

具有Besov正则性的双线性双参数Fourier乘子的加权估计

余 轩

重庆师范大学数学科学学院, 重庆

收稿日期: 2026年7月12日; 录用日期: 2026年8月15日; 发布日期: 2026年8月24日

摘 要

本文研究了满足Besov正则性条件的双线性双参数Fourier乘子, 建立了对应算子的加权范数不等式。文中使用了二进制单位分解构造尺度截断乘子, 结合Littlewood-Paley理论, 证明了该类乘子算子在加权的 L^p 空间上的有界性, 完善了双参数框架下的Hörmander型乘子理论。

关键词

双线性双参数, Besov正则性, Hörmander型

Weighted Estimates for Bilinear and Bi-Parameter Fourier Multipliers with Besov Regularity

Xuan Yu

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: July 12, 2026; accepted: August 15, 2026; published: August 24, 2026

Abstract

This paper investigates bilinear and bi-parameter Fourier multipliers satisfying the Besov regularity conditions and establishes the weighted norm inequality for the corresponding multiplier operators. By using the dyadic partition of unity to construct scale-truncated multipliers and combined with the Littlewood-Paley theory, we prove the boundedness of such multiplier operators on weighted L^p spaces. The results presented in this paper improve the Hörmander type multiplier theorems in the bi-parameter setting.

Keywords

Bilinear and Bi-Parameter, Besov Regularity, Hörmander Type Multiplier

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Fourier 乘子是调和分析领域的重要研究对象, 其有界性理论不仅丰富了函数空间体系, 还在偏微分方程、拟微分算子、信号分析等诸多领域有着广泛的应用。在线性框架下, Mihlin 定理与 Hörmander [1] 定理奠定了 Fourier 乘子的理论基础, 他们借助频域导数衰减条件与 Sobolev 正则性刻画了乘子算子在 L^p 空间上的有界性。

设 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 分别表示 $\mathbb{R}^n$ 上的 Schwartz 速降函数空间和缓增广义函数。对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 定义 Fourier 变换与 Fourier 变换:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx, \quad \mathcal{F}^{-1} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

若 $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 为 Fourier 乘子符号, 则线性 Fourier 乘子算子定义为

$$m(D)f = \mathcal{F}^{-1}(m\hat{f}), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Coifman 与 Meyer [2] 率先开启了对多线性 Fourier 乘子理论的研究, 证明了当乘子满足高阶导数衰减条件时, 双线性乘子算子具有 L^p 有界性。在此基础上, Tomita、Fujita 等学者将 Hörmander 型框架推广至多线性情形, 借助 Sobolev 空间与 Besov 空间刻画乘子的光滑性, 并结合 Muckenhoupt 类 A_p 加权空间建立了一系列范数不等式。Fujita 与 Tomita [3] 在临界 Besov 正则性条件 $s = Nn/2$ 下, 得到了多线性 Fourier 乘子的加权有界性结论, 完善了临界光滑度情形下的 Hörmander 型理论。

多参数调和分析是经典调和分析理论的重要拓展, 双参数结构对应乘积空间上两组独立的二进制尺度分解。Muscalu、Pipher、Tao 与 Thiele [4] 率先开展了对双线性双参数 Fourier 乘子的研究, 证明了高阶光滑性假设下的算子的 L^p 有界性。Chen 与 Lu [5] 进一步弱化光滑性条件, 建立了一类有限光滑性算子的加权 Hörmander 型定理。

本文主要研究了一类具有 Besov 正则性的双线性双参数 Fourier 乘子算子的加权范数不等式。为了更好地描述定理, 我们取 $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 满足:

$$\text{supp } \Psi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d : 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Psi(\xi/2^k) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \quad (1.1)$$

我们设双线性双参数 Fourier 乘子 $m \in L^\infty((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^2)$, 令

$$m_{j,k}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = m(2^j \xi_1, 2^k \xi_2, 2^j \eta_1, 2^k \eta_2) \Psi_1(\xi_1, \eta_1) \Psi_2(\xi_2, \eta_2) \quad (1.2)$$

其中 Ψ_i ($i=1,2$) 满足 (1.1) 式, 其中 $\xi = (\xi_i, \eta_i)$ 。其算子定义为:

$$T_m(f_1, f_2)(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^{4n}} \int_{\mathbb{R}^{4n}} e^{ix_1(\xi_1 + \eta_1) + ix_2(\xi_2 + \eta_2)} m(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \hat{f}_1(\xi_1, \eta_1) \hat{f}_2(\xi_2, \eta_2) d\xi d\eta \quad (1.3)$$

本文将证明下面这个定理, 相关空间的定义在第二节中给出。

定理 1.1 设 $1 \leq r < 2$, $r < p_1, p_2 < \infty$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$ 且 $w_j \in A_{p_j/r}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $j=1,2$, $w = w_1^{p/p_1} w_2^{p/p_2}$ 。若 $\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_{j,k}\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}} < \infty$, 则有

$$\|T_m\|_{L^{p_1}(w_1) \times L^{p_2}(w_2) \rightarrow L^p(w)} \lesssim \sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_{j,k}\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^2)}.$$

2. 预备知识

我们定义在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的函数 f 的强极大算子 M_s :

$$M_s f(x, y) = \sup_{r_1 > 0, r_2 > 0} \left(\frac{1}{r_1^n} \frac{1}{r_2^n} \int_R f(u, v) du dv \right)$$

其中 $R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : |u - x| < r_1, |v - y| < r_2\}$ 且 f 是在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数。设 $1 < p < \infty$, 权函数 $w \geq 0$, 加权勒贝格空间 $L^p(w)$ 由满足

$$\|f\|_{L^p(w)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x, y)|^p w(x, y) dx dy \right)^{1/p} < \infty$$

的可测函数 f 全体构成。称权函 u 属于乘积型 Muckenhoupt 类 $A_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$), 若

$$\sup_R \left(\frac{1}{|R|} \int_R w(x, y) dx dy \right) \left(\frac{1}{|R|} \int_R w(x, y)^{1-p'} dx dy \right)^{p-1} < \infty,$$

上确界取遍所有矩形 $R = I \times J$, 其中 I, J 均是 $\mathbb{R}^n$ 上的方体, p' 为 p 的共轭指标即 $1/p + 1/p' = 1$ 。由文献[6]的定理 7.3 可知 $w \in A_p$ 时, M_s 在 $L^p(w)$ 上有界。

下面我们给出双线性双参数 Besov 空间 $B_{p,q}^{(s_1, s_2, t_1, t_2)}((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^2)$ 范数的定义。取 $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足条件(1.1)式, 其中 $d = n$ 。记 $\psi_0(\eta) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \psi(\eta/2^k)$, 当 $k \geq 1$ 时, $\psi_k(\eta) = \psi(\eta/2^k)$ 。那么 $\text{supp } \psi_0 \subset \{\eta \in \mathbb{R}^n : |\eta| \leq 2\}$, $\text{supp } \psi_k \subset \{\eta \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} \leq |\eta| \leq 2^{k+1}\}$ ($k \geq 1$), 对 $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ 有 $\sum_{j,k} \psi_{j,k}(\xi, \eta) = 1$, 其中 $\psi_{j,k}(\xi, \eta) = \psi_j(\xi) \psi_k(\eta)$ 。设 $1 \leq p, q \leq \infty$, $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{S}'((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^2)$, 那么 Besov 乘积空间 $B_{p,q}^{(s_1, s_2, t_1, t_2)}((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^2)$ 范数定义为:

$$\|F\|_{B_{p,q}^{(s_1, s_2, t_1, t_2)}((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^2)} = \left(\sum_{j_1, j_2, k_1, k_2=0}^{\infty} 2^{q(j_1 s_1 + j_2 s_2 + k_1 t_1 + k_2 t_2)} \|\Psi_{j_1, j_2, k_1, k_2}(D) F\|_{L^p}^q \right)^{1/q},$$

其中

$$\Psi_{(j_1, j_2, k_1, k_2)}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = \psi_{j_1, k_1}(\xi_1, \eta_1) \times \psi_{j_2, k_2}(\xi_2, \eta_2). \quad (2.1)$$

接下来, 我们给出证明所需要的几个引理:

引理 2.1 [7] 设 $0 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, 对 $f \in H_w^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 且 f 是局部可积函数, 有

$$\|f\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left(\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\psi_1(D/2^j) \psi_2(D/2^k) f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(w)}. \quad (2.2)$$

其中 $\psi_1(D/2^j) \psi_2(D/2^k) f(\xi_1, \xi_2) = \mathcal{F}^{-1}[\psi_1(\cdot/2^j) \psi_2(\cdot/2^k) \hat{f}(\cdot, \cdot)](\xi_1, \xi_2)$ 。

引理 2.2 [8] 设 $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ 且有 $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\text{supp } \psi_1 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1/a \leq |\xi| \leq a\}$, $\text{supp } \psi_2 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1/b \leq |\xi| \leq b\}$, 对某些 $a, b > 1$ 成立。存在常数 $C > 0$, 对任意 $f \in L_w^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, 有

$$\left\| \left(\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\psi_1(D/2^j) \psi_2(D/2^k) f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(w)} \leq C \|f\|_{L^p(w)}.$$

进一步, 若对所有 $\xi \neq 0$ 及 $i=1,2$ 时, 有 $\sum_{j \in \mathbb{Z}} (\xi/2^j) = 1$, 则

$$\left\| \left(\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\psi_1(D/2^j) \psi_2(D/2^k) f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(w)} \approx C \|f\|_{L^p(w)}.$$

设 ϕ_0 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的 C^∞ 函数并满足:

$$\phi_0(t) = 1 \quad t \in [0, 1/8], \quad \text{supp } \phi_0 \subset [0, 1/4]. \quad (2.3)$$

记 $\phi_1(t) = 1 - \phi_0(t)$ 。对任意 $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$\Phi_{(1)}(\xi, \eta) = \phi_0(|\xi|/|\eta|), \quad \Phi_{(2)}(\xi, \eta) = \phi_1(|\eta|/|\xi|) \quad (2.4)$$

$$\Phi_{(3)}(\xi, \eta) = (1 - \phi_0(|\xi|/|\eta|))(1 - \phi_1(|\eta|/|\xi|)). \quad (2.5)$$

引理 2.3 [9]

1) 对 $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0)\}$, 有

$$\Phi_{(1)}(\xi, \eta) + \Phi_{(2)}(\xi, \eta) + \Phi_{(3)}(\xi, \eta) = 1.$$

2) 对任意多重指标 α_1, α_2 , 每一个 $\Phi_{(i)}$ 都满足

$$|\partial_\xi^{\alpha_1} \partial_\eta^{\alpha_2} \Phi_{(i)}(\xi, \eta)| \leq C_{\alpha_1, \alpha_2} (|\xi| + |\eta|)^{-(|\alpha_1| + |\alpha_2|)}.$$

3) $\Phi_{(i)}$ 的支集满足:

$$\text{supp } \Phi_{(1)} \subset \{|\xi| \leq |\eta|/2\}, \quad \text{supp } \Phi_{(2)} \subset \{|\eta| \leq |\xi|/2\}, \quad \text{supp } \Phi_{(3)} \subset \{|\xi|/8 \leq |\eta| \leq 8|\xi|\}.$$

引理 2.4 [10] 设 $s > 0$, 对于双线性双参数乘积型 Besov 空间 $B_{r,1}^{(s,s,s,s)}(\mathbb{R}^{4n})$, 有以下不等式成立:

$$1) \|f \cdot g\|_{B_{r,1}^{(s,s,s,s)}(\mathbb{R}^{4n})} \lesssim \|f\|_{B_{r,1}^{(s,s,s,s)}(\mathbb{R}^{4n})} \|g\|_{B_{r,1}^{(s,s,s,s)}(\mathbb{R}^{4n})},$$

$$2) \|f(2^\ell \cdot, 2^m \cdot)\|_{B_{r,1}^{(s,s,s,s)}(\mathbb{R}^{4n})} \lesssim (\max\{1, 2^{\ell s}\} 2^{-\ell n/r} \cdot \max\{1, 2^{ms}\} 2^{-mn/r})^2 \|f\|_{B_{r,1}^{(s,s,s,s)}(\mathbb{R}^{4n})}, \quad \ell, m \in \mathbb{Z}.$$

引理 2.5 [11] 设 $1 < p, q < \infty$, 且权函数 $w \in A_p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. 存在常数 $C > 0$, 使得对定义在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的所有局部可积函数列 $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, 满足

$$\left\| \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} (M_s f_k)^q \right\}^{1/q} \right\|_{L^p(w)} \leq C \left\| \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_k|^q \right\}^{1/q} \right\|_{L^p(w)}.$$

3. 一个重要引理

引理 3.1 设 $1 \leq r \leq 2$, 对任意 $j, k \in \mathbb{Z}$, $m \in B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^2)$ 且 $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, 有

$$\left| T_{m(2^j \cdot, 2^k \cdot)}(f_1, f_2)(x, y) \right| \lesssim \|m\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}} \prod_{i=1}^2 M_s(|f_i|^r)(x, y)^{1/r}.$$

证明: 设 $\{\psi_{j_i, k_i}\}_{j_i, k_i=0}^\infty$ 其中 $i=1, 2$ 是双线性双参数 Besov 乘积空间定义中的单位分解, 有

$$\begin{aligned} & T_{m(2^j \cdot, 2^k \cdot)}(f_1, f_2)(x, y) \\ &= (2^{j+k})^{2n} \int_{(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^2} \mathcal{F}^{-1} m(2^j(x-w_1), 2^k(y-w_2), 2^j(x-z_1), 2^k(y-z_2)) f_1(w_1, w_2) f_2(z_1, z_2) dw dz \\ &= (2\pi)^{-4n} (2^{j+k})^{2n} \int_{(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^2} \hat{m}(2^j(w_1-x), 2^k(w_2-y), 2^j(z_1-x), 2^k(z_2-y)) f_1(w_1, w_2) f_2(z_1, z_2) dw dz \\ &= (2\pi)^{-4n} (2^{j+k})^{2n} \sum_{j_1, j_2, k_1, k_2=0}^\infty \int_{(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)^2} \psi_{(j_1, k_1)}(2^j(w_1-x), 2^k(w_2-y)) \psi_{(j_2, k_2)}(2^j(z_1-x), 2^k(z_2-y)) \\ & \quad \times \hat{m}(2^{j_1}(w_1-x), 2^{k_1}(w_2-y), 2^{j_2}(z_1-x), 2^{k_2}(z_2-y)) f_1(w_1, w_2) f_2(z_1, z_2) dw dz \end{aligned}$$

由于 $\text{supp } \psi_{(j_i, k_i)}(x_i, y_i) \subset \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 2^{j_i+1}, |y_i| \leq 2^{k_i+1}\}$, 由 Hölder 不等式, 得

$$\begin{aligned}
& \left| T_{m(\cdot/2^j, \cdot/2^k)}(f_1, f_2)(x, y) \right| \\
& \lesssim (2^{j+k})^{2n} \sum_{j_1, j_2, k_1, k_2=0}^{\infty} \left\| \Psi_{(j_1, j_2, k_1, k_2)} \hat{m} \right\|_{L^{r'}} (2^j(w_1 - x), 2^k(w_2 - y), 2^j(z_1 - x), 2^k(z_2 - y)) \Big\|_{L^{r'}} \\
& \quad \times \left(\iint_{\substack{2^j(w_1 - x) \leq 2^{j_1+1} \\ 2^k(w_2 - y) \leq 2^{k_1+1}}} |f_1(w_1, w_2)|^r dw_1 dw_2 \right)^{1/r} \left(\iint_{\substack{2^j(z_1 - x) \leq 2^{j_2+1} \\ 2^k(z_2 - y) \leq 2^{k_2+1}}} |f_2(z_1, z_2)|^r dz_1 dz_2 \right)^{1/r} \\
& \lesssim \sum_{j_1, j_2, k_1, k_2=0}^{\infty} (2^{j_1+j_2+k_1+k_2})^{n/r} \left\| \Psi_{(j_1, j_2, k_1, k_2)} \hat{m} \right\|_{L^{r'}} \left(\frac{1}{(2^{j_1-j+1})^n} \cdot \frac{1}{(2^{k_1-k+1})^n} \iint_{\substack{2^j(w_1 - x) \leq 2^{j_1+1} \\ 2^k(w_2 - y) \leq 2^{k_1+1}}} |f_1(w_1, w_2)|^r dw_1 dw_2 \right)^{1/r} \\
& \quad \times \left(\frac{1}{(2^{j_2-j+1})^n} \cdot \frac{1}{(2^{k_2-k+1})^n} \iint_{\substack{2^j(z_1 - x) \leq 2^{j_2+1} \\ 2^k(z_2 - y) \leq 2^{k_2+1}}} |f_2(z_1, z_2)|^r dz_1 dz_2 \right)^{1/r} \\
& \leq \sum_{j_1, j_2, k_1, k_2=0}^{\infty} 2^{(j_1+j_2+k_1+k_2)n/r} \left\| \Psi_{(j_1, j_2, k_1, k_2)} \hat{m} \right\|_{L^{r'}} \prod_{i=1}^2 M_s(|f_i|^r)(x, y)^{1/r}.
\end{aligned}$$

因为 $1 \leq r \leq 2$ ，由 Hausdorff-young 不等式得 $\left\| \Psi_{(j_1, j_2, k_1, k_2)} \hat{m} \right\|_{L^{r'}} \lesssim \left\| \Psi_{(j_1, j_2, k_1, k_2)}(D)m \right\|_{L^r}$ 。因此，

$$\left| T_{m(\cdot/2^j, \cdot/2^k)}(f_1, f_2)(x, y) \right| \lesssim \|m\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} \prod_{i=1}^2 M_s(|f_i|^r)(x, y)^{1/r}.$$

故引理成立。

4. 定理 1.1 的证明

我们先定义证明过程中会用到的两类集合。记 $\mathcal{F}_0$ 表示满足以下条件的 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的全体函数所构成的集合： $\text{supp } \varphi$ 是一个紧集，且在原点某个邻域上满足 $\varphi=1$ ；记 $\mathcal{F}_1$ 表示满足以下条件的 $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 的全体函数所构成的集合： $\text{supp } \tilde{\varphi}$ 是 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 中的紧子集，且函数 $\tilde{\varphi}$ 在某个环形域上值为 1。

证明：设 $1 \leq r < 2$ ， $r < p_1, p_2 < \infty$ ， $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$ ， $w_i \in A_{p_i/r} \subset A_{p_i}$ ($i=1, 2$)， $w = w_1^{p/p_1} w_2^{p/p_2}$ 。由文献[12]的定理 3.6 知 $w \in A_{2p} \subset A_\infty$ 。设 $m \in L^\infty(\mathbb{R}^{4n})$ ，满足 $\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_{j,k}\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} < \infty$ ，其中 $m_{j,k}$ 由(1.2)式定义。由引理 2.3 (1)可知：

$$\begin{aligned}
m(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) &= m(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \left(\sum_{j=1}^3 \Phi_{(j)}(\xi_1, \eta_1) \right) \left(\sum_{k=1}^3 \Phi_{(k)}(\xi_2, \eta_2) \right) \\
&= \sum_{j,k=1}^3 m(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \Phi_{(j)}(\xi_1, \eta_1) \Phi_{(k)}(\xi_2, \eta_2) \\
&= \sum_{j,k=1}^3 m_{j,k}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)
\end{aligned}$$

其中 $\Phi_{(j)}, \Phi_{(k)}$ ($1 \leq j, k \leq 3$) 由(2.4)式和(2.5)式定义。

根据引理 2.3，我们可以将 $m_{j,k}$ 分为四组，逐一估计各组符号所对应的 Fourier 乘子算子 $T_{m_{j,k}}$ 的 $L^p(w)$ 范数。由于在同一组中不同的 $m_{j,k}$ 估计的方法基本一致，所以每组中只选取一个具有代表性的 Fourier 乘子进行详细推导。

第 1 组：

$$m_{1,1}, \text{supp } m_{1,1} \subset \{|\xi_1| \leq |\eta_1|/2, |\xi_2| \leq |\eta_2|/2\} \quad m_{2,2}, \text{supp } m_{2,2} \subset \{|\eta_1| \leq |\xi_1|/2, |\eta_2| \leq |\xi_2|/2\}.$$

第 2 组：

$$\begin{aligned}
m_{1,3}, \text{supp } m_{1,3} &\subset \{|\xi_1| \leq |\eta_1|/2, |\eta_2|/8 \leq |\xi_2| \leq 8|\eta_2|\} \quad m_{3,1}, \text{supp } m_{3,1} \subset \{|\eta_1|/8 \leq |\xi_1| \leq 8|\eta_1|, |\xi_2| \leq |\eta_2|/2\} \\
m_{2,3}, \text{supp } m_{2,3} &\subset \{|\eta_1| \leq |\xi_1|/2, |\eta_2|/8 \leq |\xi_2| \leq 8|\eta_2|\} \quad m_{3,2}, \text{supp } m_{3,2} \subset \{|\eta_1|/8 \leq |\xi_1| \leq 8|\eta_1|, |\eta_2| \leq |\xi_2|/2\}.
\end{aligned}$$

第 3 组:

$$m_{1,2}, \text{supp } m_{1,2} \subset \{|\xi_1| \leq |\eta_1|/2, |\eta_2| \leq |\xi_2|/2\} \quad m_{2,1}, \text{supp } m_{2,1} \subset \{|\eta_1| \leq |\xi_1|/2, |\xi_2| \leq |\eta_2|/2\}.$$

第 4 组:

$$m_{3,3}, \text{supp } m_{3,3} \subset \{|\eta_1|/8 \leq |\xi_1| \leq 8|\eta_1|, |\eta_2|/8 \leq |\xi_2| \leq 8|\eta_2|\}.$$

对第 1 组 Fourier 乘子的估计。考虑乘子 $m_{2,2}$, 记 $m_1 = m_{2,2}$, 其支集为:

$$\text{supp } m_1 \subset \{|\eta_1| \leq |\xi_1|/2, |\eta_2| \leq |\xi_2|/2\} \quad (4.1)$$

设 ψ 如(1.1)式中所定义(其中 $d = n$)。若 $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \in \text{supp } m_1$, 则 $|\xi_1 + \eta_1| \approx |\xi_1|$ 且 $|\xi_2 + \eta_2| \approx |\xi_2|$ 。由于有 $\text{supp } \psi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$, 我们可以选取与 j, k 无关的函数 $\varphi \in \mathcal{F}_0$ 和 $\tilde{\psi} \in \mathcal{F}_1$, 使得

$$\begin{aligned} m_1(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \psi((\xi_1 + \eta_1)/2^j) \psi((\xi_2 + \eta_2)/2^k) \\ = m_1(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \psi((\xi_1 + \eta_1)/2^j) \psi((\xi_2 + \eta_2)/2^k) \tilde{\psi}^2(\xi_1/2^j) \tilde{\psi}^2(\xi_2/2^k) \varphi(\eta_1/2^j) \varphi(\eta_2/2^k), \end{aligned}$$

令 $m_1^{(j,k)}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = m_1(2^j \xi_1, 2^k \xi_2, 2^j \eta_1, 2^k \eta_2) \psi(\xi_1 + \eta_1) \psi(\xi_2 + \eta_2) \tilde{\psi}(\xi_1) \tilde{\psi}(\xi_2) \varphi(\eta_1) \varphi(\eta_2)$, 故

$$\begin{aligned} & \psi(D/2^j) \psi(D/2^k) T_{m_1}(f_1, f_2)(x_1, x_2) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{4n}} \int_{\mathbb{R}^{4n}} e^{i x_1(\xi_1 + \eta_1) + i x_2(\xi_2 + \eta_2)} m_1(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \psi((\xi_1 + \eta_1)/2^j) \hat{f}_1(\xi_1, \xi_2) \psi((\xi_2 + \eta_2)/2^k) \hat{f}_2(\eta_1, \eta_2) d\xi d\eta \\ &= T_{m_1^{(j,k)}(j/2^j, j/2^k)}(\tilde{\Delta}_{j,k} f_1, f_2)(x_1, x_2). \end{aligned}$$

其中 $\tilde{\Delta}_{j,k} f_1 = \tilde{\psi}(D/2^j) \tilde{\psi}(D/2^k) f_1$ 。由引理 3.1,

$$\left| T_{m_1^{(j,k)}(j/2^j, j/2^k)}(\tilde{\Delta}_{j,k} f_1, f_2)(x_1, x_2) \right| \lesssim \|m_1^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(q/r, n/r, n/r, n/r)}} M_s(|\tilde{\Delta}_{j,k} f_1|^r)(x_1, x_2)^{1/r} M_s(|f_2|^r)(x_1, x_2)^{1/r},$$

因此,

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\psi(D/2^j) \psi(D/2^k) T_{m_1}(f_1, f_2)(x_1, x_2)|^2 \right)^{1/2} \\ & \lesssim \left(\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_1^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(q/r, n/r, n/r, n/r)}} \right) \left(\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_{j,k} f_1|^r)(x_1, x_2)^{2/r} \right)^{1/2} M_s(|f_2|^r)(x_1, x_2)^{1/r}. \end{aligned}$$

由引理 2.1 及 Hölder 不等式, $\|T_{m_1}(f_1, f_2)\|_{L^p(w)}$ 可以被下面式子估计

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_1^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(q/r, n/r, n/r, n/r)}} \right) \left(\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_{j,k} f_1|^r) \right)^{1/2} M_s(|f_2|^r) \right\|_{L^p(w)} \\ & \leq \left(\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_1^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(q/r, n/r, n/r, n/r)}} \right) \left\| \left(\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_{j,k} f_1|^r) \right)^{1/2} \right\|_{L^{p_1}(w_1)} \|M_s(|f_2|^r)\|_{L^{p_2}(w_2)}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

由于 $1 \leq r < 2$, $r < p_1 < \infty$, $w_1 \in A_{p_1/r}$, 由引理 2.5 和引理 2.2, 得

$$\left\| \left(\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_{j,k} f_1|^r) \right)^{1/2} \right\|_{L^{p_1}(w_1)} \lesssim \left\| \left(\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\tilde{\Delta}_{j,k} f_1|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^{p_1}(w_1)} = \|f_1\|_{L^{p_1}(w_1)} \quad (4.3)$$

由于 $r < p_2 < \infty$ 且 $w_2 \in A_{p_2/r}$, 故 M_s 在 $L^{p_2/r}(w_2)$ 上是有界的,

$$\left\| M_s(|f_2|^r) \right\|_{L^{p_2}(w_2)} \lesssim \|f_2\|_{L^{p_2}(w_2)}. \quad (4.4)$$

结合(4.2) (4.3) (4.4)三个式子的估计, 我们得到

$$\|T_{m_1}(f_1, f_2)\|_{L^p(w)} \lesssim \left(\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_1^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}} \right) \prod_{i=1}^2 \|f_i\|_{L^{p_i}(w_i)}.$$

接下来, 我们只需要证明下面不等式成立即可,

$$\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_1^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}} \lesssim \sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_{j,k}\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}}. \quad (4.5)$$

设 Ψ 如(1.1)式中所定义, 其中 $d = 2n$. 由于 $\text{supp } \Psi(\cdot/2^\ell) \subset \{(\xi_i, \eta_i) \in \mathbb{R}^n : 2^{\ell-1} \leq |(\xi_i, \eta_i)| \leq 2^{\ell+1}\}$, 并且存在 $j_0, k_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\text{supp } \tilde{\psi}(\xi_1) \tilde{\psi}(\xi_2) \varphi(\eta_1) \varphi(\eta_2) \subset \{2^{-j_0} \leq |(\xi_1, \eta_1)| \leq 2^{j_0}, 2^{-k_0} \leq |(\xi_2, \eta_2)| \leq 2^{k_0}\}. \quad (4.6)$$

由引理 2.4, 得

$$\begin{aligned} & \|m_1^{(j,k)}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}} \\ & \leq \sum_{\ell=-j_0}^{j_0} \sum_{m=-k_0}^{k_0} \|m_1^{(j,k)}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \Psi(\xi_1/2^\ell, \eta_1/2^\ell) \Psi(\xi_2/2^m, \eta_2/2^m)\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}} \\ & \lesssim \sum_{\ell=-j_0}^{j_0} \sum_{m=-k_0}^{k_0} \|m(2^j \xi_1, 2^k \xi_2, 2^j \eta_1, 2^k \eta_2) \Psi(\xi_1/2^\ell, \eta_1/2^\ell) \Psi(\xi_2/2^m, \eta_2/2^m)\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}} \\ & \quad \times \|\Phi_2(2^j \xi_1, 2^j \eta_1) \Phi_2(2^k \xi_2, 2^k \eta_2) \psi(\xi_1 + \eta_1) \psi(\xi_2 + \eta_2) \tilde{\psi}(\xi_1) \tilde{\psi}(\xi_2) \varphi(\eta_1) \varphi(\eta_2)\|_{B_{\sigma,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}}. \end{aligned}$$

由引理 2.4 (2), 得

$$\begin{aligned} & \|m(2^j \xi_1, 2^k \xi_2, 2^j \eta_1, 2^k \eta_2) \Psi(\xi_1/2^\ell, \eta_1/2^\ell) \Psi(\xi_2/2^m, \eta_2/2^m)\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}} \\ & = \|m_{j+\ell, k+m}(2^{-\ell}, 2^{-m}, 2^{-\ell}, 2^{-m})\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}} \\ & \lesssim \left(\max\{1, 2^{-n/r}\} 2^{\ell n/r} \cdot \max\{1, 2^{-mn/r}\} 2^{mn/r} \right)^2 \|m_{j+\ell, k+m}\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}} \\ & \lesssim \sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_{j,k}\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}}, \end{aligned}$$

对所有 $|\ell| \leq j_0, |m| \leq k_0$ 成立. 另一方面, 由引理 2.3 (2)和(4.6)式,

$$\left| \partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta (\Phi_2(2^j \xi_1, 2^j \eta_1) \Phi_2(2^k \xi_2, 2^k \eta_2) \psi(\xi_1 + \eta_1) \psi(\xi_2 + \eta_2) \tilde{\psi}(\xi_1) \tilde{\psi}(\xi_2) \varphi(\eta_1) \varphi(\eta_2)) \right| \leq C_{\alpha, \beta},$$

对所有 α, β 和 $j, k \in \mathbb{Z}$ 成立. 所以有

$$\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|\Phi_2(2^j \xi_1, 2^j \eta_1) \Phi_2(2^k \xi_2, 2^k \eta_2) \psi(\xi_1 + \eta_1) \psi(\xi_2 + \eta_2) \tilde{\psi}(\xi_1) \tilde{\psi}(\xi_2) \varphi(\eta_1) \varphi(\eta_2)\|_{B_{\sigma,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}} < \infty.$$

所以(4.5)式成立, 即

$$\|T_{m_1}(f_1, f_2)\|_{L^p(w)} \lesssim \left(\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_{j,k}\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}} \right) \prod_{i=1}^2 \|f_i\|_{L^{p_i}(w_i)}.$$

对第二组 Fourier 乘子的估计. 考虑 Fourier 乘子 $m_{2,3}$, 记 $m_2 = m_{2,3}$, 其支集为:

$$\text{supp } m_2 \subset \{|\eta_1| \leq |\xi_1|/2, |\eta_2|/8 \leq |\xi_2| \leq 8|\eta_2|\}. \quad (4.7)$$

设 ψ 如(1.1)式中所定义(其中 $d = n$). 若 $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \in \text{supp } m_2$, 则 $|\xi_1 + \eta_1| \approx |\xi_1|$ 且 $|\xi_2 + \eta_2| \approx |\eta_2|$. 由于 $\text{supp } \psi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$, 我们可以选取与 j, k 无关的函数 $\varphi \in \mathcal{F}_0$ 和 $\tilde{\psi} \in \mathcal{F}_1$, 使得

$$\begin{aligned} & m_2(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \psi((\xi_1 + \eta_1)/2^j) \psi(\eta_2/2^k) \\ & = m_2(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \psi((\xi_1 + \eta_1)/2^j) \psi(\eta_2/2^k) \tilde{\psi}(\xi_1/2^j)^2 \tilde{\psi}(\xi_2/2^k)^2 \tilde{\psi}(\eta_2/2^k) \varphi(\eta_1/2^j), \end{aligned}$$

令 $m_2^{(j,k)}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = m_2(2^j \xi_1, 2^k \xi_2, 2^j \eta_1, 2^k \eta_2) \psi(\xi_1 + \eta_1) \psi(\eta_2) \tilde{\psi}(\xi_1) \tilde{\psi}(\xi_2) \varphi(\eta_1)$, 那么

$$\begin{aligned}
& \psi(D/2^j) T_{m_2}(f_1, f_2)(x_1, x_2) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2\pi)^{4n}} \int_{\mathbb{R}^{4n}} e^{i\lambda_1(\xi_1 + \eta_1) + i\lambda_2(\xi_2 + \eta_2)} m_2(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \psi((\xi_1 + \eta_1)/2^j) \hat{f}_1(\xi_1, \xi_2) \psi(\eta_2/2^k) \hat{f}_2(\eta_1, \eta_2) d\xi d\eta \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} T_{m_2^{(j,k)}(f_1/2^j, f_2/2^k)}(\tilde{\Delta}_{j,k} f_1, \tilde{\Delta}_k f_2)(x_1, x_2),
\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\Delta}_{j,k} f_1 = \tilde{\psi}(D/2^j) \tilde{\psi}(D/2^k) f_1$, $\tilde{\Delta}_k f_2 = \tilde{\psi}(D/2^k) f_2$ 。由引理 3.1, 得

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} T_{m_2^{(j,k)}(f_1/2^j, f_2/2^k)}(\tilde{\Delta}_{j,k} f_1, \tilde{\Delta}_k f_2)(x_1, x_2) \right| \\
& \lesssim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|m_2^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(q/r, n/r, n/r, n/r)}} M_s(|\tilde{\Delta}_{j,k} f_1|^r)(x_1, x_2)^{1/r} M_s(|\tilde{\Delta}_k f_2|^r)(x_1, x_2)^{1/r},
\end{aligned}$$

令 $B_2 = \sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_2^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(q/r, n/r, n/r, n/r)}}$, 由 Minkowski 不等式和 Hölder 不等式, 得

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\psi(D/2^j) T_{m_2}(f_1, f_2)(x_1, x_2)|^2 \right)^{1/2} \\
& \lesssim \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_2^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(q/r, n/r, n/r, n/r)}} \right) M_s(|\tilde{\Delta}_{j,k} f_1|^r)^{1/r} M_s(|\tilde{\Delta}_k f_2|^r)^{1/r} \right)^2 \right)^{1/2} \\
& \lesssim B_2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(M_s(|\tilde{\Delta}_{j,k} f_1|^r)^{1/r} M_s(|\tilde{\Delta}_k f_2|^r)^{1/r} \right)^2 \right)^{1/2} \\
& = B_2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(M_s(|\tilde{\Delta}_k f_2|^r)^{1/r} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_{j,k} f_1|^r)^{2/r} \right)^{1/2} \right) \\
& \leq B_2 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_k f_2|^r)^{2/r} \right)^{1/2} \left(\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_{j,k} f_1|^r)^{2/r} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

由引理 2.1 和 Hölder 不等式, 得

$$\begin{aligned}
\|T_{m_2}(f_1, f_2)\|_{L^p(w)} & \lesssim B_2 \left\| \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_k f_2|^r)^{2/r} \right)^{1/2} \left(\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_{j,k} f_1|^r)^{2/r} \right)^{1/2} \right\|_{L^p(w)} \\
& \leq B_2 \left\| \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_k f_2|^r)^{2/r} \right)^{1/2} \right\|_{L^{p_2}(w_2)} \left\| \left(\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_{j,k} f_1|^r)^{2/r} \right)^{1/2} \right\|_{L^{p_1}(w_1)}.
\end{aligned}$$

由于 $1 \leq r < 2$, $r < p_1, p_2 < \infty$ 且 $w_1 \in A_{p_1/r}$, $w_2 \in A_{p_2/r}$, 由引理 2.5 和引理 2.2, 得

$$\begin{aligned}
& \left\| \left(\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_{j,k} f_1|^r)^{2/r} \right)^{1/2} \right\|_{L^{p_1}(w_1)} \lesssim \left\| \left(\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\tilde{\Delta}_{j,k} f_1|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^{p_1}(w_1)} \lesssim \|f_1\|_{L^{p_1}(w_1)} \\
& \left\| \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_k f_2|^r)^{2/r} \right)^{1/2} \right\|_{L^{p_2}(w_2)} \lesssim \left\| \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\tilde{\Delta}_k f_2|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^{p_2}(w_2)} \lesssim \|f_2\|_{L^{p_2}(w_2)}.
\end{aligned}$$

故有,

$$\|T_{m_2}(f_1, f_2)\|_{L^p(w)} \lesssim \left(\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_2^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(q/r, n/r, n/r, n/r)}} \right) \prod_{i=1}^2 \|f_i\|_{L^{p_i}(w_i)}. \quad (4.8)$$

下面我们证明

$$\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_2^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(q/r, n/r, n/r, n/r)}} \lesssim \sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_{j,k}\|_{B_{r,1}^{(q/r, n/r, n/r, n/r)}}. \quad (4.9)$$

设 Ψ 如(1.1)式中所定义, 其中 $d = 2n$ 。由于 $\text{supp } \Psi(\cdot/2^\ell) \subset \{\xi_i, \eta_i \in \mathbb{R}^n : 2^{\ell-1} \leq |(\xi_i, \eta_i)| \leq 2^{\ell+1}\}$, 并且存在 $j_0, k_0 \in \mathbb{N}$,

使得

$$\text{supp } \tilde{\psi}(\xi_1) \tilde{\psi}(\xi_2) \varphi(\eta_1) \psi(\eta_2) \subset \{2^{-j_0} \leq |(\xi_1, \eta_1)| \leq 2^{j_0}, 2^{-k_0} \leq |(\xi_2, \eta_2)| \leq 2^{k_0}\}. \quad (4.10)$$

由引理 2.4, 得

$$\begin{aligned} & \|m_2^{(j,k)}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}} \\ & \lesssim \sum_{\ell=-j_0}^{j_0} \sum_{m=-k_0}^{k_0} \|m(2^j \xi_1, 2^k \xi_2, 2^j \eta_1, 2^k \eta_2) \Psi(\xi_1/2^\ell, \eta_1/2^\ell) \Psi(\xi_2/2^m, \eta_2/2^m)\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}} \\ & \quad \times \|\Phi_2(2^j \xi_1, 2^j \eta_1) \Phi_3(2^k \xi_2, 2^k \eta_2) \psi(\xi_1 + \eta_1) \psi(\eta_2) \tilde{\psi}(\xi_1) \tilde{\psi}(\xi_2) \varphi(\eta_1)\|_{B_{\infty,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}}. \end{aligned}$$

由引理 2.4 (2), 得

$$\begin{aligned} & \|m(2^j \xi_1, 2^k \xi_2, 2^j \eta_1, 2^k \eta_2) \Psi(\xi_1/2^\ell, \eta_1/2^\ell) \Psi(\xi_2/2^m, \eta_2/2^m)\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}} \\ & = \|m_{j+\ell, k+m}(2^{-\ell}, 2^{-m}, 2^{-\ell}, 2^{-m})\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}} \lesssim \sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_{j,k}\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}}, \end{aligned}$$

对所有 $|\ell| \leq j_0$, $|m| \leq k_0$ 成立。另一方面, 由引理 2.3 (2) 和 (4.10) 式,

$$\left| \partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta (\Phi_2(2^j \xi_1, 2^j \eta_1) \Phi_3(2^k \xi_2, 2^k \eta_2) \psi(\xi_1 + \eta_1) \psi(\eta_2) \tilde{\psi}(\xi_1) \tilde{\psi}(\xi_2) \varphi(\eta_1)) \right| \leq C_{\alpha, \beta},$$

对所有 α, β 和 $j, k \in \mathbb{Z}$ 成立。所以有

$$\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|\Phi_2(2^j \xi_1, 2^j \eta_1) \Phi_3(2^k \xi_2, 2^k \eta_2) \psi(\xi_1 + \eta_1) \psi(\eta_2) \tilde{\psi}(\xi_1) \tilde{\psi}(\xi_2) \varphi(\eta_1)\|_{B_{\infty,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}} < \infty.$$

故 (4.9) 式成立。结合 (4.8) 式, 得

$$\|T_{m_2}(f_1, f_2)\|_{L^p(w)} \lesssim \left(\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_{j,k}\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}} \right) \prod_{i=1}^2 \|f_i\|_{L^{p_i}(w_i)}.$$

对第三组 Fourier 乘子的估计。考虑 $m_{1,2}$, 令 $m_3 = m_{1,2}$, 其支集为:

$$\text{supp } m_3 \subset \{|\xi_1| \leq |\eta_1|/2, |\eta_2| \leq |\xi_2|/2\}.$$

设 ψ 如 (1.1) 式中所定义 (其中 $d = n$)。若 $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \in \text{supp } m_3$, 则 $|\xi_1 + \eta_1| \approx |\eta_1|$ 且 $|\xi_2 + \eta_2| \approx |\xi_2|$ 。由于 $\text{supp } \psi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$, 我们可以选取与 j, k 无关的函数 $\varphi \in \mathcal{F}_0$ 和 $\tilde{\psi} \in \mathcal{F}_1$, 使得

$$\begin{aligned} & m_3(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \psi((\xi_1 + \eta_1)/2^j) \psi((\xi_2 + \eta_2)/2^k) \\ & = m_3(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \psi((\xi_1 + \eta_1)/2^j) \psi((\xi_2 + \eta_2)/2^k) \tilde{\psi}(\xi_2/2^k)^2 \tilde{\psi}(\eta_1/2^j)^2 \varphi(\xi_1/2^j) \varphi(\eta_2/2^k), \end{aligned}$$

令 $m_3^{(j,k)}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = m_3(2^j \xi_1, 2^k \xi_2, 2^j \eta_1, 2^k \eta_2) \psi(\xi_1 + \eta_1) \psi(\xi_2 + \eta_2) \tilde{\psi}(\xi_2) \tilde{\psi}(\eta_1) \varphi(\xi_1) \varphi(\eta_2)$, 有

$$\begin{aligned} & \psi(D/2^j) \psi(D/2^k) T_{m_3}(f_1, f_2)(x_1, x_2) \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{4n}} \int_{\mathbb{R}^{4n}} e^{ix_1(\xi_1 + \eta_1) + ix_2(\xi_2 + \eta_2)} m_3(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \psi((\xi_1 + \eta_1)/2^j) \hat{f}_1(\xi_1, \xi_2) \psi((\xi_2 + \eta_2)/2^k) \hat{f}_2(\eta_1, \eta_2) d\xi d\eta \\ & = T_{m_3^{(j,k)}(D/2^j, D/2^k)}(\tilde{\Delta}_k f_1, \tilde{\Delta}_j f_2)(x_1, x_2), \end{aligned}$$

其中 $\tilde{\Delta}_k f_1 = \tilde{\psi}(D/2^k) f_1$, $\tilde{\Delta}_j f_2 = \tilde{\psi}(D/2^j) f_2$ 。由引理 3.1, 得

$$\left| T_{m_3^{(j,k)}(D/2^j, D/2^k)}(\tilde{\Delta}_k f_1, \tilde{\Delta}_j f_2)(x_1, x_2) \right| \lesssim \|m_3^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(n/r, n/r, n/r, n/r)}} M_s(|\tilde{\Delta}_k f_1|^r)(x_1, x_2)^{1/r} M_s(|\tilde{\Delta}_j f_2|^r)(x_1, x_2)^{1/r},$$

因此, 我们有

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\psi(D/2^j) \psi(D/2^k) T_{m_3}(f_1, f_2)(x_1, x_2)|^2 \right)^{1/2} \\ & \lesssim \left(\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_3^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(\eta/r, \eta/r, \eta/r, \eta/r)}} \right) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_k f_1|^r)(x_1, x_2)^{2/r} \right)^{1/2} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_j f_2|^r)(x_1, x_2)^{2/r} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

由引理 2.1 及 Hölder 不等式, $\|T_{m_3}(f_1, f_2)\|_{L^p(w)}$ 可以由下面式子估计,

$$\begin{aligned} & \left(\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_3^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(\eta/r, \eta/r, \eta/r, \eta/r)}} \right) \left\| \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_k f_1|^r)^{2/r} \right)^{1/2} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_j f_2|^r)^{2/r} \right)^{1/2} \right\|_{L^p(w)} \\ & \leq \left(\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_3^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(\eta/r, \eta/r, \eta/r, \eta/r)}} \right) \left\| \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_k f_1|^r)^{2/r} \right)^{1/2} \right\|_{L^{p_1}(w_1)} \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_j f_2|^r)^{2/r} \right)^{1/2} \right\|_{L^{p_2}(w_2)}. \end{aligned}$$

由于 $1 \leq r < 2$, $r < p_1, p_2 < \infty$, $w_1 \in A_{p_1/r}$, $w_2 \in A_{p_2/r}$, 由引理 2.5 和引理 2.2, 得

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_k f_1|^r)^{2/r} \right)^{1/2} \right\|_{L^{p_1}(w_1)} \lesssim \left\| \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\tilde{\Delta}_k f_1|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^{p_1}(w_1)} \lesssim \|f_1\|_{L^{p_1}(w_1)} \\ & \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_j f_2|^r)^{2/r} \right)^{1/2} \right\|_{L^{p_2}(w_2)} \lesssim \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\tilde{\Delta}_j f_2|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^{p_2}(w_2)} \lesssim \|f_2\|_{L^{p_2}(w_2)}. \end{aligned}$$

所以, 有下面不等式成立,

$$\|T_{m_3}(f_1, f_2)\|_{L^p(w)} \lesssim \left(\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_3^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(\eta/r, \eta/r, \eta/r, \eta/r)}} \right) \prod_{i=1}^2 \|f_i\|_{L^{p_i}(w_i)}.$$

同(4.5)式的估计, 我们有下面式子成立

$$\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_3^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(\eta/r, \eta/r, \eta/r, \eta/r)}} \lesssim \sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_{j,k}\|_{B_{r,1}^{(\eta/r, \eta/r, \eta/r, \eta/r)}}.$$

故, 我们可以得到

$$\|T_{m_3}(f_1, f_2)\|_{L^p(w)} \lesssim \left(\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_{j,k}\|_{B_{r,1}^{(\eta/r, \eta/r, \eta/r, \eta/r)}} \right) \prod_{i=1}^2 \|f_i\|_{L^{p_i}(w_i)}.$$

对第四组 Fourier 乘子的估计。令 $m_4 = m_{3,3}$, 这里的证明与第二组相似, 我们仅给出关键的步骤,

$$\begin{aligned} & |T_{m_4}(f_1, f_2)(x_1, x_2)| \\ & \lesssim \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_4^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(\eta/r, \eta/r, \eta/r, \eta/r)}} M_s(|\tilde{\Delta}_{j,k} f_1|^r)(x_1, x_2)^{1/r} M_s(|\tilde{\Delta}_{j,k} f_2|^r)(x_1, x_2)^{1/r} \\ & \leq \sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_4^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(\eta/r, \eta/r, \eta/r, \eta/r)}} \left(\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_{j,k} f_1|^r)(x_1, x_2)^{2/r} \right)^{1/2} \left(\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_{j,k} f_2|^r)(x_1, x_2)^{2/r} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

其中 $m_4^{(j,k)}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = m_4(2^j \xi_1, 2^k \xi_2, 2^j \eta_1, 2^k \eta_2) \psi(\xi_1) \psi(\xi_2) \tilde{\psi}(\eta_1) \tilde{\psi}(\eta_2)$, $\tilde{\Delta}_{j,k} f_1 = \tilde{\psi}(D/2^j) \tilde{\psi}(D/2^k) f_1$, $\tilde{\Delta}_{j,k} f_2 = \tilde{\psi}(D/2^j) \tilde{\psi}(D/2^k) f_2$ 。考虑对 $T_{m_4}(f_1, f_2)$ 取 $L^p(w)$ 范数,

$$\begin{aligned} & \|T_{m_4}(f_1, f_2)\|_{L^p(w)} \lesssim \left(\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_4^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(\eta/r, \eta/r, \eta/r, \eta/r)}} \right) \prod_{i=1}^2 \left\| \left(\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} M_s(|\tilde{\Delta}_{j,k} f_i|^r)^{2/r} \right)^{1/2} \right\|_{L^{p_i}(w_i)} \\ & \lesssim \left(\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_4^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(\eta/r, \eta/r, \eta/r, \eta/r)}} \right) \prod_{i=1}^2 \|f_i\|_{L^{p_i}(w_i)}. \end{aligned}$$

同(4.9)式的估计, 我们有

$$\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_4^{(j,k)}\|_{B_{r,1}^{(q(r,n/r,n/r,n/r))}} \lesssim \sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_{j,k}\|_{B_{r,1}^{(q(r,n/r,n/r,n/r))}}.$$

因此, 我们有下列不等式成立:

$$\|T_{m_4}(f_1, f_2)\|_{L^p(w)} \lesssim \left(\sup_{j,k \in \mathbb{Z}} \|m_{j,k}\|_{B_{r,1}^{(q(r,n/r,n/r,n/r))}} \right) \prod_{i=1}^2 \|f_i\|_{L^{p_i}(w_i)}.$$

综上所述, 定理 1.1 成立。

5. 结论

本文研究了一类满足 Besov 正则性条件的双线性双参数 Fourier 乘子。在适当条件下, 借助二进制单位分解构造尺度截断乘子, 结合 Littlewood-Paley 理论, 通过精细的频域分解与逐点估计, 证明了这一类多参数乘子算子在加权的 L^p 空间上的有界性。得到的结果推广了经典单参数框架下的 Hörmander 型乘子理论, 细化了双参数情形对应的 Besov 正则性条件, 进一步丰富了多参数 Fourier 乘子理论体系。

参考文献

- [1] Hörmander, L. (1960) Estimates for Translation Invariant Operators in L^p Spaces. *Acta Mathematica*, **104**, 93-140. <https://doi.org/10.1007/bf02547187>
- [2] Coifman, R.R. and Meyer, Y. (1975) On Commutators of Singular Integrals and Bilinear Singular Integrals. *Transactions of the American Mathematical Society*, **212**, 315-315. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1975-0380244-8>
- [3] Fujita, M. and Tomita, N. (2018) Weighted Norm Inequalities for Multilinear Fourier Multipliers with Critical Besov Regularity. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **146**, 555-569. <https://doi.org/10.1090/proc/13680>
- [4] Muscalu, C., Pipher, J., Tao, T. and Thiele, C. (2004) Bi-Parameter Paraproducts. *Acta Mathematica*, **193**, 269-296. <https://doi.org/10.1007/bf02392566>
- [5] Chen, J. and Lu, G. (2014) Hörmander Type Theorems for Multi-Linear and Multi-Parameter Fourier Multiplier Operators with Limited Smoothness. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **101**, 98-112. <https://doi.org/10.1016/j.na.2014.01.005>
- [6] Duoandikoetxea J. (2001) Fourier Analysis. Graduate Studies in Mathematics, vol. 29. American Mathematical Society.
- [7] Ruan, Z. (2010) Weighted Hardy Spaces in the Three-Parameter Case. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **367**, 625-639. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.02.010>
- [8] Fefferman, R. and Stein, E.M. (1982) Singular Integrals on Product Spaces. *Advances in Mathematics*, **45**, 117-143. [https://doi.org/10.1016/s0001-8708\(82\)80001-7](https://doi.org/10.1016/s0001-8708(82)80001-7)
- [9] Fujita, M. and Tomita, N. (2012) Weighted Norm Inequalities for Multilinear Fourier Multipliers. *Transactions of the American Mathematical Society*, **364**, 6335-6353. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-2012-05700-x>
- [10] Sugimoto, M. (1988) Pseudo-Differential Operators on Besov Spaces. *Tsukuba Journal of Mathematics*, **12**, 43-63. <https://doi.org/10.21099/tkajm/1496160636>
- [11] Fefferman, C. and Stein, E.M. (1971) Some Maximal Inequalities. *American Journal of Mathematics*, **93**, 107-115. <https://doi.org/10.2307/2373450>
- [12] Lerner, A.K., Ombrosi, S., Pérez, C., Torres, R.H. and Trujillo-González, R. (2009) New Maximal Functions and Multiple Weights for the Multilinear Calderón-Zygmund Theory. *Advances in Mathematics*, **220**, 1222-1264. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2008.10.014>