

变阶变系数时间分数阶阻尼波动方程的有限差分方法

杨浩源

兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2026年7月16日; 录用日期: 2026年8月15日; 发布日期: 2026年8月24日

摘要

本文研究一维变阶变系数时间分数阶阻尼波动方程的有限差分求解。引入速度变量, 在首个半时间层采用中心离散, 在后续时间层采用加权三点公式, 并以变阶 $L2-1\sigma$ 型公式逼近Caputo导数, 空间上采用二阶中心差分。证明了离散解存在唯一, 利用离散能量方法建立稳定性估计, 并给出后向欧拉- $L1$ 低阶格式作为对照。数值算例表明, 主格式在时间和空间方向均表现出二阶收敛精度, 且计算效率优于低阶格式。

关键词

变阶Caputo导数, 稳定性, 阻尼波动方程, $L2-1\sigma$

A Finite Difference Method for a Variable-Order, Variable-Coefficient Time-Fractional Damped Wave Equation

Haoyuan Yang

College of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

Received: July 16, 2026; accepted: August 15, 2026; published: August 24, 2026

Abstract

This paper is concerned with a finite difference approximation for a one-dimensional variable-order time-fractional damped wave equation with variable coefficients. By introducing an auxiliary velocity variable, a central difference formula is employed at the first half-time level, whereas a weighted three-level discretization is applied at subsequent time levels. The variable-order Caputo fractional derivative is approximated by a corresponding variable-order formula, while the spatial

derivatives are discretized by the standard second-order central difference method. The unique solvability of the resulting fully discrete scheme is established, and a stability estimate is derived through a discrete energy argument. For comparison, a low-order scheme based on the backward Euler discretization is also considered. Numerical results confirm that the proposed scheme attains second-order accuracy in both temporal and spatial directions and, meanwhile, achieves higher computational efficiency than the low-order method.

Keywords

Variable-Order Caputo Derivative, Stability, Damped Wave Equation, $L2 - 1\sigma$

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

分数阶微分方程由于具有非局部性和记忆性，能够有效描述反常扩散、黏弹性以及具有历史依赖特征的复杂动力过程，已成为经典整数阶模型的重要推广[1]-[3]。然而，在许多非均匀或随时间演化的介质中，系统的记忆特性并非固定不变，常阶分数阶模型难以充分刻画这种动态变化。为此，变阶分数阶算子及其相关模型逐渐受到关注，其数学理论、数值方法和实际应用已得到较为系统的研究[4]-[6]。

与常阶情形相比，变阶 Caputo 导数的阶数随时间变化，相应离散卷积权重具有明显的时变特征，从而增加了高精度数值逼近以及稳定性和收敛性分析的难度。Tavares 等[7]研究了变阶 Caputo 导数的数值逼近方法；McLean 和 Mustapha [8]以及 Sun 等[9]分别构造了分数阶波动方程的二阶时间离散格式；Du 等[10]进一步研究了变阶时间分数阶波动方程的二阶有限差分方法；Zheng 和 Wang [11]则对变阶分数阶波动方程的适定性、正则性及数值离散进行了系统分析。

尽管上述研究为变阶分数阶波动问题的数值求解奠定了重要基础，但对于阻尼系数随时间变化的变阶变系数时间分数阶阻尼波动方程，高精度有限差分方法及其稳定性分析仍有进一步研究的必要。特别是变阶记忆项与时变阻尼系数的耦合作用使离散系统具有更复杂的时间非局部结构，给高阶离散格式的构造和理论分析带来了新的困难。

基于此，本文考虑如下一维变阶、变系数时间分数阶阻尼波动方程：

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + k(t) D_t^{\alpha(t)} u(x, t) - K u_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T. \quad (1)$$

其初始条件和边界条件为

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

其中， $\Omega = (0, L), T > 0, K > 0$ ，且 $k(t) > 0$ 为随时间变化的阻尼系数。变阶函数满足

$$0 < k_{\min} \leq k(t) \leq k_{\max} < \infty$$

假设 α 关于时间连续可微。变阶 Caputo 分数阶导数定义为

$$\mathcal{D}_t^{\alpha(t)} u(x, t) = \frac{l}{\Gamma(l - \alpha(t))} \int_0^t \frac{u_s(x, s)}{(t - s)^{\alpha(t)}} ds, \quad (2)$$

$\Gamma(\cdot)$ 表示 Gamma 函数。本文的主要贡献是构造一种全离散方法, 时间方向采用加权二阶公式, 变阶分数阶导数采用变阶 $L2-1\sigma$ 近似, 空间方向采用中心差分。文中证明了离散格式的唯一可解性与稳定性, 同时通过数值算例验证了理论结果。此外, 本文还给出一种后向欧拉- L_1 低阶格式作为对比。

本文其余部分安排如下: 第 2 节介绍相关定义; 第 3 节给出有限差分格式; 第 4 节讨论数值解的存在性与唯一性; 第 5 节利用离散能量方法对所提格式进行稳定性与收敛性分析; 第 6 节通过数值算例验证理论结果及所提方法的有效性; 第 7 节总结全文的主要研究结果, 并对未来的研究方向进行展望。

2. 准备知识

对空间区间 $\Omega=(0,L)$ 和时间区间 $[0,T]$ 分别作均匀剖分, 取 $x_i=ih$, $i=0,1,\dots,M$, 以及 $t_n=n\tau$, $n=0,1,\dots,N$, 其中均匀空间步长为 $h=L/M$, 时间步长为 $\tau=T/N$, M 和 N 均为正整数。记网格函数空间为

$$\mathcal{U}=\{u_i^n \mid 0 \leq i \leq M, 0 \leq n \leq N\},$$

$u_i^n=u(x_i,t_n)$ 表示函数 $u(x,t)$ 在网格点 (x_i,t_n) 处的值。对于任意网格函数 $u \in \mathcal{U}$, 定义如下离散算子:

$$u_i^{1/2}=\frac{u_i^1+u_i^0}{2},$$

$$u_i^{n+\sigma_n}=\sigma_n u_i^{n+1}+(1-\sigma_n)u_i^n, 1 \leq n \leq N-1, 1 \leq i \leq M-1,$$

$$\delta_i u_i^{k+1/2}=\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\tau}, i \leq M-1,$$

$$\delta_i u_i^n=\frac{(2\sigma_n+1)u_i^{n+1}-4\sigma_n u_i^n+(2\sigma_n-1)u_i^{n-1}}{2\tau}, 1 \leq n \leq N-1, 1 \leq i \leq M-1, 0 \leq k \leq N-1,$$

$$\Delta_h u_i^n=\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{h^2}, 1 \leq i \leq M-1, 0 \leq n \leq N, \sigma_n \in (1/2, 1),$$

其中, $\sigma_n \in (1/2, 1)$ [12], 且 $t_{n+\sigma_n}=t_n+\sigma_n\tau$ 。记满足齐次边界条件的空间网格函数空间为

$$\mathcal{U}_h=\{u_i \mid 0 \leq i \leq M, u_0=u_M=0\},$$

对于固定的 t , $u_i=u(x_i,t)$ 表示函数 $u(x,t)$ 在空间网格点 $x=x_i$ 处的值。对于任意空间网格函数 $u, v \in \mathcal{U}_h$, 定义离散内积和范数如下:

$$(u, v)=h \sum_{i=1}^{M-1} u_i v_i, \|u\|^2=(u, u)=h \sum_{i=1}^{M-1} u_i^2,$$

$$(\nabla_h u, \nabla_h v)=h \sum_{i=1}^{M-1} (\delta_x u_i)(\delta_x v_i), \|u\|_1^2=(\nabla_h u, \nabla_h u)=h \sum_{i=1}^{M-1} (\delta_x u_i)^2.$$

其中, $\delta_x u_i=\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}, 1 \leq i \leq M-1$ 。这里, $\|u\|$ 表示空间网格函数空间 $\mathcal{U}_h$ 上的离散 L^2 范数, $\|u\|_1$ 表示离散 H^1 半范数。

引理 2.1 [13] 设 $u, v \in \mathcal{U}_h$, 且 p 为常数, 则有 $(\Delta_h u, v)=-(\nabla_h u, \nabla_h v)$, $(u, pv)=p(u, v)$ 。

3. 有限差分格式的推导

本节采用变阶 $L2-1_\sigma$ 格式和中心差分方法, 并结合降阶策略, 对变阶变系数时间分数阶阻尼波动方

程进行离散。

3.1. 降阶

令 $v(x, t) = u_t(x, t)$, 则原问题(1)可等价地改写为

$$v_t(x, t) + k(t) D_t^{\alpha(t)} u(x, t) - K u_{xx}(x, t) = f(x, t), (x, t) \in \Omega \times (0, T]. \quad (3)$$

3.2. 含时变系数 $k(t)$ 的离散化

下面分别在点 $(x_i, t_{1/2})$ 和 $(x_i, t_{n+\sigma_n})$, $u \in C^4(\Omega, [0, T])$ 处对上述方程组进行离散, 并假设 $u \in C^4(\Omega, [0, T])$ 。

3.2.1. 在点 $(x_i, t_{1/2})$ 处的离散化

对于 $1 \leq i \leq M-1$, 方程组中第一个方程在该点写为:

$$v_t(x_i, t_{1/2}) + k_{1/2} D_t^{\alpha_{1/2}} u(x_i, t_{1/2}) - K u_{xx}(x_i, t_{1/2}) = f(x_i, t_{1/2}) \quad (4)$$

首先, 由 Taylor 展开可得时间导数 $v_t(x_i, t_{1/2})$ 的二阶近似:

$$v_t(x_i, t_{1/2}) = \delta_t v_i^{1/2} + O(\tau^2).$$

其次, 在 $(x_i, t_{1/2})$ 附近对 $s \in [0, t_{1/2}]$ 上的 $u_t(x_i, s)$ 作 Taylor 展开, 从而推导变阶 Caputo 分数阶导数 $D_t^{\alpha_{1/2}} u(x_i, t_{1/2})$ 的近似:

$$D_t^{\alpha_{1/2}} u(x_i, t_{1/2}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_{1/2})} \int_0^{t_{1/2}} \frac{u_t(x_i, s) ds}{(t_{1/2} - s)^{\alpha_{1/2}}} = \frac{u_t(x_i, t_{1/2}) t_{1/2}^{1-\alpha_{1/2}}}{\Gamma(2-\alpha_{1/2})} + O(\tau^{2-\alpha_{1/2}}) = \frac{u_i^1 - u_i^0}{s_0} + O(\tau^{2-\alpha_{1/2}}).$$

系数 $s_0 = 2^{1-\alpha_{1/2}} \tau^{\alpha_{1/2}} \Gamma(2-\alpha_{1/2})$ 。空间二阶导数采用中心差分离散, 可得 $u_{xx}(x_i, t_{1/2}) = \Delta_h u_i^{1/2} + O(h^2)$ 。令 $f_i^{1/2} = f(x_i, t_{1/2})$ 。将上述近似代入式(4), 得到方程在点 $(x_i, t_{1/2})$ 处的全离散格式:

$$\delta_t v_i^{1/2} + \frac{k^{1/2}}{s_0} (u_i^1 - u_i^0) = K \Delta_h u_i^{1/2} + f_i^{1/2} + R_i^{1/2}, \quad i \in [1, M-1]. \quad (5)$$

其中, $R_i^{1/2} = O(\tau^{2-\alpha_{1/2}} + h^2)$ 表示上述离散所产生的局部截断误差。

3.2.2. 在点 $(x_i, t_{n+\sigma_n})$ 处的离散化

对于 $1 \leq i \leq M-1$ 和 $1 \leq n \leq N-1$, 方程在点 $(x_i, t_{n+\sigma_n})$ 写为:

$$v_t(x_i, t_{n+\sigma_n}) + k_{n+\sigma_n} D_t^{\alpha_{n+\sigma_n}} u(x_i, t_{n+\sigma_n}) - K u_{xx}(x_i, t_{n+\sigma_n}) = f(x_i, t_{n+\sigma_n}). \quad (6)$$

采用加权二阶三点差分公式对第一项进行离散, 有

$$v_t(x_i, t_{n+\sigma_n}) = \delta_t v_i^n + O(\tau^2). \quad (7)$$

为刻画分数阶导数 $D_t^{\alpha_{n+\sigma_n}} u(x_i, t_{n+\sigma_n})$ 的非局部记忆特性, 在各历史时间区间上对 $u_t(x_i, s)$ 采用二次插值, 在当前局部区间上采用线性插值。将插值多项式代入 Caputo 分数阶导数的积分定义, 并计算含弱奇核的相应积分, 可得该分数阶导数的离散形式:

$$D_t^{\alpha_{n+\sigma_n}} u(x_i, t_{n+\sigma_n}) = \frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} (u_i^{k+1} - u_i^k) + O(\tau^{3-\alpha_{n+\sigma_n}}), \quad S_n = \tau^{\alpha_{n+\sigma_n}} \Gamma(2-\alpha_{n+\sigma_n}).$$

离散系数 $u_t(x_i, s)$ 可显式表示为[10]:

$$c_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{(1+\sigma_n)^{2-\alpha_{n+\sigma_n}} - \sigma_n^{2-\alpha_{n+\sigma_n}}}{2-\alpha_{n+\sigma_n}} - \frac{1}{2} \left[(1+\sigma_n)^{1-\alpha_{n+\sigma_n}} - \sigma_n^{1-\alpha_{n+\sigma_n}} \right], k=0, \\ \frac{(k+\sigma_n+1)^{2-\alpha_{n+\sigma_n}} - 2(k+\sigma_n)^{2-\alpha_{n+\sigma_n}} + (k+\sigma_n-1)^{2-\alpha_{n+\sigma_n}}}{2-\alpha_{n+\sigma_n}} \\ - \frac{(k+\sigma_n+1)^{1-\alpha_{n+\sigma_n}} - 2(k+\sigma_n)^{1-\alpha_{n+\sigma_n}} + (k+\sigma_n-1)^{1-\alpha_{n+\sigma_n}}}{2}, 1 \leq k \leq n-1, \\ \frac{3(k+\sigma_n)^{1-\alpha_{n+\sigma_n}} - (k+\sigma_n-1)^{1-\alpha_{n+\sigma_n}}}{2} - \frac{(k+\sigma_n)^{2-\alpha_{n+\sigma_n}} - (k+\sigma_n-1)^{2-\alpha_{n+\sigma_n}}}{2-\alpha_{n+\sigma_n}}, k=n. \end{cases}$$

空间二阶导数仍采用中心差分进行离散:

$$u_{xx}(x_i, t_{n+\sigma_n}) = \Delta_h u_i^{n+\sigma_n} + O(h^2 + \tau^2)$$

因此, 在点 $(x_i, t_{n+\sigma_n})$ 处可得如下全离散格式:

$$\delta_t v_i^n + \frac{k_{n+\sigma_n}}{s_n} \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} (u_i^{k+1} - u_i^k) = K \Delta_h u_i^{n+\sigma_n} + f_i^{n+\sigma_n} + R_i^n, \quad i \in [1, M-1]. \quad (8)$$

其中, $R_i^n = O(h^2 + \tau^2)$ 表示局部截断误差。

3.2.3. 降阶关系的离散化

进一步, 分别在点 $(x_i, t_{1/2})$ 和 $(x_i, t_{n+\sigma_n})$ 处对关系式 $v(x, t) = u_t(x, t)$ 进行离散, 其中 $1 \leq n \leq N-1$ 、 $1 \leq i \leq M-1$, 可得:

$$\delta_t u_i^{1/2} = v_i^{1/2} + r_i^{1/2}, \delta_t u_i^n = v_i^{n+\sigma_n} + r_i^n, 0 \leq i \leq M. \quad (9)$$

其中, 当 $1 \leq n \leq N-1$ 时, 局部截断误差 $r_i^{1/2}$ 和 r_i^n 满足:

$$r_i^{1/2} = r_i^n = O(\tau^2), 1 \leq i \leq M-1; \quad r_i^{1/2} = r_i^n = 0, i=0, M.$$

3.2.4. 初始条件和边界条件

离散初始条件和边界条件可写为:

$$u(x_i, 0) = u_0(x_i), v(x_i, 0) = v_0(x_i), 1 \leq i \leq M-1, u(x_i, t_n) = 0, t \in [0, T], i=0, M. \quad (10)$$

3.3. 最终格式

令 U_i^n, V_i^n 分别表示 u_i^n, v_i^n 的有限差分近似。略去式(5)、(8)、(9)和(10)中的局部截断误差项, 可得如下具有二阶精度的有限差分格式:

$$\begin{aligned} \delta_t V_i^{1/2} + \frac{k_{1/2}}{s_0} (U_i^1 - U_i^0) &= K \Delta_h U_i^{1/2} + f_i^{1/2}, \quad 1 \leq i \leq M-1, \\ \delta_t V_i^n + \frac{k_{n+\sigma_n}}{s_n} \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} (U_i^{k+1} - U_i^k) &= K \Delta_h U_i^{n+\sigma_n} + f_i^{n+\sigma_n}, \quad 1 \leq i \leq M-1, 1 \leq n \leq N-1, \\ \delta_t U_i^{1/2} &= V_i^{1/2}, \quad \delta_t U_i^n = V_i^{n+\sigma_n}, \quad 0 \leq i \leq M, 1 \leq n \leq N-1, \\ U_i^0 &= u_0(x_i), V_i^0 = v_0(x_i), 1 \leq i \leq M-1, U_i^n = 0, i=0, M, 0 \leq n \leq N. \end{aligned} \quad (11)$$

4. 数值解的存在性与唯一性

本节通过证明齐次系统只有零解证明有限差分格式(11)的数值解存在且唯一。

定理 1. 假设 $0 < k_{\min} \leq k(t) \leq k_{\max} < \infty$ 且 $0 < \alpha_* \leq \alpha(t) \leq \alpha^* < 1$, 则有限差分格式存在唯一解

$$\{U_i^n, V_i^n\}_{0 \leq i \leq M, 0 \leq n \leq N}.$$

证明: 定义向量形式的数值解为 $U^n = (U_1^n, U_2^n, \dots, U_{M-1}^n)^T$, $V^n = (V_1^n, V_2^n, \dots, V_{M-1}^n)^T$ 。由初始条件 $U_i^0 = u_0(x_i)$, $V_i^0 = v_0(x_i)$ 以及边界条件 $U_0^0 = U_M^0 = 0$ 可知, 时间层 $n=0$ 上的数值解已显式给出, 因而唯一确定。对于线性方程组, 只需证明其对应的齐次系统仅有零解, 即可得到该方程组的唯一可解性。相应的齐次系统满足降阶关系和边界条件 $U_0^n = U_M^n = 0$ 。

首先, 考虑 $n=1$ 时离散格式的齐次形式:

$$aU_i^1 = b(U_{i+1}^1 + U_{i-1}^1), \quad 1 \leq i \leq M-1. \quad (12)$$

其中, $a = \frac{2}{\tau^2} + \frac{k_{1/2}}{s_0} + \frac{K}{h^2} > 0$, $b = \frac{K}{2h^2} > 0$ 。取 $i_n \in \{1, 2, \dots, M-1\}$, 使得 $\|U^1\|_\infty = \max |U_{i_n}^1|$ 。在式(12)中令 $i = i_n$, 对等式两端取绝对值并利用三角不等式, 得到

$$\left(\frac{2}{\tau^2} + \frac{k_{1/2}}{s_0} + \frac{K}{h^2} \right) \|U^1\|_\infty \leq \frac{K}{h^2} \|U^1\|_\infty$$

因此 $\|U^1\|_\infty = 0$, 从而 $U^1 = 0$ 。

类似地, 对于一般时间层 n , 离散格式的齐次形式为

$$cU_i^{n+1} = d(U_{i+1}^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}), \quad 1 \leq i \leq M-1. \quad (13)$$

其中

$$c = \frac{(2\sigma_n + 1)^2}{4\tau^2\sigma_n} + \frac{k_{n+\sigma_n}c_0^{(n)}}{s_n} + \frac{2K\sigma_n}{h^2} > 0, \quad d = \frac{K\sigma_n}{h^2} > 0.$$

取 $i_n \in \{1, 2, \dots, M-1\}$, 使得 $\|U^{n+1}\|_\infty = |U_{i_n}^{n+1}| \left(\frac{(2\sigma_n + 1)^2}{4\tau^2\sigma_n} + \frac{k_{n+\sigma_n}c_0^{(n)}}{s_n} + \frac{2K\sigma_n}{h^2} \right) \|U^{n+1}\|_\infty \leq \frac{2K\sigma_n}{h^2} \|U^{n+1}\|_\infty$ 。在式(13)

中令 $i = i_n$, 对等式两端取绝对值并利用三角不等式, 可得

$$\left(\frac{(2\sigma_n + 1)^2}{4\tau^2\sigma_n} + \frac{k_{n+\sigma_n}c_0^{(n)}}{s_n} + \frac{2K\sigma_n}{h^2} \right) \|U^{n+1}\|_\infty \leq \frac{2K\sigma_n}{h^2} \|U^{n+1}\|_\infty.$$

因此 $\|U^{n+1}\|_\infty = 0$, 即 $U^{n+1} = 0$ 。所有时间层上的数值解 U^n 均唯一确定。又由降阶关系 V^n 也随之唯一确定。

5. 稳定性与收敛性

引理 5.1 [12] 设 $0 < \alpha(t) < 1$, 则系数 $\{c_k^{(n)}\}_{k=0}^n$ 满足 $c_0^{(n)} > c_1^{(n)} > \dots > c_{n-1}^{(n)} > c_n^{(n)} > \frac{1 - \alpha_{n+\sigma_n}}{2(n + \sigma_n)^{\alpha_{n+\sigma_n}}} > 0$ 。

引理 5.2 当 $1 \leq n \leq N-1$ 时, 变阶 $L2-1_\sigma$ 公式的离散系数 $\{c_k^{(n)}\}_{k=0}^n$ 满足 $0 < c_k^{(n)} \leq Q_1$, $0 < \sum_{k=0}^n c_k^{(n)} \leq Q_2$ 。

其中, $Q_1, Q_2 > 0$ 为与 n 和 τ 无关的常数。

证明: 由引理 5.1 可知只需证明 $c_0^{(n)}$ 有界即可证得系数均有界。为简化记号, 令 $\alpha = \alpha_{n+\sigma_n}$ 、 $\sigma = \sigma_n$, 首项系数

$$c_0^{(n)} = \frac{(1+\sigma)^{2-\alpha} - \sigma^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \frac{1}{2} \left[(1+\sigma)^{1-\alpha} - \sigma^{1-\alpha} \right], \quad \text{定义 } A_1 := \frac{(1+\sigma)^{2-\alpha} - \sigma^{2-\alpha}}{2-\alpha}, A_2 := \frac{1}{2} \left[(1+\sigma)^{1-\alpha} - \sigma^{1-\alpha} \right].$$

则 $c_0^{(n)} = A_1 - A_2$ 。分别考虑函数 $g(t) = t^{2-\alpha}$ 和 $h(t) = t^{1-\alpha}$ ，二者在 $t > 0$ 上均可微。由中值定理，存在 $\xi, \eta \in (\sigma, 1+\sigma)$ ，使得 $A_1 = \xi^{1-\alpha}$ ， $A_2 = \frac{1-\alpha}{2} \eta^{-\alpha}$ 。

由于 $\xi, \eta \in (\sigma, 1+\sigma) \subset \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 且 $\alpha \in (0, 1)$ ，有 $0 < \xi^{1-\alpha} \leq 2^{1-\alpha} \leq 2$ ， $0 < \eta^{-\alpha} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} \leq 2^\alpha \leq 2$ 。从而 $0 < c_0^{(n)} = A_1 - A_2 \leq Q_1$ ，即得结论。

引理 5.3 假设 $\alpha'(t) \leq 0$ ，对于 $t \in [0, T]$, $2 \leq n \leq N$ ，有

$$\frac{3c_k^{(n)}}{s_n} \leq (1 + Q_3 \tau) \frac{c_k^{(n-1)}}{s_{n-1}}, 0 \leq k \leq n-2.$$

证明. 文献[10]已给出估计 $\frac{c_k^{(n)}}{s_n} \leq (1 + Q_3 \tau) \frac{c_k^{(n-1)}}{s_{n-1}}$, $0 \leq k \leq n-2$ ，其中， Q_3 与 τ 和 h 无关。由此可得上述结论。

引理 5.4 对于任意固定的 n ($1 \leq n \leq N-1$)，有

$$\tau^2 \sum_{k=1}^n \frac{3c_{k-1}^{(k)} - c_k^{(k)}}{s_k} \leq Q_4, \quad \tau^2 \sum_{k=1}^n \frac{3c_k^{(k)}}{s_k} \leq Q_5.$$

证明. 由文献[10]，对于任意固定的 n ($1 \leq n \leq N-1$)，有 $\tau^2 \sum_{k=1}^n \frac{3c_{k-1}^{(k)} - c_k^{(k)}}{s_k} \leq Q_4$ ， $\tau^2 \sum_{k=1}^n \frac{3c_k^{(k)}}{s_k} \leq Q_5$ ，由此不等式可推出引理。

引理 5.5 [14] 设 v_n, w_n, g_n 为非负时间网格函数，其中 g_n 单调不减， A, B 为非负常数。若 $v_n \leq (1 + \tau B)v_{n-1} + \tau w_{n-1}$ ， $1 \leq n \leq N$ ，则 $v_n \leq \exp(Bn\tau) \left[v_0 + \tau \sum_{l=0}^{n-1} w_l \right]$ ， $0 \leq n \leq N$ 。

引理 5.6 [15] 设 v_n, g_n 为非负时间网格函数，其中 g_n 单调不减； $B > 0$ 为与 τ 和 h 无关的常数。若 $v_n \leq g_n + B\tau^2 \sum_{l=1}^{n-1} v_l$ ， $0 \leq n \leq N$ ， $v_n \leq g_n \exp(Bn\tau^2)$ 。则 $v_n \leq g_n \exp(Bn\tau^2)$ 。

引理 5.7 设 u, v 为空间-时间网格函数。参照文献[9]中的引理 4.5，定义

$$E^n := (2\sigma_{n-1} + 1) \|v^n\|^2 - (2\sigma_{n-1} - 1) \|v^{n-1}\|^2 + (2\sigma_{n-1}^2 + \sigma_{n-1} - 1) \|v^n - v^{n-1}\|^2.$$

则当 $1 \leq n \leq N-1$ 时，有

$$E^{n+1} \geq \frac{1}{\sigma_n} \|v^{n+1}\|^2, (\delta_t v^n, v^{n+\sigma_n}) \geq \frac{E^{n+1} - E^n}{4\tau}. \quad (14)$$

类似地，定义

$$F^n := (2\sigma_{n-1} + 1) \|u^n\|_{\parallel}^2 - (2\sigma_{n-1} - 1) \|u^{n-1}\|_{\parallel}^2 + (2\sigma_{n-1}^2 + \sigma_{n-1} - 1) \|u^n - u^{n-1}\|_{\parallel}^2,$$

则当 $1 \leq n \leq N-1$ 时，有

$$F^{n+1} \geq \frac{1}{\sigma_n} \|u^{n+1}\|_{\parallel}^2, -(\delta_t \Delta_h u^n, u^{n+\sigma_n}) \geq \frac{F^{n+1} - F^n}{4\tau}. \quad (15)$$

此外，还有 $E^1 \leq (4\sigma_0^2 + 4\sigma_0 - 1) \|v^1\|^2 + (4\sigma_0^2 - 1) \|v^0\|^2$ ， $F^1 \leq (4\sigma_0^2 + 4\sigma_0 - 1) \|u^1\|_{\parallel}^2 + (4\sigma_0^2 - 1) \|u^0\|_{\parallel}^2$ 。定义能量泛函 $G^{n+1} := E^{n+1} + KF^{n+1} + \frac{D\tau^2}{s_n} \sum_{k=2}^{n+1} c_{n-k+1}^{(n)} \|v^k\|^2$ ， $1 \leq n \leq N-1$ 。则有

$$G^1 \leq (4\sigma_0^2 + 4\sigma_0 - 1) \left(\|v^1\|^2 + K \|u^1\|_l^2 \right) + (4\sigma_0^2 - 1) \left(\|v^0\|^2 + K \|u^0\|_l^2 \right), \quad (16)$$

以及

$$G^{n+1} \geq \frac{1}{\sigma_n} \left(\|v^{n+1}\|^2 + K \|u^{n+1}\|_l^2 \right) + \frac{Q_6 \tau^2}{4} \sum_{k=2}^{n+1} \|v^k\|^2. \quad (17)$$

证明：由 $G^1 = E^1 + KF^1$ 以及相应估计可得到式(16)。另一方面，由式(14)、(15)及引理 5.1 有

$$G^{n+1} \geq \frac{1}{\sigma_n} \left(\|v^{n+1}\|^2 + K \|u^{n+1}\|_l^2 \right) + \frac{D\tau^2}{\Gamma(2 - \alpha_{n+\sigma_n}) \tau^{\alpha_{n+\sigma_n}}} \cdot \frac{1 - \alpha_{n+\sigma_n}}{2(n + \sigma_n)^{\alpha_{n+\sigma_n}}} \sum_{k=2}^{n+1} \|v^k\|^2,$$

注意到 $(n + \sigma_n)\tau \leq T$ ，即可得到式(17)所示的下界估计。

引理 5.8. 假设 $0 < k_{\min} \leq k(t) \leq k_{\max} < \infty$ 。当 $1 \leq n \leq N-1$ 时，有

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} (U^{k+1} - U^k, V^{n+\sigma_n}) &\geq \frac{\tau}{4} \left[c_0^{(n)} \|V^{n+1}\|^2 - \sum_{k=1}^n (c_{n-k}^{(n)} - c_{n-k+1}^{(n)}) \|V^k\|^2 - c_n^{(n)} \|V^0\|^2 \right] \\ &\quad - \frac{\tau}{2} \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} \|V^k\|^2 - \frac{\tau}{2} \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} \|g^{k+1/2}\|^2 - \tau Q_2 \|V^{n+\sigma_n}\|^2. \end{aligned}$$

证明：由降阶关系可知 $U^{k+1} - U^k = \tau V^{k+1/2} + \tau g^{k+1/2}$ 。令

$$S := \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} (U^{k+1} - U^k, V^{n+\sigma_n}) = \tau \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} (V^{k+1/2}, V^{n+\sigma_n}) + \tau \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} (g^{k+1/2}, V^{n+\sigma_n}) =: S_1 + S_2$$

对于 S_1 ，将 $V^{k+1/2} = \frac{1}{2}[V^{k+1} + V^k]$ 代入，并利用引理 2.1，得

$$S_1 = \frac{\tau}{2} \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} (V^{k+1}, V^{n+\sigma_n}) + \frac{\tau}{2} \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} (V^k, V^{n+\sigma_n}).$$

将第一项中的 V^{k+1} 写成 $V^k + (V^{k+1} - V^k)$ ，可得

$$S_1 = \tau \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} (V^k, V^{n+\sigma_n}) + \frac{\tau}{2} \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} (V^{k+1} - V^k, V^{n+\sigma_n}).$$

其中，第二项满足

$$\frac{\tau}{2} \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} (V^{k+1} - V^k, V^{n+\sigma_n}) \geq \frac{\tau}{4} \left[c_0^{(n)} \|V^{n+1}\|^2 - \sum_{k=1}^n (c_{n-k}^{(n)} - c_{n-k+1}^{(n)}) \|V^k\|^2 - c_n^{(n)} \|V^0\|^2 \right].$$

对于第一项，利用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式，有

$$\tau \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} (V^k, V^{n+\sigma_n}) \geq -\frac{\tau}{2} \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} (\|V^k\|^2 + \|V^{n+\sigma_n}\|^2).$$

因此，

$$S_1 \geq \frac{\tau}{4} \left[c_0^{(n)} \|V^{n+1}\|^2 - \sum_{k=1}^n (c_{n-k}^{(n)} - c_{n-k+1}^{(n)}) \|V^k\|^2 - c_n^{(n)} \|V^0\|^2 \right] - \frac{\tau}{2} \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} \|V^k\|^2 - \frac{\tau}{2} \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} \|V^{n+\sigma_n}\|^2.$$

类似地，对于 S_2 ，有

$$S_2 \geq -\frac{\tau}{2} \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} \|g^{k+\sigma_k}\|^2 - \frac{\tau}{2} \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} \|V^{n+\sigma_n}\|^2,$$

合并 S_1 与 S_2 的估计, 并利用引理 5.2, 得到最终估计式。

5.1. 稳定性

假设 $0 < k_{\min} \leq k(t) \leq k_{\max} < \infty$, 且 $\alpha(t) \in C^1[0, T]$ 满足 $0 < \alpha_* \leq \alpha(t) \leq \alpha^* < 1$, $\alpha'(t) \leq 0$, 则该格式是无条件稳定的。对任意 $0 \leq n \leq N-1$, 有如下估计:

$$\begin{aligned} \|V^1\| + |U^1|_1 &\leq Q \left(\|V^0\| + |U^0|_1 + \tau^{\alpha_{1/2}/2} \|f^{1/2}\| + \tau^{1-\alpha_{1/2}/2} \|g^{1/2}\| + \tau |g^{1/2}|_1 \right) \|V^{n+1}\| + |U^{n+1}|_1 \\ &\leq Q \left[\|V^0\| + |U^0|_1 + \tau^{\alpha_{1/2}/2} \|f^{1/2}\| + \tau^{1-\alpha_{1/2}/2} \|g^{1/2}\| + \tau |g^{1/2}|_1 \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{k=1}^n \|f^{k+\sigma_k}\|^2 \right)^{1/2} + \left(\tau^2 \sum_{k=1}^n \|g^{k+1/2}\|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n |g^{k+\sigma_k}|_1^2 \right)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

其中, Q 为与 τ 和 h 无关的正常数, $\alpha_{1/2} = \alpha(t_{1/2})$ 。

证明: 令 $f_0^{1/2} = f_M^{1/2} = 0$ 。将式(11)第一式与 $V^{1/2}$ 作内积, 得

$$(\delta_t V^{1/2}, V^{1/2}) + \frac{k^{1/2}}{s_0} (U^1 - U^0, V^{1/2}) = K (\Delta_h U^{1/2}, V^{1/2}) + (f^{1/2}, V^{1/2}).$$

展开前两项并利用范数的定义, 得到

$$\frac{1}{2\tau} (\|V^1\|^2 - \|V^0\|^2) + \frac{k^{1/2}\tau}{s_0} (\|V^{1/2}\|^2 + (g^{1/2}, V^{1/2})) = K (\Delta_h U^{1/2}, V^{1/2}) + (f^{1/2}, V^{1/2}).$$

对降阶关系施加离散空间算子 Δ_h , 再与 $-KU^{1/2}$ 作内积, 可得

$$(\Delta_h \delta_t V^{1/2}, -KU^{1/2}) = (\Delta_h V^{1/2}, -KU^{1/2}) + (\Delta_h g^{1/2}, -KU^{1/2}).$$

利用空间与时间差分算子的可交换性以及引理 2.1, 有

$$\frac{K}{2\tau} (|U^1|_1^2 - |U^0|_1^2) = K (\nabla_h V^{1/2}, \nabla_h U^{1/2}) - K (\Delta_h g^{1/2}, U^{1/2}).$$

将式(28)与式(30)相加, 得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\tau} (\|V^1\|^2 - \|V^0\|^2) + \frac{k^{1/2}\tau}{s_0} (\|V^{1/2}\|^2 + (g^{1/2}, V^{1/2})) + \frac{K}{2\tau} (|U^1|_1^2 - |U^0|_1^2) \\ &= (f^{1/2}, V^{1/2}) - K (\Delta_h g^{1/2}, U^{1/2}) \end{aligned}$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式、Young 不等式以及 $k(t)$ 的有界性, 对上式中的三个离散内积项进行估计并整理, 得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\tau} (\|V^1\|^2 - \|V^0\|^2) + \left(\frac{k^{1/2}\tau}{s_0} - \frac{k_{\min}\tau}{2s_0} \right) \|V^{1/2}\|^2 + \frac{K}{2\tau} (|U^1|_1^2 - |U^0|_1^2) \\ &\leq \frac{s_0}{k_{\min}\tau} \|f^{1/2}\|^2 + \frac{K}{4\tau} |U^{1/2}|_1^2 + K\tau \|g^{1/2}\|_1^2 + \frac{k_{\max}^2}{k_{\min}} \cdot \frac{\tau}{s_0} \|g^{1/2}\|^2. \end{aligned}$$

由于 $\|V^{1/2}\|^2$ 的系数非负, 再利用 $|U^{1/2}|_1^2 \leq \frac{1}{2} (|U^1|_1^2 + |U^0|_1^2)$, 不等式两端同乘 2τ 并代入 $s_0 = c_0 \tau^{\alpha_{1/2}}$,

$c_0 = 2^{1-\alpha_{1/2}} \Gamma(2-\alpha_{1/2})$, 整理可得

$$\|V^1\|^2 + \frac{3K}{4}|U^1|_1^2 \leq \|V^0\|^2 + \frac{5K}{4}|U^0|_1^2 + \frac{2c_0}{k_{\min}}\tau^{\alpha_{1/2}}\|f^{1/2}\|^2 + 2K\tau^2\|g^{1/2}\|_1^2 + \frac{2k_{\max}^2}{k_{\min}c_0}\tau^{2-\alpha_{1/2}}\|g^{1/2}\|^2.$$

因此第一个估计式得证。

与第一个估计式的证明类似, 令 $f_0^{1/2} = f_M^{1/2} = 0$ 。将式(11)第二式与 $V^{n+\sigma_n}$ 作内积, 对应的降阶关系施加 Δ_h 后再与 $-KU^{n+\sigma_n}$ 作内积, 并利用引理 5.7 和引理 5.8 中关于时间项的下界估计, 得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\tau} \left[(E^{n+1} + KF^{n+1}) - (E^n + KF^n) \right] + \frac{k(t_{n+\sigma_n})\tau}{4s_n} \left[c_0^{(n)}\|V^{n+1}\|^2 - \sum_{k=1}^n (c_{n-k}^{(n)} - c_{n-k+1}^{(n)})\|V^k\|^2 - c_n^{(n)}\|V^0\|^2 \right] \\ & \leq (f^{n+\sigma_n}, V^{n+\sigma_n}) - K(\Delta_h g^{n+\sigma_n}, U^{n+\sigma_n}) + \frac{k(t_{n+\sigma_n})\tau}{2s_n} \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)}\|V^k\|^2 \\ & \quad + \frac{k(t_{n+\sigma_n})\tau}{2s_n} \sum_{k=0}^n \|g^{k+1/2}\|^2 + \frac{k(t_{n+\sigma_n})\tau Q_2}{s_n} \|V^{n+\sigma_n}\|^2. \end{aligned}$$

等式两端同乘 4τ , 利用 $k_{\min} \leq k(t) \leq k_{\max}$, 定义 $D = \max\{-k_{\min}, k_{\max}\}$, 在上式两端同时加上

$$\frac{D\tau^2}{s_n} \sum_{k=2}^{n+1} c_{n-k+1}^{(n)}\|V^k\|^2, \text{ 并令 } G^{n+1} := E^{n+1} + KF^{n+1} + \frac{D\tau^2}{s_n} \sum_{k=2}^{n+1} c_{n-k+1}^{(n)}\|V^k\|^2, \text{ 整理上式, 再由引理 5.3, 得到}$$

$$\begin{aligned} G^{n+1} & \leq e^{Q_3 T} \left[G^1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{2D\tau^2}{s_k} c_0^{(k)}\|V^{k+1}\|^2 + \frac{D\tau^2}{s_k} [3c_{k-1}^{(k)} - c_k^{(k)}]\|V^1\|^2 + \frac{3D\tau^2}{s_k} c_k^{(k)}\|V^0\|^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{2D\tau^2}{s_k} \sum_{l=0}^k \|g^{l+1/2}\|^2 + \frac{4D\tau^2 Q_2}{s_k} \|V^{k+\sigma_k}\|^2 \right) + 4\tau \sum_{k=1}^n (f^{k+\sigma_k}, V^{k+\sigma_k}) - 4\tau K \sum_{k=1}^n (\Delta_h g^{k+\sigma_k}, U^{k+\sigma_k}) \right]. \end{aligned}$$

应用第一离散 Grönwall 不等式, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式将内积项估计为相应范数项, 再结合引理 5.7, 得到

$$\begin{aligned} \|V^{n+1}\|^2 + K|U^{n+1}|_1^2 & \leq Q_7 e^{Q_3 T} \left[(4\sigma_0^2 + 4\sigma_0 - 1) (\|V^1\|^2 + K|U^1|_1^2) + (4\sigma_0^2 - 1) (\|V^0\|^2 + K|U^0|_1^2) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^n \frac{3D\tau^2}{s_k} c_k^{(k)}\|V^0\|^2 + \left(\sum_{k=1}^n \frac{D\tau^2}{s_k} (3c_{k-1}^{(n)} - c_k^{(n)}) + \frac{\epsilon Q_6 \tau^2}{8} + \frac{4D\tau^2 Q_2}{s_1} + \frac{2D\tau^2}{s_1} c_0^{(0)} \right) \|V^1\|^2 \right. \\ & \quad \left. + K\tau^2 \sum_{k=1}^n |U^k|_1^2 + \frac{32}{\epsilon Q_6} \sum_{k=1}^n \|f^{k+\sigma_k}\|^2 + \sum_{k=1}^n \frac{2D\tau^2}{s_k} \sum_{l=0}^k \|g^{l+1/2}\|^2 + \frac{8K}{\epsilon} \sum_{k=1}^n |g^{k+\sigma_k}|_1^2 \right]. \end{aligned}$$

由引理 5.4 以及 $\sum_{k=1}^n \frac{2D\tau^2}{s_k} \sum_{l=0}^k \|g^{l+1/2}\|^2 = \sum_{l=0}^n \|g^{l+1/2}\|^2 \sum_{k=l}^n \frac{2D\tau^2}{s_k} \leq Q_s \sum_{l=0}^n \|g^{l+1/2}\|^2$, 并结合第一个先验估计中 $\|V^1\|$ 和 $|U^1|_1$ 的有界性, 可得

$$\begin{aligned} \|V^{n+1}\|^2 + |U^{n+1}|_1^2 & \leq Q_8 \tau^2 \sum_{k=1}^n (\|V^k\|^2 + |U^k|_1^2) + Q_8 \left[\|V^0\|^2 + |U^0|_1^2 + \tau^{\alpha_{1/2}}\|f^{1/2}\|^2 + \tau^{2-\alpha_{1/2}}\|g^{1/2}\|^2 \right. \\ & \quad \left. + \tau^2\|g^{1/2}\|_1^2 + \sum_{k=1}^n \|f^{k+\sigma_k}\|^2 + \tau^2 \sum_{k=0}^n \|g^{k+1/2}\|^2 + \sum_{k=1}^n |g^{k+\sigma_k}|_1^2 \right] \end{aligned}$$

最后, 应用第二离散 Grönwall 不等式, 得到第二个估计式子。

5.2. 收敛性

假设原问题存在唯一光滑解 $\{u(x, t), v(x, t)\}$, 并以 $\{U_i^n, V_i^n\}$ 表示离散格式的数值解。记 $e_i^n := u_i^n - U_i^n$,

$\tilde{e}_i^n := v_i^n - V_i^n$, $i \in [0, M]$, $0 \leq n \leq N$ 。则有如下最优阶误差估计:

$$\|e^n\|_1 + \|e^n\| \leq Q(\tau^2 + h^2), \quad 1 \leq n \leq N-1.$$

证明: 将含截断误差的全离散格式与略去截断误差后的离散格式相减, 可得误差方程组

$$\begin{aligned} \delta_i \tilde{e}_i^{1/2} + \frac{k_{1/2}}{s_0} (e_i^1 - e_i^0) &= K \Delta_h e_i^{1/2} + R_i^{1/2}, \quad 1 \leq i \leq M, \\ \delta_i \tilde{e}_i^n + \frac{k_{n+\sigma_n}}{s_n} \sum_{k=0}^n c_{n-k}^{(n)} (e_i^{k+1} - e_i^k) &= K \Delta_h e_i^{n+\sigma_n} + R_i^n, \quad 1 \leq i \leq M-1, 1 \leq n \leq N-1, \\ \delta_i e_i^{1/2} &= \tilde{e}_i^{1/2} + \mathcal{O}(\tau^2), \quad \delta_i e_i^n = \tilde{e}_i^{n+\sigma_n} + \mathcal{O}(\tau^2), \quad 0 \leq i \leq M, 1 \leq n \leq N-1, \\ e_i^0 &= \tilde{e}_i^0 = 0, \quad 1 \leq i \leq M-1; \quad e_i^n = 0, \quad i = 0, M, \quad 0 \leq n \leq N. \end{aligned}$$

对上述误差方程组应用稳定性估计, 即可得到误差估计。

上述稳定性与收敛性分析均在 $\alpha'(t) \leq 0$ 的假设下完成。其核心作用是保证变阶 L_2-1_σ 公式的离散权重系数满足引理 5.3 中的逐层递推不等式, 从而可构造包含历史记忆项的能量泛函, 将第 $n+1$ 时间层的能量用第 n 层能量进行一致上界控制。若缺少该假设, 变阶权重随时间的变化无法得到统一的有界估计, 能量递推的链条无法闭合, 也就无法通过离散 Gronwall 不等式得到全局稳定性估计。需要说明的是, 该假设是理论证明的充分条件, 而非必要条件。第 6 章的数值实验结果表明, 即使阶数函数为非单调形式 (如 $\alpha(t) = 0.5 + 0.2 \sin(\pi t)$), 本文格式仍能保持稳定并达到预期的二阶收敛精度。关于在更弱条件下乃至去掉该假设的严格理论证明, 有待后续进一步深入研究。

6. 数值实验

本节通过数值实验验证所提出的有限差分格式求解变阶变系数时间分数阶阻尼波动方程时的准确性、收敛性和适应性。所有数值计算均在 MATLAB 中完成。

计算参数取为: $\Omega = (0, 1)$, $[0, T] = [0, 1]$, $K = 0.01$, 初始条件为 $\phi(x) = u(x, 0) = 0$, $\psi(x) = u_t(x, 0) = 0$ 。考虑以下四种随时间变化的阻尼系数:

$$(i) \quad k(t) = 0.9 + 0.1t, \quad (ii) \quad k(t) = 0.8 + 0.2 \sin(\pi t), \quad (iii) \quad k(t) = \exp(-0.1t), \quad (iv) \quad k(t) = \begin{cases} 0.8, & t < 0.5 \\ 2.0, & t \geq 0.5 \end{cases}.$$

同时考虑三种变阶函数 $\alpha(t) = 0.4t + 0.2$, $\alpha(t) = 0.5 + 0.2 \sin(\pi t)$, $\alpha(t) = 0.8e^{-t}$ 。源项取为

$$f(x, t) = 12t^2 \sin(\pi x) + \frac{k(t) \cdot 24t^{4-\alpha(t)}}{\Gamma(5-\alpha(t))} \sin(\pi x) + 0.01\pi^2 t^4 \sin(\pi x). \quad \text{可以直接验证, 在上述数据下, 与有限差分}$$

格式对应问题的精确解为 $u(x, t) = t^4 \sin(\pi x)$ 。数值误差定义为 $E_\infty(h, \tau) = \max_{0 \leq n \leq N} \max_{x_i \in \Omega} |U_i^n - u(x_i, t_n)|$, 其中, U_i^n 表示数值解, $u(x_i, t_n)$ 表示解析解。时间和空间收敛阶分别按下式计算:

$$\text{Order}_\tau := \log_2 \left(\frac{E(h, 2\tau)}{E(h, \tau)} \right), \quad \text{Order}_h := \log_2 \left(\frac{E(2h, \tau)}{E(h, \tau)} \right).$$

算例 1. 在固定变阶函数 $\alpha(t) = 0.8 \exp(-t)$ 的情况下, 表 1 和表 2 分别给出了不同随时间变化的阻尼系数下, 所提差分格式的数值误差以及相应的时间和空间收敛阶。

由表 1 和表 2 可见, 对于所考虑的各种阻尼系数, 格式(11)得到的数值解均与解析解吻合良好。此外, 数值结果所表现出的收敛阶验证了该格式的最优精度 $O(\tau^2 + h^2)$, 与定理 4 中得到的理论误差估计一致。

Table 1. System resulting data of standard experiment
表 1. 标准试验系统结果数据

τ	Case I		Case II		Case III		Case IV	
	Error	Order	Error	Order	Error	Order	Error	Order
0.050000	8.215496e-03	—	8.216591e-03	—	8.221438e-03	—	7.884705e-03	—
0.025000	2.110865e-03	1.9605	2.110931e-03	1.9607	2.112175e-03	1.9607	2.026346e-03	1.9602
0.012500	5.349602e-04	1.9803	5.349688e-04	1.9804	5.352717e-04	1.9804	5.136538e-04	1.9800
0.006250	1.346883e-04	1.9898	1.346911e-04	1.9898	1.347653e-04	1.9898	1.293492e-04	1.9895

Table 2. Numerical error and spatial convergence order
表 2. 数值误差与空间收敛阶

h	Case I		Case II		Case III		Case IV	
	Error	Order	Error	Order	Error	Order	Error	Order
0.050000	2.111521e-03	—	2.111588e-03	—	2.112833e-03	—	2.026978e-03	—
0.025000	5.351213e-04	1.9803	5.351303e-04	1.9804	5.354331e-04	1.9804	5.138090e-04	1.9800
0.012500	1.347270e-04	1.9898	1.347299e-04	1.9898	1.348040e-04	1.9898	1.293864e-04	1.9895

算例 2. 为验证本文所提二阶格式的精度与计算效率优势, 对于同一模型, 本节构造一种时间一阶精度、空间二阶精度的低阶对比格式。该格式对时间导数采用后向欧拉离散, 对变阶 Caputo 分数阶导数采用变阶 L_1 型一阶逼近, 空间项保持二阶中心差分离散[11]。沿用第 2 章的网格剖分与符号约定, 记时变参数取值 $k_{n+1} = k(t_{n+1})$ 、 $\alpha_{n+1} = \alpha(t_{n+1})$, 源项取值 $f_i^{n+1} = f(x_i, t_{n+1})$, 最终全离散格式如下:

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} + \frac{k_{n+1}}{\tau^{\alpha_{n+1}} \Gamma(2 - \alpha_{n+1})} \sum_{k=1}^{n+1} b_{n+1,k} (U_i^k - U_i^{k-1}) = K \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2} + f_i^{n+1}.$$

其中变阶 L_1 离散权重系数定义为 $b_{n+1,k} = (n+2-k)^{1-\alpha_{n+1}} - (n+1-k)^{1-\alpha_{n+1}}, 1 \leq k \leq n+1$ 。降阶递推关系为 $U_i^{n+1} = U_i^n + \tau V_i^{n+1}$, 初始条件与边界条件保持不变。通过不同的变阶函数和变系数, 比较所提格式与对比格式的时间收敛阶和计算时间。

Table 3. Comparison of temporal convergence orders and computational times
表 3. 时间收敛阶与计算时间的比较

$\alpha(t)$	$k(t)$	τ	Order	Time (s)	Order	Time (s)
$\alpha(t) = 0.4t + 0.2$	$k(t) = 0.9 + 0.1t$	0.050000	—		—	
		0.025000	1.9111	0.1399	1.0501	0.2700
		0.012500	1.9555		1.0258	
		0.006250	1.9775		1.0134	

续表

$\alpha(t) = 0.5 + 0.2\sin(\pi t)$ $k(t) = 0.8 + 0.2\sin(\pi t)$	0.050000	—	—		
	0.025000	1.9296	0.1421	1.0526	0.2766
	0.012500	1.9626		1.0284	
	0.006250	1.9798		1.0158	
$\alpha(t) = 0.8\exp(-t)$ $k(t) = \exp(-0.1t)$	0.050000	—	—		
	0.025000	1.9607	0.1391	1.0488	0.2857
	0.012500	1.9804		1.0253	
	0.006250	1.9898		1.0132	

由表 3 可以看出, 所提出的离散格式具有更短的计算时间和更高的计算精度。

7. 总结

本文针对一维变阶变系数时间分数阶阻尼波动方程, 构造了一种基于降阶思想的高阶有限差分方法。通过引入速度变量, 在首个半时间层采用中心离散, 在后续时间层采用加权三点二阶公式, 并利用变阶 $L2-1\sigma$ 型公式逼近 Caputo 分数阶导数, 空间方向采用二阶中心差分。理论上证明了所得离散格式的唯一可解性, 并利用离散能量方法和离散 Grönwall 不等式建立了格式的无条件稳定性及相应的收敛性结果。数值实验表明, 对于不同的变阶函数和时变阻尼系数, 所提格式在时间和空间方向均表现出二阶收敛精度, 与理论分析结果一致。与后向欧拉- L_1 低价格的数值比较进一步表明, 所提方法在本文测试算例中具有更高的计算精度和较好的计算效率。

需要指出的是, 变阶分数阶算子的非局部记忆特性, 使得数值格式的计算与存储复杂度随时间步数呈平方级增长, 在长时间、大尺度问题中会带来显著的计算开销, 是制约变阶分数阶模型工程应用的核心瓶颈之一。当前学术界针对该问题已发展出多类求解策略: 常阶分数阶算子因具有平移不变的卷积结构, 可通过快速傅里叶变换将时间复杂度降至 $O(N \log N)$; 但变阶算子不具备卷积结构, 当前主流方案是基于指数和逼近弱奇异核, 结合递推计算将复杂度降至近似线性; 此外交替方向隐式(ADI)方法可通过维度分裂, 有效降低高维空间问题的计算开销。后续工作可从以下方面展开: 一是针对本文变阶 $L_2-1\sigma$ 格式, 研究基于指数和核逼近的快速实现方案, 在保持二阶精度的前提下缓解计算与存储压力; 二是将格式推广至高维问题, 结合紧致差分与 ADI 方法进一步提升高维场景的计算效率; 三是探索该方法在非线性的变阶分数阶波动模型中的适用性与理论分析。

参考文献

- [1] Podlubny, I. (1998) Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. Academic Press.
- [2] Metzler, R. and Klafter, J. (2000) The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach. *Physics Reports*, **339**, 1-77. [https://doi.org/10.1016/s0370-1573\(00\)00070-3](https://doi.org/10.1016/s0370-1573(00)00070-3)
- [3] Bagley, R.L. and Torvik, P.J. (1983) A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity. *Journal of Rheology*, **27**, 201-210. <https://doi.org/10.1122/1.549724>
- [4] Samko, S.G. and Ross, B. (1993) Integration and Differentiation to a Variable Fractional Order. *Integral Transforms and Special Functions*, **1**, 277-300. <https://doi.org/10.1080/10652469308819027>

-
- [5] Lorenzo, C.F. and Hartley, T.T. (2002) Variable Order and Distributed Order Fractional Operators. *Nonlinear Dynamics*, **29**, 57-98. <https://doi.org/10.1023/a:1016586905654>
 - [6] Sun, H.G., Chang, A.L., Zhang, Y. and Chen, W. (2019) A Review on Variable-Order Fractional Differential Equations: Mathematical Foundations, Physical Models, Numerical Methods and Applications. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **22**, 27-59. <https://doi.org/10.1515/fca-2019-0003>
 - [7] Tavares, D., Almeida, R. and Torres, D.F.M. (2016) Caputo Derivatives of Fractional Variable Order: Numerical Approximations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **35**, 69-87. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.10.027>
 - [8] McLean, W. and Mustapha, K. (2006) A Second-Order Accurate Numerical Method for a Fractional Wave Equation. *Numerische Mathematik*, **105**, 481-510. <https://doi.org/10.1007/s00211-006-0045-y>
 - [9] Sun, H., Sun, Z.Z. and Gao, G.H. (2015) Some Temporal Second Order Difference Schemes for Fractional Wave Equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **32**, 970-1001. <https://doi.org/10.1002/num.22038>
 - [10] Du, R., Sun, Z.Z. and Wang, H. (2022) Temporal Second-Order Finite Difference Schemes for Variable-Order Time-Fractional Wave Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **60**, 104-132. <https://doi.org/10.1137/19m1301230>
 - [11] Zheng, X.C. and Wang, H. (2022) Analysis and Discretization of a Variable-Order Fractional Wave Equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **104**, Article ID: 106047. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.106047>
 - [12] Du, R.L., Alikhanov, A.A. and Sun, Z.Z. (2020) Temporal Second Order Difference Schemes for the Multi-Dimensional Variable-Order Time Fractional Sub-Diffusion Equations. *Computers & Mathematics with Applications*, **79**, 2952-2972. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2020.01.003>
 - [13] Gao, G.H. and Sun, Z.Z. (2016) Two Difference Schemes for Solving the One-Dimensional Time Distributed-Order Fractional Wave Equations. *Numerical Algorithms*, **74**, 675-697. <https://doi.org/10.1007/s11075-016-0167-y>
 - [14] Quarteroni, A. and Valli, A. (1994) Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer.
 - [15] Dixon, J. and McKee, S. (1986) Weakly Singular Discrete Gronwall Inequalities. *ZAMM—Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **66**, 535-544. <https://doi.org/10.1002/zamm.19860661107>