right) x^{1/a} \rho\left(\frac{u}{a}\right) + O_{a,b,\varepsilon}\left(x^{1/a} \rho\left(\frac{u}{a}\right) \eta^{b/a}\right).$$

3.2. $a < b$ 的情形

由定义可得

$$D(a, b; x, y) = \sum_{m \leq x^{1/b}} \Psi(x^{1/a} m^{-b/a}, y). \quad (3.14)$$

记

$$u_m := \frac{\log(x^{1/a} m^{-b/a})}{\log y} = \frac{u}{a} - \frac{b}{a} \cdot \frac{\log m}{\log y}$$

对 $m \leq x^{1/b}$ 有 $0 \leq u_m \leq u/a$ 。由引理 2.1,

$$\begin{aligned} D(a, b; x, y) &= x^{1/a} \sum_{m \leq x^{1/b}} m^{-b/a} \rho(u_m) + O_{a,b,\varepsilon}(E + x^{1/b}), \\ E &:= \frac{x^{1/a}}{\log y} \sum_{m \leq x^{1/b}} m^{-b/a} \rho(u_m) \log(u_m + 1). \end{aligned} \quad (3.15)$$

由于 $u/a \geq 1/a$, 有 $1 + \log(u/a + 1) \ll_a \log(u/a + 1)$ 。由 Dickman 比值估计,

$$\rho(u_m) \leq \rho\left(\frac{u}{a}\right) m^{C\eta}.$$

因 $b/a > 1$ 且 $\eta = o(1)$, 对充分大的 x 可令 $b/a - C\eta > 1 + (b/a - 1)/2$ 。我们有

$$\sum_{m \geq 1} m^{-b/a + C\eta} + \sum_{m \geq 1} m^{-b/a + C\eta} \log m \ll_{a,b} 1.$$

于是

$$E \ll_{a,b,\varepsilon} x^{1/a} \rho(u/a) \eta, \quad \sum_{m \leq x^{1/b}} m^{-b/a} \rho(u_m) \ll_{a,b} \rho(u/a). \quad (3.16)$$

进一步地, 由 Dickman 函数的比值估计及 $e^z - 1 \leq ze^z$ ($z \geq 0$),

$$0 \leq \rho(u_m) - \rho(u/a) \ll_{a,b} \rho(u/a) \eta m^{C\eta} \log m.$$

求和后可得

$$\sum_{m \leq x^{1/b}} m^{-b/a} \rho(u_m) = \rho(u/a) \sum_{m \leq x^{1/b}} m^{-b/a} + O_{a,b}(\rho(u/a) \eta).$$

因为

$$\sum_{m \leq x^{1/b}} m^{-b/a} = \zeta\left(\frac{b}{a}\right) + O_{a,b}\left(x^{(a-b)/ab}\right).$$

代回(3.15), 可得

$$D(a, b; x, y) = \zeta\left(\frac{b}{a}\right) x^{1/a} \rho(u/a) + O_{a,b,\varepsilon}\left(x^{1/a} \rho(u/a) \eta + x^{1/b}\right). \quad (3.17)$$

故

$$D(a, b; x, y) = \zeta\left(\frac{b}{a}\right) x^{1/a} \rho\left(\frac{u}{a}\right) + O_{a,b,\varepsilon}\left(x^{1/a} \rho\left(\frac{u}{a}\right) \eta\right),$$

4. 结论

本文在 Hildebrand 区域内给出了单侧脆数限制下广义不对称除数和的统一渐近公式。对 $a > b$, 双曲求和产生两个不同来源的主项; 取 $H = \eta^{-1}$ 即得到误差 $x^{1/a} \rho(u/a) \eta^{b/a}$ 。对 $a < b$, 给出误差 $x^{1/a} \rho(u/a) \eta$ 。现有证明中, 误差主要有两个来源: 其一是 Hildebrand 一致估计中的相对误差在后续求和中的累积; 其二是双曲分解后锯齿和 $S(N; x^{1/b}, a/b, y)$ 的估计。取 $H = \eta^{-1}$ 平衡这两类误差, 得到 $O_{a,b,\varepsilon}(x^{1/a} \rho(u/a) \eta^{b/a})$ 。因此, 若要进一步改进余项, 需要更精细的脆数计数一致估计, 或者证明上述锯齿和中存在当前方法没有利用的消去。本文的方法本身尚不能给出这种改进, 这也是本文结果的主要局限。

参考文献

- [1] Xuan, T. (1990) The Average Order of $d_k(n)$ over Integers Free of Large Prime Factors. *Acta Arithmetica*, **55**, 249-260. <https://doi.org/10.4064/aa-55-3-249-260>

-
- [2] Hanrot, G., Tenenbaum, G. and Wu, J. (2008) Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, 2. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **96**, 107-135. <https://doi.org/10.1112/plms/pdm029>
 - [3] Drapeau, S. (2017) On the Average Distribution of Divisors of Friable Numbers. *International Journal of Number Theory*, **13**, 153-193. <https://doi.org/10.1142/s1793042117500105>
 - [4] Drapeau, S. and Tenenbaum, G. (2018) Lois de répartition des diviseurs des entiers friables. *Mathematische Zeitschrift*, **288**, 1299-1326. <https://doi.org/10.1007/s00209-017-1935-7>
 - [5] Krätzel, E. (1988) Lattice Points. Kluwer Academic Publishers.
 - [6] Richert, H.E. (1952) Über die Anzahl Abelscher Gruppen Gegebener Ordnung. I. *Mathematische Zeitschrift*, **56**, 21-32. <https://doi.org/10.1007/bf01215034>
 - [7] Dickman, K. (1930) On the Frequency of Numbers Containing Prime Factors of a Certain Relative Magnitude. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, **22**, 1-14.
 - [8] De Bruijn, N.G. (1951) On the Number of Positive Integers $\leq x$ and Free of Prime Factors $> y$. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, **54**, 50-60. [https://doi.org/10.1016/s1385-7258\(51\)50008-2](https://doi.org/10.1016/s1385-7258(51)50008-2)
 - [9] Hildebrand, A. (1986) On the Number of Positive Integers $\leq x$ and Free of Prime Factors $> y$. *Journal of Number Theory*, **22**, 289-307. [https://doi.org/10.1016/0022-314x\(86\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-314x(86)90013-2)
 - [10] Hildebrand, A. and Tenenbaum, G. (1993) Integers without Large Prime Factors. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, **5**, 411-484. <https://doi.org/10.5802/jtnb.101>
 - [11] Tenenbaum, G. (2015) Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory. 3rd Edition, American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/gsm/163>